Выпуск 34(5I) О П Т И М И З А Ц И Я 1984 г.
Выпуклый анализ и смежные вопросы

УДК 330.II5:5I9.95

КОМПАКТНЫЕ СИСТЕМЫ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А.Г.Пинскер

Интересы развития теории и приложений линейного программирования, особенно в экономических исследованиях, приводят к необходимости введения и исследования новых классов моделей и задач линейной оптимизации и их систем, названных в работе компактными. Такие модели, в частности, возникают в процессе формализации задач планирования производства практически неограниченных количеств видов продукции, ресурсов и технологий, совокупности которых целесообразно рассматривать как бесконечные.

Исследование подобных моделей приводит к системам в некотором смысле близких друг к другу обычных числовых задач линейного программирования. При определенных условиях в каждой такой системе можно выделить по крайней мере одну "привилегированную" задачу, определяющую решение всей системы.

Основным объектом исследования является линейная параметрическая задача, в которой исходные данные представляют собой фиксированные вещественные функции, непрерывные в некотором компактном метрическом пространстве Q . В более общем случае компактной системы линейных параметрических задач эти функции произвольно выбираются из некоторых компактных множеств непрерывных функций, заданных в компакте Q . Используя понятие метрического произведения компактов, общий случай компактной системы сводится к случаю одной линейной параметрической задачи.

В качестве экономических примеров иллюстративного характера приводятся задачи оптимизации выпуска модифицированной продукции, оптимального размещения производства в заданной области,

рациональной организации перевозок непрерывно распределенного груза.

§I. Линейная параметрическая задача

Общая параметрическая задача линейного программирования может быть сформулирована следующим образом.

Пусть $E=\{t\}$ - множество элементов произвольной природы, $a_{ij}(t), b_i(t)$ и $c_j(t)$ - произвольные известные вещественные функции параметра $t\in E$, $x_j(t)$ - неизвестные вещественные функции от $t\in E$ ($i=1,\dots,m$; $j=1,\dots,n$). Следует максимизировать при всех $t\in E$ целевую функцию

$$f[X(t)]=\sum_{j=1}^{n} c_j(t)x_j(t), X=\{x_j(t)\}, x_j(t)\geq 0\ (j=1,\dots,n) \quad (1)$$

при условии, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t)=b_i(t)\ (i=1,\dots,m), \quad (2)$$

и найти, если это возможно, такое значение параметра $t=t^*$, для которого целевая функция (I) достигает наибольшего возможного значения.

Естественно предположить, что множество E представляет собой компакт, в котором заданные функции непрерывны.

Напомним, что компактом называется метрическое пространство, в котором из каждой его бесконечной последовательности точек можно выделить сходящуюся в этом пространстве подпоследовательность.

Компакты обладают рядом важных свойств. Так, например, замкнутое подмножество компакта также компакт; всякая вещественная непрерывная в компакте функция ограничена в нем и достигает своих верхней и нижней граней. Имеет смысл понятие метрического произведения конечного числа компактов, также являющееся компактом.

Примерами компактов могут служить любые ограниченные и замкнутые множества конечномерного пространства, компактные подмножества пространств непрерывных функций (с обычной метрикой) и пр.

Теперь дадим основное

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Задачу (I)-(2) будем называть линейной

параметрической, если функции $a_{ij}(t)$, $b_i(t)$ и $c_j(t)$ заданы на компакте $Q=\{t\}$ и непрерывны в нем и при всяком $t\in Q$ соответствующая числовая задача линейного программирования имеет решение.

Верхнюю грань значений ее целевой функции обозначим через $\varphi(t)$ и поставим своей целью разыскание такого $t^*\in Q$, что $\varphi(t^*)\geq\varphi(t)$ при всяком $t\in Q$.

Будем говорить, что линейная параметрическая задача имеет решение, если значение параметра t^* с максимальным возможным значением целевой функции (I) существует.

