УДК 517.88+517.11

МИКРОПРЕДЕЛЫ, МИКРОСУММЫ И ТЕПЛИЦЕВЫ МАТРИЦЫ

С.С.Кутателадзе

1°. Цель настоящей заметки - привлечь внимание к некоторым дополнительным возможностям, которые предоставляет нестандартный анализ для исследования дискретных совокупностей с большим числом членов. Эти возможности разъясняются в связи с вариантом классической теоремы Сильвермана - Теплица о регулярных методах суммирования. В идейном плане соответствующий результат примыкает к работе А.Робинсона [1]. С технической точки зрения в дальнейшем используется "неоклассическая установка", выдвинутая, по существу, Э.Нельсоном [2]. В силу этой установки стандартные и нестандартные объекты встречаются среди самых обычных множеств. Формальнее говоря, математический мир отождествляется с универсумом внутренних множеств, реализованным в рамках достаточно сильной теории внешних множеств. Для нас с лихвой пригодны схемы К.Хрбачека [3] или Т.Каваи [4]. (Различия соответствующих теорий ниже несущественны.) Простоты и наглядности ради мы разбираем элементарные, близкие к "фольклору" формы обсуждаемых конструкций, ограничиваясь вещественными числами и поисками пределов и сумм их наборов. Усложненные обобщения, например на K-пространства, сознательно не приводятся. Дело в том, что главная задача заметки - уточнение и демонстрация обоснованности широко применяемого при построении физических и экономических моделей "метода задания горизонта". Названный прием работы с трудно обозримыми конечными множествами состоит в априорном или апостериорном указании "горизонта", "порога" -

актуального бесконечно большого числа или соответствующей бесконечно малой точности. После выбора горизонта изучение исходной последовательности данных, нахождение характерных для нее предельных числовых параметров ведется с помощью анализа членов, находящихся в доступной области у фиксированного порога. Иначе говоря, в расчет принимаются только практически доступные удаленные элементы, "ушедшие за горизонт" члены игнорируются. Таким образом, удается обойтись без просматривания всех элементов "с любыми мыслимыми бесконечными номерами".

2^0. Пусть $\mathcal{F}$ – стандартный фильтр в стандартном множестве X ,а $\mathcal{Y}$ – стандартный фильтр в стандартном множестве Y . Пусть, далее, $\mu(\mathcal{F}) := \cap\{F\in\mathcal{F} : F\in {}^\circ\mathcal{F}\}$ и $\mu(\mathcal{Y}) := \cap\{G\in\mathcal{Y} : G\in {}^\circ\mathcal{Y}\}$ – монады названных фильтров (как обычно, ${}^\circ A$ – внешнее множество, образованное стандартными элементами A). Рассмотрим стандартное соответствие $f\subset X\times Y$. При этом предположим, что $\operatorname{dom} f\cap F\neq\varnothing$ для каждого $F\in\mathcal{F}$. Символом $f(\mathcal{F})$ обозначим фильтр с базисом $\{f(F) : F\in\mathcal{F}\}$ – образ $\mathcal{F}$ при соответствии f. Множество $F\in\mathcal{F}$ называют бесконечно малым или, точнее, удаленным элементом фильтра $\mathcal{F}$, если $\mu(\mathcal{F})\supset F$. При этом пишут $F\in {}^a\mathcal{F}$

3^0. ЛЕММА О ЗАДАННОМ ГОРИЗОНТЕ. Пусть $\mu(\mathcal{F})\cap {}^\circ X=\varnothing$ и $F_0\in {}^a\mathcal{F}$ ("заданный горизонт"). Следующие утверждения равносильны:

(1) $f(\mu(\mathcal{F}))\subset\mu(\mathcal{Y})$;

(2) $(\forall F\in {}^a\mathcal{F})\ f(F\setminus F_0)\subset\mu(\mathcal{Y})$;

(3) $f(\mathcal{F})\supset\mathcal{Y}$.

◁ Эквивалентность (1)$\leftrightarrow$(3) – обычный факт нестандартного анализа. Импликация (1)$\to$(2) очевидна. Поэтому необходимо удостовериться только, что (2)$\to$(3).

