Выпуск 35(52) ОПТИМИЗАЦИЯ 1985 г.
Выпуклый анализ и смежные вопросы

УДК 517.25/26

ОБ ОДНОМ КОНУСЕ КЛАРКОВСКОГО ТИПА

С.С.Кутателадзе

1°. Цель настоящей работы - уточнить определение конуса второго порядка, рассматриваемого в [1]. Попутно демонстрируется эффективность техники нестандартного анализа в задачах субдифференциального исчисления. В дальнейшем без особых разъяснений используется теория внутренних множеств Нельсона [2].

2°. Рассмотрим топологическое векторное пространство X и расширенную числовую функцию $f: X^2 \to \overline{R}$. Следуя Рокафеллару [3], полагаем

$$\lim_{u \to \bar{u}} \sup \inf_{v \to \bar{v}} f(u,v) :=$$

$$:= \sup_{V \in \mathcal{N}(\bar{v})} \inf_{U \in \mathcal{N}(\bar{u})} \sup_{u \in U} \inf_{v \in V} f(u,v),$$

где, как всегда, $\mathcal{N}(x)$ - фильтр окрестностей x. В обычной гипотезе "стандартности антуража", используя понятие бесконечной близости "$x \approx y \leftrightarrow x - y \in V$ для всякой стандартной окрестности нуля V", дадим удобный признак для $\lim\sup\inf$-конструкции.

3°. ТЕОРЕМА. Пусть f - стандартная функция, $\bar{u}, \bar{v}$ - стандартные точки и t - стандартное число из $\overline{R}$. Неравенство

$$\lim_{u \to \bar{u}} \sup \inf_{v \to \bar{v}} f(u,v) \le t$$

имеет место в том и только в том случае, если для каждого u,

бесконечно близкого к $\bar{u}$, найдется v, бесконечно близкое к $\bar{v}$, такое, что стандартная часть $^{\circ}f(u,v)$ не превосходит t, т.е.

$$(\forall u\approx\bar{u})(\exists v\approx\bar{v})\ {}^{\circ}f(u,v)\leq t.$$

◁ Воспользуемся алгоритмом Нельсона:

$$(\forall u\approx\bar{u})(\exists v\approx\bar{v})\,{}^{\circ}f(u,v)\leq t\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow(\forall u\approx\bar{u})\exists v((\forall^{st}V\in\mathcal{N}(\bar{v}))v\in V)\wedge(\forall^{st}\varepsilon>0)f(u,v)<t+\varepsilon\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow(\forall u\approx\bar{u})(\forall^{st\,fin}\mathcal{E})(\forall^{st\,fin}\mathcal{V})(\exists v)(\forall V\in\mathcal{V})(\forall\varepsilon\in\mathcal{E})$$

$$(\varepsilon>0\wedge v\in V\rightarrow f(u,v)<t+\varepsilon)\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow(\forall^{st}\varepsilon>0)(\forall^{st}V\in\mathcal{N}(\bar{v}))\forall u((\forall^{st}U\in\mathcal{N}(\bar{u}))u\in U)\rightarrow(\exists v\in V)f(u,v)<$$

$$<t+\varepsilon\leftrightarrow(\forall^{st}\varepsilon>0)(\forall^{st}V\in\mathcal{N}(\bar{v}))\forall u(\exists^{st}U\in\mathcal{N}(\bar{u}))u\in U\rightarrow(\exists v\in V)f(u,$$

$$v)<t+\varepsilon\leftrightarrow(\forall^{st}\varepsilon)(\forall^{st}V)(\exists^{st\,fin}\mathcal{U})(\forall u)(\exists U\in\mathcal{U})(u\in U\rightarrow(\exists v\in V)$$

$$f(u,v)<t+\varepsilon)\leftrightarrow(\forall^{st}\varepsilon)(\forall^{st}V)(\exists^{st}U)(\forall u\in U)(\exists v\in V)f(u,v)<t+\varepsilon\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow(\forall\varepsilon>0)(\forall V\in\mathcal{N}(\bar{v}))(\exists U\in\mathcal{N}(\bar{u}))(\forall u\in U)(\exists v\in V)f(u,v)<t+\varepsilon\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow(\forall\varepsilon>0)(\forall V\in\mathcal{N}(\bar{v}))(\exists U\in\mathcal{N}(\bar{u}))\sup_{u\in U}\inf_{v\in V}f(u,v)\leq t+\varepsilon\rightarrow$$