ТЕОРЕМА I. Линейная параметрическая задача имеет решение, если всякий определитель $\Delta(t)$, порожденный матрицей $M(t)=\|a_{ij}(t)\|$ системы уравнений (2), базисный в некоторой точке $t_0\in Q$, будет базисным и во всех точках $t\in Q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t=t_1$ - произвольная фиксированная точка компакта Q. В ней задача имеет решение и, следовательно, существует ее оптимальный базисный план, например:

$$X_1(t_1)=(x_1(t_1),x_2(t_1),\ldots,x_k(t_1),0,\ldots,0)(1\leq k\leq m), \quad (3)$$

и соответствующее выражение целевой функции через свободные неизвестные $x_{k+1}, x_{k+2},\ldots,x_n$:

$$f[X_1(t_1)]=c_0'(t_1)+c_{k+1}'(t_1)x_{k+1}(t_1)+\cdots+c_n'(t_1)x_n(t_1), \quad (4)$$

в которых

$$x_i(t_1)\geq 0\ (i=1,\ldots,k),\quad c_j'(t_1)\leq 0\ (j=k+1,\ldots,n), \quad (5)$$

при этом базисный определитель $\Delta(t_1)$, образованный, например, первыми k строками и первыми k столбцами матрицы системы (2), не равен нулю в точке t_1 и, следовательно, по условию теоремы определитель $\Delta(t)$ не равен нулю во всем компакте Q. Так как его элементы непрерывные в Q функции, то и сам он непрерывен в Q, а тогда найдется число $\sigma>0$ такое, что $|\Delta(t)|\geq\sigma$ во всем компакте Q.

Полагая в уравнениях (2) свободные неизвестные $x_{k+1}(t),\ldots,x_n(t)$ тождественно-равными нулю в компакте Q, найдем базисные неизвестные $x_1(t),\ldots,x_k(t)(t\in Q)$, а также выражение целевой функции (I) через свободные неизвестные:

$$f[X_1(t)]=c'_0(t)+c'_{k+1}(t)x_{k+1}(t)+\ldots+c'_n(t)x_n(t)\ (t\in Q). \quad (6)$$

Каждое базисное неизвестное $x_i(t)$ представляет собой (по формулам Крамера) отношение двух определителей, являющихся непрерывными в Q функциями, причем знаменатель отношения не обращается в нуль в Q. Отсюда следует, что $x_i(t)$ - функция, непрерывная в Q. Нетрудно также видеть, что коэффициенты $c_j(t)$ в выражении целевой функции (4), являясь суммой произведений непрерывных в Q функций, непрерывны в Q. В таком случае множества точек компакта Q, в которых $x_i(t)\geq 0$ ($i=1,\ldots,k$) и $c'_j(t)\leq 0$ ($j=k+1,\ldots,n$), замкнуты и содержат точку t_1. Замкнутым и непустым будет и их пересечение - компакт $Q_1\subset Q$. По самому построению Q_1 в любой его точке t вектор

$$X_1(t)=(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_k(t),0\ldots 0) \quad (7)$$

- базисный план рассматриваемой задачи и притом оптимальный, так как при $t\in Q_1$ $c'_j(t)\leq 0$. Вместе с тем, функция

$$\varphi(t)=f[X_1(t)]=c'_0(t)+c'_{k+1}(t)x_{k+1}(t)+\ldots+c'_n(t)x_n(t) \quad (8)$$

непрерывная в Q и, в частности в Q_1, выражает максимальное значение целевой функции (I) в каждой точке $t\in Q_1$.

Если компакт Q_1 не совпадает с Q, то в нем найдется точка $t=t_2$, не принадлежащая Q_1. Для нее так же, как и для рассмотренного выше случая $t=t_1$, определится компакт $Q_2\subset Q$, содержащий точку t_2, в которой задача имеет решение с оптимальным базисным планом $X_2(t)$, компоненты которого непрерывны в Q_2, и целевой функцией $\varphi_2(t)$ вида (7), также непрерывной в Q_2. Так как число базисов системы уравнений (2) конечно, то через конечное число шагов описанный выше процесс завершится построением последовательности компактов $Q_1,\ldots,Q_s$, объединение которых составит весь компакт Q.

Во всех точках компакта Q_i задача имеет решение с одним и тем же оптимальным базисом и оптимальным базисным планом $\{X_i(t)\}$, компоненты которого непрерывны в Q_i, и максимальным значением целевой функции, равным $\varphi_i(t)$, представляющим собой непрерывную в компакте Q_i функцию.

