Выпуск 34(5I) ОПТИМИЗАЦИЯ 1984 г.
Моделирование экономических процессов

УДК 5I9.8

ОПТИМИЗАЦИЯ РАСКРОЯ МАТЕРИАЛА В ЗАДАННОМ АССОРТИМЕНТНОМ ОТНОШЕНИИ

Э.А.Мухачева, С.М.Ибатуллина

В статье рассматривается постановка задачи массового раскроя в условиях, когда исходный материал поступает в ассортиментном отношении. Это условие не только приводит к задаче, отличной от изучавшихся ранее [I,2], но и к модификации алгоритма решения.

I. Постановка задачи

В задаче известны размеры раскраиваемого материала[ж)], а также ассортиментное отношение $k_1 : k_2 : \ldots : k_n$ поступления его в производство. Известны размеры выкраиваемых заготовок и их число $b_j,\ j=\overline{1,m}$, в расчете на одно изделие. Требуется составить план раскроя, при котором суммарный расход материала был бы минимальным.

Под планом раскроя понимается набор технологически допустимых способов раскроя $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_s$ и интенсивность их применения $x_\nu,\ \nu=\overline{1,s}$. Каждому способу раскроя τ соответствует номер $i(\tau)$ раскраиваемого материала и вектор

$$\alpha(\tau)=(a_1(\tau), a_2(\tau), \ldots, a_j(\tau), \ldots, a_m(\tau)),$$

ж) Ширина и длина листов в случае прямоугольного раскроя, длина стержней или полос в случае линейного раскроя.

компонента $a_j(r)$ указывает число заготовок j-го вида из листа с номером $i(r)$. План раскроя является допустимым, если он обеспечивает требуемый комплект заготовок. Оптимальный план должен быть допустимым и давать минимальный расход материала.

Пусть ρ - мера одного комплекта материала (суммарная площадь или длина), z - неизвестное количество комплектов исходного материала, расходуемых в расчете на одно изделие. Тогда материал i-го вида расходуется в количестве $k_i \cdot z$. Вопрос о планировании оптимального раскроя сводится к следующей математической задаче.

ЗАДАЧА I. Требуется найти набор раскроев r_ν, $\nu = \overline{1,s}$, и неотрицательный $(s+1)$-мерный вектор

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_s, z), \tag{I}$$

удовлетворяющие условиям

$$\sum_{\nu=1}^{s} \bar{\alpha}(r_\nu) \cdot x_\nu = \bar{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$-\sum_{\nu/i(r_\nu)=i} x_\nu + k_i \cdot z = 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{3}$$

и доставляющие максимум функции

$$\mu(\bar{x}) = -\rho \cdot z. \tag{4}$$

Из общей теории линейного программирования вытекает

ПРИЗНАК ОПТИМАЛЬНОСТИ. Для оптимальности допустимого вектора задачи I необходимо и достаточно существование вектора

$$\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m, u_1, u_2, \ldots, u_n), \tag{5}$$

удовлетворяющего условиям

$$(\bar{\alpha}(r_\nu), \bar{y}) - u_{i(r_\nu)} \leq 0, \quad \nu = \overline{1,s}, \tag{6}$$

$$(\bar{\alpha}(r_\nu), \bar{y}) - u_{i(r_\nu)} = 0, \text{ если } x_\nu > 0, \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot u_1 = \rho. \tag{8}$$

Оценки $y_\nu, \nu=\overline{1,m}$, соответствующие оптимальному плану раскроя, можно трактовать как подетальные нормы расхода материала, оценки листов $u_i, i=\overline{1,m}$, - как коэффициент использования материала каждого вида.

2. Особенности и реализация алгоритма

Схема включения задач раскроя в пакет линейного программирования ЛП-ЛПУ предусматривает решение задачи с рекомендованного базиса, замену модулей, реализующих функции генерирования столбцов [3,4].

