Выпуск 35(52) ОПТИМИЗАЦИЯ 1985 г.
Выпуклый анализ и смежные вопросы

УДК 519.233.3

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ОДНОГО КРИТЕРИЯ, СВЯЗАННОГО СО СЛУЧАЙНЫМ РАЗБИЕНИЕМ ИНТЕРВАЛА

Э.О.Рапопорт

При построении критериев согласия обычно рассматриваются различные расстояния между гипотетической функцией распределения F и выборочной функцией, определенной для упорядоченной выборки $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ по формуле

$$S(x)=\begin{cases} 0 & , x<x_1; \\ \frac{i-1}{n} & , x\in[x_i, x_{i+1}),\ i=\overline{1,n-1}; \\ 1 & , x\geqslant x_n. \end{cases}$$

В [1] вместо S предлагалось использовать кусочно-постоянную функцию, связанную с гипотетическим распределением. В качестве таковой рассматривалась функция

$$S_F(x)=\begin{cases} 0 & , x<x_1; \\ 1/2(F(x_i)+F(x_{i+1})), & x\in[x_i,x_{i+1}),\ i=\overline{1,n-1}; \\ 1 & , x\geq x_n, \end{cases}$$

наилучшим в некотором смысле образом приближающая F в классе кусочно-постоянных функций со скачками в точках выборки.

Такой подход привел к рассмотрению величины

$$a_1^p+(a_2-a_1)^p+\ldots+(a_n-a_{n-1})^p+(1-a_n)^p,$$

где $(a_1, a_2, \ldots, a_n)(0\leq a_1\leq \ldots \leq a_n\leq 1)$ – равномерная порядковая статистика. Эта величина , как оказалось, ранее уже рассматривалась (см., например, [2-4]). В настоящей заметке исследуются некоторые ее асимптотические свойства.

Пусть имеются независимые одинаково распределенные случай-

ные величины $b_1, b_2, \dots, b_n$ с кусочно непрерывно дифференцируемой функцией распределения $h \in C([0,1])$. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($a_i \le a_{i+1}$, $i=1, n-1$) – упорядочение величин $b_1, b_2, \dots, b_n$; $p>0$;

$$\rho_{p,n} = a_1^p + (a_2-a_1)^p + \dots + (a_n-a_{n-1})^p + (1-a_n)^p.$$

Л.Вейс [4] доказал следующие асимптотические свойства $\rho_{p,n}$.

ТЕОРЕМА I. Если $p>1$ и существуют такие константы A и B, что $0<A<h'<B<\infty$, то случайная величина

$$\xi_n = n^{p-1}\rho_{p,n} - \Gamma(p+1)\int_0^1 (h'(x))^{1-p}dx$$

распределена асимптотически нормально со средним 0 и дисперсией

$$\bar\sigma^2 = n^{-1}\Big([\Gamma(2p+1) - 2p\Gamma^2(p+1)]\int_0^1 (h'(x))^{1-2p}dx - [(p-1)\Gamma(p+1)\int_0^1 (h'(x))^{1-p}dx]^2\Big).$$

Отметим, что условиям теоремы I не удовлетворяет важный класс функций распределения $h(x)=x^s, s>0$. В [I] для таких функций доказана следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть $p>0$ и $s+p-ps>0$. Тогда случайная величина ξ_n сходится по вероятности к 0.

Уменьшив область допустимых значений параметров p и s, можно доказать утверждение, аналогичное теореме I.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $p>0$ и $s+2p-2ps>0$. Тогда случайная величина $\sqrt{n}\cdot\xi_n$ распределена асимптотически нормально со средним 0 и дисперсией

$$\sigma^2 = \frac{\Gamma(2p+1)(s+p-ps)^2 + \Gamma^2(p+1)(2p(s-1)(p^2+s) - s^2(p^2+1))}{s^{2p-1}(s+p-ps)^2(s+2p-2ps)}. \quad (I)$$

Предварительно докажем вспомогательное утверждение.