Заметим, что в точке t_0, общей для двух компактов Q_i и Q_j, оптимальные базисные планы могут не совпадать, однако значения целевых функций в этой точке, разумеется, равны меж-

ду собой: $\varphi_i(t_0)=\varphi_j(t_0)$.

Определим теперь на компакте Q функцию $\varphi(t)$, полагая ее равной $\varphi_i(t)$ на компакте Q_i ($i=1,\dots,s$), и покажем, что она непрерывна на всем компакте Q.

Действительно, если $t_n \to t_0$ в Q, то непременно $\varphi(t_n) \to \varphi(t_0)$. В противном случае найдется подпоследовательность t_{nk}, содержащаяся в некотором Q_i, такая, что $\varphi(t_{nk}) = \varphi_i(t_{nk}) \to \alpha$, где $\alpha \neq \varphi(t_0)$, что невозможно, так как $t_{nk} \to t_0$, откуда $t_0 \in Q_i$, а функция $\varphi_i(t)$ непрерывна в Q.

Итак, функция $\varphi(t)$ непрерывна в компакте Q и, следовательно, достигает на нем самого наибольшего значения в некоторой точке t^*. Теорема доказана.

Функция $\varphi(t)$, существование которой установлено выше, выражает максимальное значение целевой функции линейной параметрической задачи в условиях теоремы I в каждой точке t компакта Q. В связи с этим ее можно назвать максимум-функцией задачи.

Заметим, что в процессе доказательства теоремы, по существу, указан принципиальный алгоритм решения линейной параметрической задачи, сводящий ее, в конечном счете, к конечному числу обычных числовых задач линейного программирования.

Как известно, в компакте Q для всякого числа $\varepsilon > 0$ можно выделить конечную ε-сеть, т.е. множество точек $\{t_k\} \subset Q$ ($k=1,\dots,s$) такое, что любая точка $t \in Q$ отстоит от некоторой точки t_k на расстоянии меньшим, чем ε.

Если решить задачу (1)-(2) в точках t_k, то наилучшее из этих решений можно рассматривать как некоторое приближенное решение всей задачи.

Приведем некоторую условную экономическую интерпретацию линейной параметрической задачи в виде задачи оптимизации выпуска модифицированной продукции из заданных ресурсов.

Пусть на предприятии (объединении, отрасли и т.п.) выпускается n видов продукции, причем продукция j-го вида может производиться во многих модификациях (различающихся, например, содержанием некоторых ингредиентов, конструктивными особенностями, габаритами и т.п.), зависящих от некоторого параметра p_j, изменяющегося в пределах заданного компакта P_j ($j=1,\dots,n$). Через Q обозначим произведение компактов P_j,

его элементами являются всевозможные наборы $t=\{p_j\}$ соответствующих элементов компактов P_j. (Компактами P_j могут служить, например, совокупности точек отрезков $[\alpha_j, \beta_j]$; в этом случае их произведение Q - n-мерный параллелепипед.)

Пусть на производство j-й продукции в p_j-й модификации затрачивается $a_i(p_j)$ единиц i-го ресурса, имеющегося в количестве b_i ($i=1,\dots,m$) единиц, а выручка от ее производства равна $c_j(p_j)$. Если $x_j(p_j)$ $(p_j\in P_j)$ - количество единиц j-й продукции, производимой в p_j-й модификации, то задача состоит в максимизации целевой функции

$$f[X(t)]=\sum_{j=1}^{n} c_j(p_j)x_j(p_j),\ X(t)=\{x_j(p_j)\} \qquad (9)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_i(p_j)x_j(p_j)=b_i \qquad (i=1,\dots,m). \qquad (10)$$

Положим для $t\in Q$

$$a_{ij}(t)=a_i(p_j),\ b_i(t)=b_i,\ c_j(t)=c_j(p_j) \text{ и } x_j(t)=x_j(p_j).$$

Теперь задача (9)-(10) записывается как задача максимизации целевой функции

$$f[X(t)]=\sum_{j=1}^{n} c_j(t)x_j(t),\ X(t)=\{x_j(t)\} \quad (t\in Q) \qquad (11)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t)=b_i(t) \qquad (i=1,\dots,m) \qquad (12)$$

и оказывается, очевидно, линейной параметрической задачей.