Пусть $G\in {}^\circ\mathcal{Y}$. Предположим, что для каждого стандартного F из ${}^\circ\mathcal{F}$ найдется $x\in F\setminus F_0$ такой, что $f(x)\notin G$. Тогда в силу принципа идеализации имеется $x'\in\mu(\mathcal{F})$, для которого $x'\in F_0$ и $f(x')\notin G$. Рассмотрим внутреннее множество $F :=$ $:= F_0\cup\{x'\}$. Ясно, что $F'\in {}^a\mathcal{F}$. Значит, получилось противоречие с условием. Следовательно, для некоторого $F\in {}^\circ\mathcal{F}$ будет $f(F\setminus F_0)\subset G$. Так как известно, что в F_0 нет стандартных элементов F , то

$$(\forall G\in {}^\circ\mathcal{Y})(\exists F\in {}^\circ\mathcal{F})(\forall x\in {}^\circ F)\ f(x)\in G.$$

Применяя принцип переноса (учитывая стандартность параметров), выводим: $\not{f}(\mathcal{F})\supset\mathcal{Y}$.▷

4°. Приведенное утверждение является, строже говоря, некоторой формой принципа Коши [5] и допускает разнообразные обобщения. Мы отметим только известные конкретизации и упрощения леммы 3° для интересующих нас случаев, связанных с вычислениями пределов и сумм дискретных совокупностей (см.[6]). Подчеркнем в то же время, что указанная выше возможность введения порога точности снизу или сверху очевидно имеет значительно более широкие сферы применимости.

5°. Пусть $a[N]:=(a_1,\ldots,a_N)$ - конечная последователь - ность-вектор из $\mathbb{R}^N$. Будем считать, что N бесконечно велико: $N\approx+\infty$, т.е. $N\in\mathbb{N}\setminus{}^{\circ}\mathbb{N}$. Предположим также, что $a_k\in{}^{\approx}\mathbb{R}$ для $k:=1,\ldots,N$, т.е. a_k - конечные вещественные числа (здесь ${}^{\approx}\mathbb{R}:=\{x\in\mathbb{R}:(\exists t\in{}^{\circ}\mathbb{R})\,|x|\leq t\}$). Стандартное число a называют микропределом вектора $a[N]$ и пишут $a={}^{\approx}\lim a[N]$ или, реже, $a=S\text{-}\lim\limits_{n\leq N} a_n$, если для всех бесконечных номеров M, меньших N, будет $a_M\approx a$ (т.е. величина a_M-a бесконечно мала - лежит в монаде $\mu(\mathbb{R})$ фильтра окрестностей нуля обычной топологии $\mathbb{R}$). Отметим, что иногда (проявляя в некотором смысле бóльшую принципиальность) под микропределом $a[N]$ понимают любое число, бесконечно близкое к a, т.е. лежащее в монаде $\mu(a):=a+\mu(\mathbb{R})$. Стандартное число a называют микросуммой $a[N]$ и пишут $a={}^{\approx}\sum a[N]$, если a - это микропредел последовательности $S[N]:=(S_1,\ldots,S_N)$ частных сумм $a[N]$.

6°. Пусть N - произвольное бесконечно большое число и $(a_n):\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ - стандартная (счётная) последовательность. Пусть, далее, $a\in{}^{\circ}\mathbb{R}$. Справедливы утверждения:

(1) число a - микропредел $a[N]$ тогда и только тогда, когда $a=\lim a_n$.

(2) выполнено $a={}^{\approx}\sum a[N]$ тогда и только тогда, когда $a=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

◁ Нужные утверждения - частные случаи леммы о заданном горизонте.▷

7°. Если у вектора $a[N]$ имеется микропредел, то его ∞-норма конечна, т.е. $\sup\{|a_k|:k:=1,\ldots,N\}\in{}^{\approx}\mathbb{R}$.

◁ Пусть $a:={}^{\approx}\lim a[N]$. Тогда для $M\approx+\infty, M\leq N$ будет $|a_M|\leq\leq|a|+1$. Значит, то же неравенство имеет место, начиная с не-

которого стандартного m. Осталось заметить, что числа $a_1,\dots,a_m$ конечны по условию. $\rhd$

8°. Микропредел инвариантен, т.е. если для $a[N]$ вектор $'a[N]$ определен соотношением $'a[N]:=(a_2,a_3,\dots,a_{N-1},a_N,a_N)$, то $a[N]$ и $'a[N]$ имеют микропределы одновременно (и притом обязательно равные).