ЛЕММА I. Пусть даны две последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$, удовлетворяющие условиям

$$\alpha_n>0;\ \alpha_n\to 0;\ \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty;\ \beta_n/\alpha_n \to a\in R.$$

Тогда для последовательности $\{c_n\}$ такой, что

$$c_n=(1-\alpha_n)c_{n-1}+\beta_n,$$

и м е е м

$$\lim_{n\to\infty} c_n=a.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $c_n-c_{n-1}=-\alpha_n c_{n-1}+\beta_n$, то при $c_{n-1}\leqslant\beta_n/\alpha_n$ получаем, что $c_n\geqslant c_{n-1}$, а при $c_{n-1}>\beta_n/\alpha_n$ справедливо $c_n<c_{n-1}$. Предположим сначала, что для всех n, больших некоторого n_0, последовательность $\{c_n\}$ монотонная. Не ограничивая общности, можно считать, что для всех n, больших n_0, $c_{n-1}>\beta_n/\alpha_n$ и последовательность $\{c_n\}$ монотонно убывающая, ограниченная. Покажем, что она сходится к a. Положим $\gamma_n=c_n-a$. Ясно, что последовательность γ_n монотонно убывающая, причем для всех n, больших n_0, $\gamma_n>0$. Предположим, что $\lim\gamma_n=c>0$. Возьмем некоторое ε из промежутка $(0,c)$. Тогда существует такой номер k, что для всех натуральных p выполняются неравенства

$$c+\varepsilon/2>\gamma_{k+p}>c-\varepsilon/2>0,$$

$$\varepsilon/2>a-\beta_{k+p}/\alpha_{k+p}>-\varepsilon/2.$$

Для γ_{k+s}, $s=\overline{1,r}$, справедливы рекуррентные соотношения

$$\gamma_{k+1}=\gamma_k-\alpha_{k+1}\gamma_k-\alpha_{k+1}(a-\beta_{k+1}/\alpha_{k+1});$$

$$\gamma_{k+2}=\gamma_{k+1}-\alpha_{k+2}\gamma_{k+1}-\alpha_{k+2}(a-\beta_{k+2}/\alpha_{k+2});$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\gamma_{k+r}=\gamma_{k+r-1}-\alpha_{k+r}\gamma_{k+r-1}-\alpha_{k+r}(a-\beta_{k+r}/\alpha_{k+r}).$$

Сложив эти равенства, получим

$$\gamma_{k+r}=\gamma_k-\sum_{s=1}^{r}\alpha_{k+s}(\gamma_{k+s+1}+a-\beta_{k+s}/\alpha_{k+s}).$$

Но для каждого s справедливо неравенство

$$\gamma_{k+s-1}+a-\beta_{k+s}/\alpha_{k+s}>c-\varepsilon>0.$$

Поскольку $\alpha_{k+s}>0$, то

$$\gamma_{k+r}<\gamma_k-(c-\varepsilon)\sum_{s=1}^{r}\alpha_{k+s}.$$

Устремляя в этом неравенстве r к ∞, получим, что $\gamma_{k+r}\to-\infty$. Таким образом, предположение о положительности c неверно и,

следовательно, $c = 0$.

Пусть теперь неверно предположение о монотонности последовательности $\{c_n\}$. Тогда найдется такая монотонно возрастающая последовательность индексов $(n_1, n_2, \dots, n_\ell, \dots)$, что внутри каждого интервала (n_i, n_{i+1}) последовательность $\{c_n\}$ монотонная и меняет направление монотонности при переходе от одного интервала к другому. Но тогда соответствующие элементы этой последовательности ограничены с двух сторон величинами β_{n_i}/α_{n_i} и $\beta_{n_{i+1}}/\alpha_{n_{i+1}}$ – элементами последовательности, сходящейся к a . Лемма доказана.

Для доказательства теоремы 3 будем исследовать асимптотическое поведение моментов случайной величины ξ_n .

Пусть

$$\Omega_n(\beta)=\{(a_1, a_2, \dots, a_n)\in R^n : 0\le a_1\le\dots\le a_n\le\beta\}.$$

Положим

$$\xi_n(\beta)=n^{p-1}(a_1^p+(a_2-a_1)^p+\dots+(\beta-a_n)^p)-\frac{\Gamma(p+1)\beta^p}{s^{p-1}(p+s-ps)},$$

$$m_n^k(\beta)=n!\int\limits_{\Omega_n(\beta)} s^n(\xi_n(\beta))^k a_1^{s-1}a_2^{s-1}\dots a_n^{s-1}da_1da_2\dots da_n=$$

$$=n!\int\limits_0^\beta s a_n^{s-1}da_n\int\limits_0^{a_n} s a_{n-1}^{s-1}da_{n-1}\dots\int\limits_0^{a_2} s a_1^{s-1}da_1(\xi_n(\beta))^k.$$

Ясно, что $m_n^k(\beta) = m_n^k(1)\beta^{pk+ns}$, причем $m_n^k(1)= =E(\xi_n)^k (\equiv m_n^k)$.