Можно предположить, что используемые ресурсы представлены в различных модификациях. Тогда задача об оптимизации выпуска продукции приводится к линейной параметрической задаче соответствующего вида.

Рассмотрим теперь задачу о п т и м а л ь н о г о р а з м е щ е н и я п р о и з в о д с т в а в заданной области при условии удовлетворения потребностей потребителей и минимизации транспортных затрат. Она состоит в следующем.

Пусть в каждой точке t, положение которой определяется координатой $t\in[0,d]$ (для простоты ограничимся одномерным случаем), можно развить производство мощности $P(t)$

единиц. Потребности потребителей $N_1, \dots, N_n$ равны соответственно $b_1, \dots, b_n$ единиц. Затраты на перевозку единицы продукта из точки $M(t)$ потребителю N_k составляют $c_j(t)$ условных денежных единиц ($j=1,\dots,n$). Следует выбрать точки $M(t_1), \dots, M(t_m)$ так, чтобы суммарная мощность производств в этих точках совпала с суммарными потребностями потребителей:

$$\sum_{i=1}^{m} p(t_i) = \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{13}$$

и если $x_j(t_i)$ - количество продукта, перевозимого из точки $M(t_i)$ потребителю N_j ($i=1,\dots,m; j=1,\dots,n$), то

$$\sum_{j=1}^{n} x_j(t_i) = P(t_i), \sum_{i=1}^{m} x_j(t_i) = b_j. \tag{14}$$

При этом суммарные транспортные затраты должны быть минимальными:

$$\sum_{i,j} c_j(t_i) x_j(t_i) \to min. \tag{15}$$

При фиксированном выборе пунктов производства, т.е. при заданном векторе $T=\{t_i\}, 0 \le t_1 \le t_2 \le \dots \le t_m = d$, задача (13)-(15) - обычная числовая закрытая транспортная задача, всегда, как известно, имеющая решение. Однако при переменном векторе T задача оказывается линейной параметрической. Действительно, вектору $T=\{t_i\}$ сопоставим вектор $P=\{p_i\}$, полагая $p_i = t_i - t_{i-1}$ ($i=1,\dots,m$). Оба вектора однозначно определяют друг друга, так как $t_i = p_1 + p_2 + \dots + p_i$. Но из $p_i \ge 0$ и $\sum_{i=1}^{m} p_i = t_m = d$ следует, что совокупность точек, соответствующих векторам P, представляет собой пересечение гиперплоскости, отсекающей на осях координат m-мерного пространства отрезки, равные d, с его положительным октантом. Этот m-мерный треугольник, очевидно, компакт; обозначим его через Q. Можно также считать, что Q определяет и множество всех векторов T, задающих выбор точек $M(t_i)$.

Возвращаясь к задаче (13)-(15), запишем ее в другом виде, а именно, полагая для всякого $T \in Q$

$$a_i(T) = P(t_i), b_j(T) = b_j, c_{ij}(T) = c_j(t_i) \text{ и } x_{ij}(T) = x_j(t_i),$$

получим

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}(T) = a_i(T), \sum_{i=1}^{m} x_{ij}(T) = b_j(T), \tag{16}$$

причем

$$\sum_{i,j} c_{ij}(T)x_{ij}(T) \rightarrow \min. \qquad (17)$$

В такой записи задача (16)-(17), очевидно, линейная параметрическая, и ее решение определяет оптимальный выбор пунктов размещения производства, удовлетворяющий поставленным условиям.

Другим примером линейной параметрической задачи может служить задача о рациональной организации перевозок непрерывно распределенного груза. В простейшем случае она состоит в следующем.

На отрезке $[a, b]$ расположен груз плотности $p(t)$, $a \le t \le b$, который следует доставить в n пунктов потребления, потребности которых составляют q_j ($j = 1, \ldots, n$) единиц. Стоимость перевозки единицы груза из точки t в j-й пункт потребления равна $\varphi_j(t)$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на не более чем m частей точками $a = t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_m$ и в каждом частичном отрезке $[t_{k-1}, t_k]$ найдем количество расположенного на нем груза:

$$P(t_{k-1}, t_k) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} p(t)\,dt \quad (k = 1, \ldots, m)$$

и среднее расстояние от его точек до j-го пункта:

$$c_j(t_{k-1}, t_k) = \frac{1}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi_j(t)\,dt, \quad (k = 1, \ldots, m).$$

Теперь возникает транспортная задача с минимальными транспортными затратами, равными $\varphi(t_{k-1}, t_k)$. Следует указать такое разбиение отрезка на не более чем m частей, при котором суммарные затраты были наименьшими возможными:

$$\sum_{k=1}^{m} \varphi(t_{k-1}, t_k) \rightarrow \min.$$

Эта задача также представляет собой линейную параметрическую задачу с параметром, изменяющимся в некотором m-мерном треугольнике.