I.I. Специфика построения начального базисного множества. Традиционный прием построения начального базисного множества при решении задач раскроя рекомендует в базис столбцы, соответствующие единичным способам раскроя. Он дает базисную матрицу

$$A' = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_m \end{pmatrix} \qquad (9)$$

где a_i - число заготовок i-го вида, получающихся при однородном раскрое материала. Фрагмент матрицы ограничений, отвечающий единичным способам раскроя, имеет вид

$$A = \begin{array}{cccccc} A'_1 & A'_2 & \dots & A'_n & 0 \\ \left(\begin{matrix} -1\,-1\dots-1 \\ 0\;0\dots0 \\ \vdots \\ 0\;0\dots0 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 0\;0\dots0 \\ -1\,-1\dots-1 \\ \vdots \\ 0\;0\dots0 \end{matrix} & \begin{matrix} \dots \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \end{matrix} & \begin{matrix} 0\;0\dots0 \\ 0\;0\dots0 \\ \vdots \\ -1\,-1\dots-1 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{matrix}\right) \end{array}$$

где A'_i - матрица (9), соответствующая i-му наименованию материала. Приведенный выше прием выбора в качестве исходного допустимого базисного множества только однородных раскроев здесь оказывается неприемлем, так как последний столбец матрицы A является обязательным в структуре базиса.

Проблема легко разрешается заменой в задаче I равенств (3) на неравенства типа $\geqslant$ (листы расходуются не обязательно в полном комплекте).

ЗАДАЧА 2. Требуется найти набор раскроев $r_\nu, \nu=\overline{1,s}$, и неотрицательный $(s+1)$-мерный вектор (I), удовлетворяющие

(2), а также условию

$$-\sum_{\nu/i(r_\nu)=i} x_\nu + k_i \cdot z - x_{m+i} = 0,\ i=\overline{1,n},$$

и доставляющие максимум функции (4).

ПРИЗНАК ОПТИМАЛЬНОСТИ. Для оптимальности допустимого вектора задачи 2 необходимо и достаточно существование вектора (5), удовлетворяющего условиям (6)-(8), а также условиям

$$u_i \geq 0,\ i=\overline{1,n}, \tag{10}$$

$$u_i = 0,\ \text{если}\ x_{m+1} > 0. \tag{11}$$

Нетрудно проверить, что матрица

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} A_1' & & & 0 & & 0 \\ -1 & -1 \dots & -1 & k_1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 \dots & 0 & k_2 & -1 & 0 \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \dots & 0 & k_n & 0 & 0 \dots -1 \end{pmatrix}$$

является базисной матрицей для задачи 2. Она отвечает ситуации, когда однородные раскрои получают из первого листа. Примем ее в качестве исходной. Обратной к ней является матрица

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} A_1'^{-1} & & & 0 & & 0 \\ \frac{1}{a_1 k_1} & \frac{1}{a_2 k_2} \dots & \frac{1}{a_m k_1} & \frac{1}{k_1} & 0 & 0 \dots 0 \\ \frac{k_2}{k_1 a_1} & \frac{k_2}{k_1 a_2} \dots & \frac{k_2}{k_1 a_m} & \frac{k_2}{k_1} & -1 & 0 \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{k_n}{k_1 a_1} & \frac{k_n}{k_1 a_2} \dots & \frac{k_n}{k_1 a_m} & \frac{k_n}{k_1} & 0 & 0 \dots -1 \end{pmatrix}$$

Базисный вектор с ненулевыми компонентами

$$x_i = \frac{b_i}{a_i},\ i=\overline{1,m};\ z = \frac{k_1}{\sum_{i=1}^{m} x_i}$$

является допустимым в задаче 2. Линейная функция (4) ограничена на множестве допустимых решений. Следовательно, задача 2 имеет оптимальное решение.

Правомерность замены задачи I задачей 2 обуславливается следующими утверждениями.