Индукцией по k покажем, что для четных k

$$n^{k/2}m_n^k=\Delta_k\cdot(1+o(1)),\ \Delta_k=(k-1)!!(\sigma^2)^{k/2},$$

а для нечетных k

$$n^{k/2}m_n^k=o(1).$$

Проверим утверждение при $k=1$.

Для $b_n=n^{1/2}m_n^1$ можно получить следующее рекуррентное уравнение:

$$b_n=\left(1-\frac{s+2p-2ps}{2sn}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)b_{n-1}+\frac{\Gamma(p+1)p(p-1)(s-1)(p+s)(1+o(1))}{2s^{p+1}n^{3/2}}.$$

Лемма I позволяет заключить, что $b_n \to 0$,откуда и следует база индукции.

Пусть для $i<k$ утверждение теоремы справедливо. Воспользовавшись тождеством

$$n^{p-1}(a_1^p+(a_2-a_1)^p+\dots+(\beta-a_n)^p)-\frac{\Gamma(p+1)\beta^p}{s^{p-1}(p+s-ps)}=$$

$$=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{p-1}\left((n-1)^{p-1}(a_1^p+(a_2-a_1)^p+\dots+(a_n-a_{n-1})^p)-\frac{\Gamma(p+1)a_n^p}{s^{p-1}(p+s-ps)}\right)+$$

$$+\left(\left(\frac{n}{n-1}\right)^{p-1}a_n^p-\beta^p\right)\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p-1}(p+s-ps)}+n^{p-1}(\beta-a_n)^p$$

и однородностью (порядка $pr+ns$) функций $m_n^r(\beta)$, можно получить следующее рекуррентное соотношение:

$$m_n^k=\frac{ns}{pk+ns}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{k(p-1)}m_{n-1}^k+n\sum_{t=1}^{k}C_k^t\left(\frac{n}{n-1}\right)^{(k-t)(p-1)}\cdot s\cdot m_{n-1}^{k-t}\cdot A_{t,k} \quad (2)$$

где

$$A_{t,k}=\int_0^1 a^{pk+ns-pt-1}\left[n^{p-1}(1-a)^p-\left(1-a^p\left(\frac{n}{n-1}\right)^{p-1}\right)\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p-1}(p+s-ps)}\right]^t da.$$

Покажем теперь, что

$$A_{t,k}=c_{t,k}\,n^{-(t+1)}(1+o(1)).$$

Действительно, разложив выражение в квадратных скобках по биному Ньютона, поменяв местами суммы и интеграл, получаем, что

$$A_{t,k}=\sum_{l=0}^{t}(-1)^l C_t^l n^{l(p-1)}\left(\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p-1}(p+s-ps)}\right)^{t-l}\cdot$$

$$\cdot\sum_{v=0}^{t-l}(-1)^v C_{t-l}^v\left(\frac{n}{n-1}\right)^{v(p-1)}\frac{\Gamma(pk+ns-pt+pv)\cdot\Gamma(pl+1)}{\Gamma(pk+ns-pt+pv+pl+1)}.$$

Но

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{v(p-1)}=1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{T_r(v)}{n^r}$$

и

$$\frac{\Gamma(pk+ns-pt+pv)\Gamma(pl+1)}{\Gamma(pk+ns-pt+pv+pl+1)}=\frac{\Gamma(pl+1)}{(ns)^{pl+1}}\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{D_r(v)}{n^r}\right),$$

где T_r и D_r - некоторые полиномы степени r . Поэтому $A_{t,k}$ представимо в виде

$$A_{t,k}=\sum_{l=0}^{t}(-1)^l C_t^l n^{l(p-1)}\left(\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p-1}(p+s-ps)}\right)^{t-l}\sum_{v=0}^{t-l}(-1)^v C_{t-l}^v \frac{\Gamma(pl+1)}{(ns)^{pl+1}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{F_r(v)}{n^r},$$

где F_r - полином степени r .