$$\leftrightarrow(\forall\varepsilon>0)(\forall V\in\mathcal{N}(\bar{v}))\inf_{\bar{u}\in\mathcal{N}(\bar{u})}\sup_{u\in U}\inf_{v\in V}f(u,v)\leq t+\varepsilon\rightarrow$$

$$\rightarrow\sup_{V\in\mathcal{N}(\bar{v})}\inf_{U\in\mathcal{N}(\bar{u})}\sup_{u\in U}\inf_{v\in V}f(u,v)\leq t\rightarrow\lim_{u\to\bar{u}}\sup\inf_{v\to\bar{v}}$$

$$\rightarrow\lim_{u\to\bar{u}}\sup\inf_{v\to\bar{v}}f(u,v)\leq t\rightarrow(\forall^{st}V\in\mathcal{N}(\bar{v}))(\forall^{st}\varepsilon>0)(\exists^{st}U\in$$

$$\in\mathcal{N}(\bar{u}))\sup_{u\in U}\inf_{v\in V}f(u,v)<t+\varepsilon\rightarrow(\forall^{st}V\in\mathcal{N}(\bar{v}))(\forall^{st}\varepsilon>0)(\exists^{st}U\in$$

$$\in\mathcal{N}(\bar{u}))\sup_{u\in U}\inf_{v\in V}f(u,v)<t+\varepsilon\rightarrow(\forall^{st}V\in\mathcal{N}(v))(\forall^{st}\varepsilon>$$

$$>0)(\forall u\approx\bar{u})\inf_{v\in V}f(u,v)<t+\varepsilon\rightarrow$$

$$\to (\forall u \approx \bar{u})(\forall^{st} \varepsilon > 0)(\forall^{st} V \in \mathcal{N}(\bar{v}))(\exists v \in V)\, f(u,v) < t + \varepsilon \to$$

$$\to (\forall u \approx \bar{u})(\exists v)(\forall^{st} V \in \mathcal{N}(\bar{v}))\, v \in V \wedge (\forall^{st} \varepsilon > 0)\, f(u,v) < t + \varepsilon \to$$

$$\to (\forall u \approx \bar{u})(\exists v \approx \bar{v})\ {}^{\circ}f(u,v) \le t.$$

Сопоставляя начало и конец проведенной выкладки, убеждаемся в требуемом. ▷

4°. Для расширенной функции f в [I] предложено определение верхней субпроизводной второго порядка в точке $\bar{x}$ по направлениям $\bar{v}, \bar{v}_1, \bar{v}_2$ в следующем виде:

$$f_{\bar{x}}^{\{2\}}(\bar{v}, \bar{v}_1, \bar{v}_2) := \lim_{\substack{(x,\alpha) \to \bar{x} \\ \lambda \downarrow 0,\, \mu \downarrow 0}} \sup \ \inf_{\substack{v \to \bar{v} \\ v_1 \to \bar{v}_1 \\ v_2 \to \bar{v}_2}} O_f^2(x, \alpha, \lambda, \mu, v, v_1, v_2),$$

где, в свою очередь,

$$O_f^2(x, \alpha, \lambda, \mu, v, v_1, v_2) :=$$

$$:= \lambda^{-1}\mu^{-1}(f(x + \lambda v_1 + \mu v_2 + \lambda\mu v) - f(x + \lambda v_1) - f(x + \mu v_2) + \alpha).$$

Здесь $(x,\alpha) \to \bar{x}$ означает сходимость к $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ в индуцированной топологии надграфика f.

5°. Для множества F в X обозначим символом δ_F индикаторную функцию F, т.е. $\delta_F(x) := 0$ при $x \in F$ и $\delta_F(x) := \infty$ при $x \notin F$. Введем множество $Cl^{(2)}(F, \bar{x})(v_1, v_2)$ соотношением:

$$v \in Cl^{(2)}(F, \bar{x})(v_1, v_2) \leftrightarrow (v, v_1, v_2) \in dom\, (\delta_F)_{\bar{x}}^{\{2\}}.$$

6°. ТЕОРЕМА. Справедливо представление:

$$Cl^{(2)}(F, \bar{x})(v_1, v_2) =$$

$$= \bigcap_{\substack{V \in \mathcal{N}(0) \\ V_1 \in \mathcal{N}(v_1) \\ V_1 \in \mathcal{N}(v_2)}} \ \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{N}(\bar{x}) \\ \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 > 0}} \ \bigcap_{\substack{x' \in F \cap U \\ 0 < \lambda' \le \lambda_1 \\ 0 < \lambda'' \le \lambda_2}} \ \bigcup_{\substack{v' \in \frac{F - x'}{\lambda'} \cap V_1 \\ v'' \in \frac{F - x'}{\lambda''} \cap V_2}} \left(\frac{F - x' - \lambda' v' - \lambda'' v''}{\lambda' \lambda''} + V \right).$$