$\lhd$ Очевидно. $\rhd$

9°. Ясно, что можно развивать теорию микропределов или микросуммирования, обобщающую обычный вариант, трактующий пределы и ряды. Мы не будем на этом останавливаться, а перейдем к изучению "продолжений" понятия микропредела на все последовательности.

10°. Пусть $f[N]:=(f_1,\dots,f_N)$ - элемент $\mathbb{R}^N$. Возьмем $a[N]\in\mathbb{R}^N$ и положим $f[N]a[N]:=\sum_{n=1}^{N} f_n a_n$.

(1) Если величина $\sum_{n=1}^{N}|f_n|$, т.е. 1-норма вектора $f[N]$, конечна, то для всякого вектора $a[N]$ с конечной ∞-нормой будет $f[N]a[N]\in{}^{\approx}\mathbb{R}$.

(2) Если для каждого вектора $a[N]$, имеющего микропредел, верно $f[N]a[N]\in{}^{\approx}\mathbb{R}$, то 1-норма $f[N]$ конечна.

$\lhd$ (1) Справедливы оценки:

$$|f[N]a[N]|\le\sum_{n=1}^{N}|f_n||a_n|\le\Big(\sum_{n=1}^{N}|f_n|\Big)\sup\{|a_n|:n=1,\dots,N\}.$$

(2) Пусть ε - произвольное бесконечно малое число. Ясно, что вектор $a[N]$ с компонентами $a_n:=(\operatorname{sign} f_n)\varepsilon$ имеет микропредел. Иными словами, выполнено

$$\varepsilon\sum_{n=1}^{N}|f_n|=\sum_{n=1}^{N}f_n a_n\in{}^{\approx}\mathbb{R}.$$

Тем самым $\sum_{n=1}^{N}|f_n|\in{}^{\approx}\mathbb{R}$ в силу условий на ε. $\rhd$

11°. Для того чтобы для всякого $a[N]$ с микропределом a выполнялось $f[N]a[N]\approx a$, необходимо и достаточно, чтобы

(1) $f_n\approx 0$ для всех стандартных n;

(2) $\sum_{n=1}^{N}f_n\approx 1$;

(3) $\sum_{n=1}^{N}|f_n|\in{}^{\approx}\mathbb{R}$.

◁ Установим сначала необходимость приведенных условий. Если $f[N]$ применить к стандартному базисному орту с номером n, имеющему микропределом нуль, можно видеть, что f_n бесконечно мало. Если же применить $f[N]$ к вектору $a[N]$ с единичными компонентами, то получается (2). Остается привлечь 10°.

При проверке достаточности, учитывая, что микропредел суммы есть сумма микропределов, и опираясь на (2), ибо $\sum_{n=1}^{N} f_n = f[N]1[N]$, разбираем лишь случай нулевых микропределов. Итак, пусть $\approx \lim a[N]$. Для всех стандартных n будет $f_n a_n \approx 0$ и, значит, для "начальных" скалярных произведений $f[n]a[n] \approx 0$. Отсюда по принципу продолжения [7] для некоторого бесконечно большого M, которое можно считать меньшим N, будет $f[M]a[M] \approx 0$. Следовательно,

$$f[N]a[N] = f[M]a[M] + f[N\setminus M]a[N\setminus M] \approx f[N\setminus M]a[N\setminus M].$$

Для всякого стандартного $\varepsilon > 0$ выполнено $|a_n| \leq \varepsilon$ при $M \leq n \leq N$ по определению микропредела. Отсюда

$$|f[N\setminus M]a[N\setminus M]| = \Big|\sum_{n=M}^{N} f_n a_n\Big| \leq \varepsilon \sum_{n=1}^{N} |f_n|.$$

Используя конечность 1-нормы $f[N]$, выводим, что $f[N\setminus M]a[N\setminus M]$ бесконечно мало. ▷

12°. Пусть $f[N]$ – вектор с конечной 1-нормой и такой, что

(1) $f_n \approx 0$ для $n \in {}^{\circ}N$;

(2) $\sum_{n=1}^{N} f_n \approx 1$;

(3) $\sum_{n=1}^{N-1} |f_{n+1} - f_n| \approx 0.$

Тогда $f[N]$ определяет "инвариантный банахов микропредел":

$$f[N]a[N] \approx f[N]\,'a[N]$$

для всякого $a[N]$ с конечной ∞-нормой.