§2. Компактные системы линейных параметрических задач

Исходные данные линейной параметрической задачи - коэффициенты при неизвестных и свободные члены уравнений - представляют заданные и неизменные функции параметра. Между тем, во

многих задачах реального происхождения в целях повышения эффективности решения допускается замена одних исходных данных другими, принадлежащими некоторому заданному семейству. В связи с этим целесообразно рассмотреть новый более широкий класс задач оптимизации с переменными исходными данными, а именно, компактные системы линейных параметрических задач. Перейдем к описанию этого класса.

Пусть $Q=\{t\}$ - компакт, C - пространство вещественных непрерывных в Q функций с обычной метрикой, $A_{ij}=\{a_{ij}\}$, $a_{ij}=a_{ij}(t); B_i=\{b_i\}, b_i=b_i(t); C_j=\{c_j\}, c_j=c_j(t) (i=1,\dots,m; j=1,\dots,n)$ - подмножества C, являющиеся компактами в метрике пространства C. Через $Z=\{z\}$ обозначим метрическое произведение компактов A_{ij}, B_i и C_j, также являющееся компактом. Его элементами служат всевозможные наборы $z=(a_{ij}, b_i, c_j)$, где $a_{ij}\in A_{ij}$, $b_i\in B_i$ и $c_j\in C_j$.

Каждой паре элементов $z=(a_{ij}, b_i, c_j)\in Z$ и $t\in Q$ поставим в соответствие обычную числовую задачу линейного программирования максимизации целевой функции:

$$f[X(t)]=\sum_{j=1}^{n} c_j(t)x_j(t), X(t)=\{x_j(t)\}, x_j(t)\geq 0, j=1,\dots,n, \tag{18}$$

при условии, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t)=b_i(t) \quad i=1,\dots,m. \tag{19}$$

Чтобы подчеркнуть зависимость исходных данных задачи (18)-(19) от z, можно записать ее в виде задачи максимизации целевой функции:

$$f[X(z,t)]=\sum_{j=1}^{n} c_j(z,t)x_j(z,t), X(z,t)=\{x_j(z,t)\}; x_j(z,t)\geq 0, \; j=1,\dots,n, \tag{20}$$

при условии, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(z,t)x_j(z,t)=b_i(z,t). \tag{21}$$

Естественно предположить, что функции $a_{ij}(z,t), b_i(z,t)$ и $c_j(z,t)$ ($i=1,\dots,m; j=1,\dots,n$) непрерывны в компакте $P=Z\times Q$ и что при любых $z\in Z$ и $t\in Q$ задача (20)-(21) имеет решение. При выполнении этих условий при каждом фиксированном значении параметра z задача оказывается линейной параметрической, а при переменном z, пробегающим весь

компакт $\mathcal{Z}$, соотношения (20)-(21) определяют целое семейство таких задач - их компактную систему. Однако, как нетрудно видеть, эта система равносильна одной линейной параметрической задаче с параметром $p \in P$, $p = (z, t)$, состоящей в максимизации целевой функции

$$f[X(p)] = \sum_{j=1}^{n} c_j(p) x_j(p), \; X = \{x_j(p)\}, \; x_j(p) \geq 0 \;\; (j = 1, \ldots, n), \quad (22)$$

при условии, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(p) x_j(p) = b_i(p) \quad (i = 1, \ldots, m). \quad (23)$$

Пусть $\varphi(p) = \varphi(z, t)$ - верхняя грань наибольших значений целевой функции (22). Представляет интерес нахождение такого значения параметра $p^* = (z^*, t^*)$, для которого $\varphi(p^*) = \varphi(z^*, t^*) \geq \varphi(p) = \varphi(z, t)$ при любом $p \in P$. В случае, когда такое оптимальное значение параметра p существует, будем говорить, что компактная система линейных параметрических задач (20)-(21) имеет решение.