◁ В силу принципа переноса достаточно разобрать случай стандартных параметров. Привлекая теорему 3°, видим

$$v \in Cl^{(2)}(F,\bar{x})(v_1, v_2) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\forall x' \approx \bar{x}, x' \in F)(\forall \lambda' \approx 0, \lambda'' \approx 0, \lambda' > 0, \lambda'' > 0)(\exists v_1' \approx v_1)(\exists v_2' \approx v_2)(\exists v' \approx v)$$

$$x' + \lambda' v_1' \in F \wedge x' + \lambda'' v_2' \in F \wedge x' + \lambda' v_1' + \lambda'' v_2' + \lambda' \lambda'' v' \in F$$

Обозначим через A множество, стоящее в правой части доказываемого равенства. Сначала возьмем $v \in Cl^{(2)}(F,\bar{x})(v_1, v_2)$ и стандартные окрестности $V \in \mathcal{N}(0)$, $V_1 \in \mathcal{N}(v_1)$ и $V_2 \in \mathcal{N}(v_2)$. Для бесконечно малых строго положительных λ_1 и λ_2 и бесконечно малой внутренней окрестности U точки $\bar{x}$ при любых $x' \in F \cap U$ и $0 < \lambda' \leq \lambda_1$, $0 < \lambda'' \leq \lambda_2$ для некоторых $v_1' \approx v_1$, $v_2'' \approx v_2$, и $v' \approx v$ будет верно: $x' + \lambda' v_1' \in F$, $x' + \lambda'' v_2' \in F$ и $x' + \lambda' v_1' + \lambda'' v_2' + \lambda' \lambda'' v' \in F$. Иными словами, найдутся $v_1' \in (F - x')/\lambda' \cap V_1$; $v_2' \in (F - x')/\lambda'' \cap V_2$ и $v' \in v + V$ с нужными свойствами. Учитывая стандартность параметров, заключаем, что $v \in A$.

Пусть теперь заранее известно, что $v \in A$. Вновь возьмем произвольные стандартные окрестности $V \in \mathcal{N}(0)$, $V_1 \in \mathcal{N}(v_1)$ и $V_2 \in \mathcal{N}(v_2)$. В силу принципа переноса имеются стандартные окрестность $U \in \mathcal{N}(\bar{x})$ и числа $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ такие, что для всех $x' \in F \cap U$ и $0 < \lambda' \leq \lambda_1$; $0 < \lambda'' \leq \lambda_2$ при некоторых $v_1' \in (F - x')/\lambda' \cap V_1$; $v_2' \in (F - x')/\lambda'' \cap V_2$ и $v' \in v + V$ будет $x' + x' v_1' + \lambda'' v_2' + \lambda' \lambda'' v' \in F$. Учитывая, что при $x' \approx \bar{x}$ будет $x' \in U$ и апеллируя к свойствам бесконечно малых чисел и принципу идеализации, выводим $v \in Cl^{(2)}(F,\bar{x})(v_1, v_2)$. Тем самым доказательство закончено. ▷

7°. ТЕОРЕМА. Справедливы утверждения.

(1) Если $Cl^{(2)}(F,\bar{x})(v_1, v_2) \neq \varnothing$, то v_1 и v_2 лежат в конусе Кларка $Cl(F,\bar{x})$.

(2) Если $v_1, v_2 \in Ha(F,\bar{x})$, где $Ha(F,\bar{x})$ – конус Адамара (конус гиперкасательных направлений), то $Cl^{(2)}(F,\bar{x})(v_1, v_2)$ – это выпуклый замкнутый конус.

◁ Утверждение (1) станет очевидным, если вспомнить, что в случае стандартных параметров

$$h \in Cl(F,\bar{x}) \leftrightarrow (\forall x' \approx \bar{x}, x' \in F)(\forall \alpha > 0, \alpha \approx 0)(\exists h' \approx h)\, x' + \alpha h' \in F.$$

Пусть теперь $u_1, u_2 \in Ha(F, \bar{x})$. Не нарушая общности, будем работать в "стандартном антураже". Тогда

$$v_1 \in Ha(F,\bar{x}) \leftrightarrow (\forall x' \approx \bar{x}, x' \in F)(\forall \alpha > 0, \alpha \approx 0)(\forall v_1' \approx v_1)\, x' + \alpha v_1' \in F;$$

$$v_2 \in Ha(F,\bar{x}) \leftrightarrow (\forall x' \approx \bar{x}, x' \in F)(\forall \alpha > 0, \alpha \approx 0)(\forall v_2' \approx v_2)\, x' + \alpha v_2' \in F.$$