◁ По элементарным соображениям получаем

$$|f[N]a[N] - f[N]\,'a[N]| =$$

$$= |(f_1a_1 + f_2a_2 + \ldots + f_{N-1}a_{N-1} + f_Na_N) -$$

$$-(f_1a_2 + f_2a_3 + \ldots + f_{N-1}a_N + f_Na_N)| =$$

$$=|f_1a_1+(f_2-f_1)a_2+\dots+(f_N-f_{N-1})a_N|\le|f_1a_1|+\sum_{n=1}^{N-1}|f_{n+1}-f_n|\sup_{1\le k\le N}|a_k|.$$

Учитывая, что $f_1a_1\approx 0$ и $\sup\{|a_n|:n:=1,\dots,N\}\in{}^{e}R$ выводим: $f[N]a[N]-f[N]\dot{a}[N]\approx 0.$

13°. Предположения 11° и 12° по сути дела являются модификациями теоремы 3.1 и соответственно 3.6 из [1]. Если "релятивизовать" приведенные утверждения на стандартные пространства ограниченных и сходящихся последовательностей, то мы придем к обычным характеристикам продолжений предела в формах, найденных А.Робинсоном. Отличие вышеизложенных вариантов во введении априорного горизонта - порога N. Все построения, проверки и т.п. следует проводить только для бесконечно больших номеров -"около N"; рассматривать бо́льшие бесконечности, чем заданный порог - "бесконечности, лежащие за горизонтом" - не нужно. Таков содержательный смысл доказанного.

14°. Пусть T - линейный оператор, действующий из пространства $\mathbb{R}^N$ в пространство $\mathbb{R}^M$, причем N и M - некоторые бесконечно большие натуральные числа. Говорят, что оператор T сохраняет микропределы или, короче, микроустойчив, если каждый вектор, имеющий микропредел, T переводит в вектор, имеющий тот же самый микропредел. Иными словами, обозначив $t[M,N]$ матрицу оператора T, условие его микроустойчивости можно переписать в виде:

$$\approx\!\lim a[N]=a\ \to\ \approx\!\lim t[M,N]a[N]=a.$$

Поскольку векторы, у которых есть микропредел, автоматически обладают конечной ∞-нормой, прежде, чем описывать микроустойчивые операторы, разберемся с операторами, сохраняющими "конечные галактики" - зоны векторов с конечной ∞-нормой.

15°. Для того чтобы оператор T с матрицей $t[M,N]$ переводил каждый вектор из $\mathbb{R}^N$ с конечной ∞-нормой в вектор из $\mathbb{R}^M$ с конечной ∞-нормой, необходимо и достаточно, чтобы операторная норма T была конечной, т.е. чтобы для некоторого конечного C и при всех $m:=1,\dots,M$ выполнялось:

$$\sum_{n=1}^{N}|t[m,n]|\le C.$$

◁ Достаточность рассматриваемого условия очевидна. Для проверки необходимости нужно заметить, что в качестве C можно взять $\|T\|$. Действительно, в силу компактности в $\mathbb{R}^N$

сферы $\{\|x\|_\infty=1\}$, где $\|x\|_\infty:=\sup\{|x_n|:n:=1,\dots,N\}$, найдется точка x_0 этой сферы, для которой $\|T\|=\sup\{\|Tx\|_\infty:\|x\|_\infty=1\}=\|Tx_0\|$. Иначе говоря, вектор Tx_0 имеет конечную ∞-норму, а потому $\|T\|\in{}^{\approx}R$. Осталось обратить внимание на то, что $\|T\|=\sup\{\sum_{n=1}^{N}|t[m,n]|:m:=1,2,\dots,M\}$. ▷

16°. Определяемый матрицей $t[M,N]$ оператор является микроустойчивым в том и только в том случае, если

(1) $t[m,n]\approx 0$ при $n\in{}^{\circ}N$ и $\sum_{n=1}^{N}t[m,n]\approx 1$ для всякого бесконечно большого m такого, что $m\leq M$;

(2) для некоторого конечного C и и при всех $m:=1,\dots,M$ верно

$$\sum_{n=1}^{N}|t[m,n]|\leq C.$$

◁ Пусть рассматриваемый оператор T микроустойчив. Тогда, учитывая, что $\|T\|=\sup\{\sum_{n=1}^{N}|t[m,n]|:m:=1,\dots,M\}=\sum_{n=1}^{N}|t[m_0,n]|$ для некоторого m_0, и вспоминая, что по условию $t[m_0,N]a[N]\in{}^{*}R$ для всякого $a[N]\in R^N$, имеющего микропредел, в силу 10° выводим, что 1-норма $t[m_0,N]$ конечна, т.е. (2). Заметим также, что вектор $t[m,N]\in R^N$ удовлетворяет соотношению $t[m,N]a[N]\approx a$ при всех $m\approx+\infty$, $m\leq M$, как только $a={}^{\approx}\lim a[N]$ по условию. Остается привлечь 11°. Оставшиеся утверждения проверяются еще проще с помощью апелляции к 15° и 11°. ▷