ЛЕММА I. Если в задаче I существует оптимальный план, то он совпа-

дает с оптимальным планом задачи 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вектор $\bar{x}$ - оптимальный в задаче I, он является допустимым в задаче 2 и, кроме того, вектор (5) удовлетворяет условиям (6)-(8) признака оптимальности. Предположим, что не все условия (I0) выполнены, т.е. существует $u_{i_0} < 0$. Но тогда для соответствующего равенства (6) $(\bar{\alpha}(r_y), \bar{y}) \le 0$. А это возможно в случае, когда некоторые компоненты вектора $\bar{y}$ отрицательны, т.е. можно построить раскрой r_y с большей суммарной оценкой, исключив из него компоненты, соответствующие отрицательным значениям y_j. Следовательно, вектор $\bar{y}$ не удовлетворяет условиям оптимальности задачи I, что противоречит условию леммы. Таким образом, вектор $\bar{x}$ удовлетворяет признаку оптимальности задачи 2, и соответствующий ему вектор $\bar{z}$ является оптимальным в этой задаче.

ЛЕММА 2. Каковы бы ни были исходные данные задачи I, всегда найдется допустимый вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_s, z)$, доставляющий максимум целевой функции (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество векторов $\bar{x}$, удовлетворяющих условиям (2), не является пустым, так как эти ограничения стандартны для задачи раскроя. Ассортиментная же ось (ограничения (3)) проходит через начало координат и пересекает многогранник ограничений (2). Таким образом, допустимое решение существует, а так как целевая функция ограничена сверху, то по теореме существования в задаче I имеется и оптимальное решение.

2.2. Функции генерирования столбцов. Пакет ЛП-ЛГУ - открытая система с таким дроблением на модули, при котором возможно использование метода генерирования столбцов. Для этого требуется заменить модули, реализующие следующие функции.

I. Отыскание улучшающего столбца. Реализует решение задачи построения раскроя:

найти целочисленный вектор $\bar{\alpha}(r_y)$, максимизирующий

$$f(P) = (\bar{\alpha}(r_y), \bar{y}) - u_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

По текущим значениям двойственных переменных и по исходным данным задачи вырабатывается столбец $\bar{\alpha}(r_y)$, на котором возможно нарушение признака оптимальности. Столбец записывается в компактной форме - пакетном представлении столбца. Она

предусматривает хранение информации о способе раскроя в виде цепного списка структур специального вида. Такое хранение позволяет запоминать направление резов и другие характеристики, присущие различным способам раскроя, а также относительно просто создавать раскройные карты.

2. Развертывание пакетного представления столбца в полный вектор. С точки зрения пакетных модулей, способы раскроя - это столбцы матрицы ограничений, первые m компонент которых - количество отрезаемых заготовок, а в последних n указано наименование раскраиваемого материала.

3. Ввод исходной информации. В данном случае, кроме размеров вырезаемых заготовок и размеров материала, вводится ассортиментное отношение.

4. Вывод столбца. При решении задач раскроя важно знать не только компоненты вектора $\bar{x}$, но и структуру раскроя. При решении же задач, учитывающих ассортиментное отношение, необходимо уметь различать раскройные столбцы и столбец, отвечающий ассортиментному отношению.

Таким образом, замена модулей, реализующих перечисленные функции, и модуля построения рекомендованного базиса дает возможность средствами пакета решать задачи массового раскроя и при заданном ассортиментном отношении исходного материала. Гибкость системы позволяет учитывать некоторые технологические ограничения. Просчитаны реальные примеры.

ЛИТЕРАТУРА

1. КАНТОРОВИЧ Л.В., ЗАЛГАЛЛЕР В.А. Рациональный раскрой промышленных материалов. - Новосибирск: Наука, 1971.
2. МУХАЧЕВА Э.А., РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Математическое программирование. - Новосибирск: Наука, 1977.
3. БРЭГМАН Л.М. Пакет программ для решения задач линейного программирования с алгоритмически формируемой матрицей ограничений. - VI Всесоюзн. симпозиум по системам программного обеспечения решения задач оптимального планирования. Краткие тезисы докладов. М.: изд. ЦЭМИ АН СССР, 1980, с.38-39.
4. РОМАНОВСКИЙ И.В. Пакетный вариант симплекс-метода. I. Эволюционное описание основных конструкций. - В кн.: Исследование операций и статистическое моделирование. Л.: Изд-во ЛГУ, 1979, вып. 5, с. 55-71.

Поступила в ред.-изд. отдел
20.05.1984 г.