Допустим теперь, что $u_1, u_2 \in Cl^{(2)}(F,\bar{x})(v_1, v_2)$. Привлекая теорему 6°, можем записать сначала

$$(\forall x' \approx \bar{x}, x' \in F)(\forall \lambda' > 0, \lambda' \approx 0)(\forall \lambda'' > 0, \lambda'' \approx 0)(\exists v_1' \approx v_1)(\exists v_2' \approx v_2)(\exists u' \approx u_1)$$

$$x'' = x' + \lambda' v_1' + \lambda'' v_2' + \lambda' \lambda'' u' \in F.$$

В силу свойств векторной топологии и её монады ясно, что $x'' \approx \approx \bar{x}$. Вновь апеллируя к теореме 6°, находим $v_1'' \approx v_1; v_2'' \approx v_2$ и $u'' \approx u_2$, для которых $x'' + \lambda' v_1'' + \lambda'' v_2'' + \lambda' \lambda'' u'' \in F$. Полагаем теперь $v' := v_1' + v_2''; v'' := v_2' + v_2''$ и $u := u' + u''$. Нет сомнений, что $v' \approx v_1$; $v'' \approx v_2$; $u \approx u_1 + u_2$ и при этом $x' + \lambda' v' \in F$; $x' + \lambda'' v'' \in F$ в силу того, что v_1, v_2 – гиперкасательные направления. Кроме того,

$$x' + \lambda' v' + \lambda'' v'' + \lambda' \lambda'' u = x' + \lambda' v_1' + \lambda' v_2' + \lambda'' v_2' + \lambda'' v_2'' + \lambda' \lambda'' u' + \lambda' \lambda'' u'' =$$

$$= (x' + \lambda' v_2' + \lambda'' v_2' + \lambda' \lambda'' u') + \lambda' v_2' + \lambda'' v_2'' + \lambda' \lambda'' u'' = x' + \lambda' v_1' + \lambda'' v_2' + \lambda' \lambda'' u'' \in F.$$

Следовательно, $u_1 + u_2 \in Cl^{(2)}(F,\bar{x})(v_1, v_2)$. Однородность же последнего множества бесспорна.

Для доказательства замкнутости возьмем $u_0 \in cl\, Cl^{(2)}(F,\bar{x})(v_1, v_2)$ и стандартные окрестности $V, V_1, V_2 \in \mathcal{N}(0)$, для которых $V_1 + V_2 \subset V$. Найдется стандартный $u \in Cl^{(2)}(F,\bar{x})(v_1, v_2)$ такой, что $u - u_0 \in V_1$. Кроме того, ввиду теоремы 6° для $x' \approx \bar{x}$, $x' \in F; \lambda' \approx 0, \lambda' > 0; \lambda'' \approx 0, \lambda'' > 0$ имеются $u' \in u + V_2$ и $v' \in v_1 + W_1$, $v'' \in W_2 + v_2$ для наперед заданных стандартных $W_1, W_2 \in \mathcal{N}(0)$, удовлетворяющие соотношениям $x' + \lambda' v' \in F$, $x_1 + \lambda'' v'' \in F$ и $x' + \lambda' v' + \lambda'' v'' + \lambda' \lambda'' u' \in F$. Ясно, что при этом будет $u' \in u + V_2 \subset u_0 + V_1 + V_2 \subset u_0 + V$. Применяя принцип идеализации, находим $v' \approx v_1, v'' \approx v_2$ и $u_0' \approx u_0$ такие, что $x' + \lambda' v' \in F$, $x' + \lambda'' v'' \in F$ и $x' + \lambda' v' + \lambda'' v'' + \lambda' \lambda'' u_0' \in F$. Это означает, что $u_0 \in Cl^{(2)}(F,\bar{x})(v_1, v_2)$. $\triangleright$

ЛИТЕРАТУРА

I. БЕДЕЛЬБАЕВ А.А. Некоторые вопросы субдифференциального анализа и их приложения: Автореферат дис. на соиск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук. - Алма-Ата, 1984, Институт математики и механики АН КазССР.

2. NELSON E. Internal set theory. - Bull. Amer. Math. Soc., 1977, v.83, N 6, p.1165-1198.

3. Rockafellar R.T. Generalized directional derivatives and subgradients of nonconvex functions. - Canad. J. Math., 1980, v.30, N2, p.257-280.

Поступила в ред.-изд. отдел
23.II.84 г.