Теперь из теоремы существования решения линейной параметрической задачи (теорема I) следует теорема существования решения компактной системы таких задач.

ТЕОРЕМА 2. Компактная система линейных параметрических задач имеет решение, если всякий определитель $\Delta(p)$, порожденный матрицей $M(p) = \|a_{ij}(p)\|$ системы уравнений (23), базисный в некоторой точке $p_0 \in P$, будет базисным и во всех точках $p \in P$.

Отметим особый случай задачи (20)-(21), когда компакт $\mathcal{Q}$ - одноэлементный, т.е. когда параметр t принимает единственное значение $t = t_0$, а второй параметр z пробегает весь компакт $\mathcal{Z}$. При всяком фиксированном значении задача оказывается числовой задачей линейного программирования, а совокупность таких задач, соответствующих всевозможным значениям $z \in \mathcal{Z}$, образует компактную систему задач линейного программирования.

В этом случае $a_{ij}(t_0)$, $b_i(t_0)$ и $c_j(t_0)$ при $z \in \mathcal{Z}$ образуют компактные множества точек прямой, т.е. ее ограниченные замкнутые подмножества.

Легко видеть, что задача (20)-(21) при фиксированном t и переменном $z \in Z$ может рассматриваться и как линейная параметрическая задача.

Нетрудно видеть, что

$$\varphi(z^*, t^*) = \sup_{z \in Z} (z, t^*) = \sup_{t \in Q} (z^*, t).$$

Задача (20)-(21) порождает и другие линейные параметрические задачи. Так, например, при одноэлементных A_{ij} и c_j переменными будут только свободные члены уравнений (21), и задача состоит в оптимальном их выборе.

§3. Линейная параметрическая транспортная задача

Важным частным случаем линейной параметрической задачи является линейная параметрическая транспортная задача. Ее решение можно осуществить специальным методом, не зависящим от общего метода, рассмотренного выше.

Приведем математическую формулировку этой задачи.

Пусть $Q = \{t\}$ - компакт $a_i(t) \geq 0, b_j(t) \geq 0$ и $c_{ij}(t)$ - известные, а $x_{ij}(t)$ - неизвестные функции, зависящие от параметра $t \in Q$. Будем предполагать, что $a_i(t) \geq 0$, $b_j(t) \geq 0$ и $c_{ij}(t)$ непрерывны в Q и что $\sum_{i=1}^{m} a_i(t) = \sum_{j=1}^{n} b_j(t)$.

Следует для всех $t \in Q$ минимизировать целевую функцию

$$f[X(t)] = \sum_{i,j} c_{ij}(t) x_{ij}(t), \quad X(t) = \{x_{ij}(t)\}, \quad x_{ij}(t) \geq 0, \tag{24}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}(t) = a_i(t), \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij}(t) = b_j(t) \tag{25}$$

и найти такое значение параметра $t = t^*$, для которого целевая функция (24) достигает своего наименьшего значения.

Перейдем к решению задачи. Положим $t = t_1$, задача (24)-(25) в этом случае оказывается обычной числовой транспортной задачей, как известно, всегда имеющей решение.

Пусть

$$X^*(t_1) = \{x_{ij}^*(t_1)\} \tag{26}$$

- ее оптимальный базисный план, в котором $m+n-1$ неизвестных (базисных) неотрицательны, в то время как остальные

(свободные) равны нулю.

Совокупность пар индексов (i,j), соответствующих базисным неизвестным, обозначим через I_1, а свободным неизвестным - через I_2.

Полагая в уравнениях (2) для $(i,j)\in I_2$

$$x_{ij}(t)=0 \qquad (t\in Q), \tag{27}$$

получим систему уравнений для определения остальных базисных неизвестных:

$$x_{ij}(t)(t\in Q) \text{ и } (i,j)\in I_1. \tag{28}$$

Полученная таким образом система значений неизвестных $x_{ij}(t)$ представляет собой базисное решение системы уравнений (16). Каждое из них, как известно, представляет собой линейную комбинацию правых частей уравнений (16) и является непрерывной функцией от t.