17°. Приведенные утверждения можно рассматривать как новые формы или как обобщения теоремы Сильвермана - Теплица [8]. В самом деле, подвергая стандартизации действие микроустойчивых матриц на стандартные последовательности и вспоминая 6°, мы приходим к классическим суммирующим матрицам.

18°. Для уточнения сказанного приведем известные характеристики (ср.[6]) микропределов и микросумм, "подтверждающие" скептическое мнение тех, кто уверен в принципиальном отсутствии самой возможности каких-либо новых концепций сходимости. Именно, для вектора $a[N]$ из ${}^{\approx}R^N$ обозначим символом ${}^{*}a$ счетную последовательность ${}^{*}a:N\to R$, являющуюся стандартизацией "начального участка" $a[N]$. Точнее говоря,

$${}^{*}a:={}^{*}\{(n,{}^{\circ}a_n):n\in{}^{\circ}N\}.$$

Здесь ${}^{\circ}t$ - стандартная часть конечного числа t, т.е. единственное стандартное число в монаде $\mu(t)$. Символ ${}^{*}A$ обозна-

чает стандартизацию внешнего множества A , т.е. единственное стандартное множество, обладающее в точности тем же запасом стандартных элементов, что и A . Как обычно, символом ${}^*a[N]$ обозначим отрезок $({}^*a_1, \ldots, {}^*a_N)$ последовательности ${}^*a$.

19°. Пусть $a[N]$ имеет микропредел a. Тогда стандартизация ${}^*a$ сходится к a , т.е. $\lim {}^*a_n = a$.

◁ Ясно, что ${}^*a_n \approx a_n$ для всех $n \in {}^\circ N$. Значит, найдется бесконечно большое $N' \leq N$, для которого ${}^*a(n) \approx a(n)$ для $n \leq N'$. Раз у $a[N]$ есть микропредел, то микропредел имеется у ${}^*a[N']$. Остается апеллировать к 8°. ▷

20°. Если $a = {}^{\approx}\sum a[N]$, то $a = \sum_{n=1}^{\infty} {}^*a_n$.

◁ Для всех стандартных n будет

$$ {}^*(a_1 + \cdots + a_n) = {}^\circ(a_1 + \cdots + a_n) = {}^\circ a_1 + \cdots + {}^\circ a_n = {}^*a_1 + \cdots + {}^*a_n . $$

Таким образом, стандартизация последовательности частных сумм и частные суммы стандартизации исходного вектора совпадают на некотором интервале целых чисел от единицы до N' , где $N' \approx +\infty$, $N' \leq N$. После этого замечания можно сослаться на 19°. ▷

ЛИТЕРАТУРА

1. ROBINSON A. Generalized limits and linear functionals. - Pacif. J. Math., 1964, v.14, N1, p.269-283.
2. Nelson E. Internal set theory. - Bull. Amer. Math. Soc., 1977, v.83, N6, p.1165-1198.
3. Hrbacek K. Axiomatic foundation for non-standard analysis.- Fund. Math., 1978, v.48, N1, p.1-19.
4. Kawai T. Axiom systems of non-standard set theory.- In: Logic Symposia. Hakone, 1979-1980. Lecture Notes in Math., N 891. B.-H.-N.Y.: Springer, 1981, p.57-65.
5. СТРОЯН К.Д. Инфинитезимальный анализ кривых и поверхностей.- В кн.: Справочная книга по математической логике. Ч.I. Теория моделей. М.: Наука, 1982, с.199-234.
6. LUTZ R., GOZE M. Nonstandard analysis. Lecture Notes in Math., N 881. B.-H.-N.Y.: Springer, 1981.
7. ДЕВИС М. Прикладной нестандартный анализ.- М.: Мир, 1980.
8. КУК Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. - М.: ГИФМЛ, 1960.

Поступила в ред.-изд. отдел
23.II.1984 г.