Рассмотрим теперь систему $m+n-1$ уравнений:

$$v_j(t)-u_i(t)=c_{ij}(t)\ (t\in Q),(i,j)\in I_1 \tag{29}$$

с $m+n$ неизвестными $u_i(t)$ и $v_j(t)$ - обобщенными потенциалами задачи.

Полагая одно из неизвестных равным нулю, найдем остальные в виде непрерывных в Q функций.

Через Q_{ij}, $(i,j)\in I_1$, обозначим множество точек Q, для которых $x_{ij}(t)\geq 0$. Эти множества замкнуты в Q и содержат точку t_1, так как $x_{ij}(t_1)\geq 0$ для $(i,j)\in I_1$. Их пересечение Q' - замкнутое подмножество Q, содержащее точку t_1.

Через Q''_{ij}, $(i,j)\in I_2$, обозначим множество точек Q, для которых

$$v_j(t)-u_i(t)-c_{ij}(t)\leq 0. \tag{30}$$

Так как левая часть неравенств (5) непрерывна в Q, то множества Q''_{ij} замкнуты в Q и, следовательно, их пересечение Q'' - также замкнутое подмножество Q содержащее точку t_1.

Пусть Q_1 - пересечение множеств Q' и Q''. Тогда для любого $t\in Q_1$ система неизвестных $x_{ij}(t)$, определенная выше, является не только базисным решением задачи (24)-(25), но и ее базисным планом и притом оптимальным.

Заметим также, что Q_1 по самому своему построению замкнутое подмножество Q и, следовательно, компакт.

Значение целевой функции (I) для найденного оптимального

плана задачи (I)-(2) в каждой точке $t\in Q_1$ будет

$$f[X(t)]=\sum_{i,j} x_{ij}(t)c_{ij}(t) \quad (t\in Q_1), \tag{31}$$

но $x_{ij}(t)$ и $c_{ij}(t)$ непрерывно зависят от t, поэтому и $f[x(t)]=\varphi(t)$ представляет собой непрерывную в Q_1 функцию. В силу известных свойств компакта такая функция достигает в некоторой точке t_1^* своего наименьшего значения $\varphi(t_1^*)$.

Если компакт Q_1 не исчерпывает всего компакта Q, то найдется точка t_2, принадлежащая Q, но не принадлежащая Q_1. Для нее, как и раньше, можно построить компакт $Q_2\subset Q$, содержащий точку t_2, с целевой функцией, достигающей своего наименьшего значения $\varphi(t_2^*)$ в компакте Q_2 в некоторой его точке t_2^*.

Продолжая этот процесс, через конечное число шагов определим компакты $Q_1, Q_2,\ldots, Q_s$, объединение которых составляет весь компакт Q. В некоторой точке t_i^* целевая функция достигает своего наименьшего значения $\varphi(t_i^*)$ на компакте Q_i.

Если наименьшее из этих значений $\varphi(t_k^*)$, то для всех $t\in Q$ $\varphi(t)\geq\varphi(t_k^*)$, и тем самым задача (24)-(25) оказывается решенной.

ЛИТЕРАТУРА

1. КАНТОРОВИЧ Л.В. Математические методы организации и планирования производства. - Л.: Изд-во ЛГУ, 1939.
2. КАНТОРОВИЧ Л.В.Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. - М.: Академиздат, I949.
3. ДАНЦИГ Д. Линейное программирование, его применения и обобщения. - М.: Прогресс, I966.
4. ПИНСКЕР А.Г. Линейная оптимизация в упорядоченных пространствах. - Докл. АН СССР, I978, т.242, №5, с.I0I2-I0I5.
5. ПИНСКЕР А.Г. Общая задача линейной оптимизации в К-пространствах. - Оптимизация, I979, вып. 23(40), с.9-I6.
6. ПИНСКЕР А.Г. Особенности построения динамических моделей экономики. - Л.: изд. ЛИЭИ, I98I.
7. ГОЛЬШТЕЙН Е.Г., ЮДИН Д.Б. Новые направления в линейном программировании. - М.: Сов. радио, I966.
8. ГОЛЬШТЕЙН Е.Г., ЮДИН Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. - М.: Наука, I969.

Поступила в ред.-изд. отдел
I4.06.I984 г.