Воспользовавшись тождеством

$$\sum_{\tau=0}^{k} C_k^{\tau} P(\tau)\cdot(-1)^{\tau}=0,$$

справедливым для любого полинома P степени не выше $k-1$, получим, что в сумме

$$\sum_{v=0}^{t-l}(-1)^v C_{t-l}^v \frac{\Gamma(pl+1)}{(ns)^{pl+1}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{F_r(v)}{n^r}$$

обратятся в нуль все слагаемые, соответствующие r , равному $0,1,\dots,t-l-1$. Поэтому

$$A_{t,k}=\sum_{l=0}^{t}(-1)^l C_t^l n^{l(p-1)}\left[\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p-1}(p+s-ps)}\right]^{t-l}\frac{\Gamma(pl+1)}{(ns)^{pl+1}}\cdot\frac{p(t,l)}{n^{t-l}}(1+o(1))=$$

$$=C_{t,k}\cdot n^{-(t+1)}(1+o(1)).$$

Полученная формула справедлива для всех натуральных t . Однако для $t=1,2$ ее целесообразно уточнить. Можно показать, что

$$A_{1,k}=C_k\cdot n^{-3}(1+o(1));\; A_{2,k}=n^{-3}s^{-2}(s+2p-2ps)\sigma^2\cdot(1+o(1)),$$

где σ^2 определено формулой (I).

Вернемся теперь к рекуррентному соотношению (2). Учитывая асимптотическое представление $A_{t,k}$, это соотношение можно переписать в виде:

$$m_n^k=m_{n-1}^k\left(1-\frac{k}{s}\cdot\frac{p+s-ps}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)+\frac{\alpha_1(1+o(1))}{n^2}m_{n-1}^{k-1}+$$

$$+s^{-1}n^{-2}\frac{k(k-1)}{2}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{(k-2)(p-1)}\sigma^2(s+2p-2ps)(1+o(1))m_{n-1}^{k-2}+$$

$$+n\sum_{t=3}^{k}C_k^t\left(\frac{n}{n-1}\right)^{(k-t)(p-1)}\cdot s\cdot m_{n-1}^{k-t}\cdot c_{t,k}\cdot n^{-(t+1)}\cdot(1+o(1)).$$

Пусть k четное. По индукционному предположению имеем

$$m_n^{2l}=\Delta_{2l}\cdot n^{-l}(1+o(1)) \quad (2l<k);$$
$$m_n^{2l+1}=n^{-(l+\frac{1}{2})}\cdot O(1).$$

Поэтому

$$m_n^k=\left(1-\frac{k}{s}\cdot\frac{p+s-ps}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)m_{n-1}^k+\frac{O(1)}{n^{2+\frac{k-1}{2}}}+$$
$$+\frac{k(k-1)}{2}\,\frac{\Delta_{k-2}(s+2p-2ps)(1+o(1))}{s\cdot n^{2+\frac{k-2}{2}}}\sigma^2+\sum_{t=3}^{k}\frac{\alpha_t(1+o(1))}{n^{t+\frac{k-t}{2}}}.$$

Умножив эти равенства на $n^{k/2}$ и обозначив $r_n^k=m_n^k\cdot n^{k/2}$, получим

$$r_n^k=\left(1-\frac{k}{s}\cdot\frac{p+s-ps}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\dots\right)^{k/2}\cdot r_{n-1}^k+$$
$$+\frac{k(k-1)}{2sn}(s+2ps-2ps)\Delta_{k-2}\cdot\sigma^2(1+o(1)),$$

или

$$r_n^k=\left(1-\frac{k(s+2p-2ps)}{2sn}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)r_{n-1}^k+$$
$$+\frac{k(k-1)}{2sn}(s+2p-2ps)\Delta_{k-2}\sigma^2(1+o(1)).$$

По лемме I

$$\lim r_n^k=(k-1)\Delta_{k-2}\cdot\sigma^2,$$

откуда получаем, что четные моменты (порядка $2l$) случайной величины $\sqrt{n}\cdot\xi_n$ стремятся к $(2l-1)!!(\sigma^2)^l$ при n, стремящемся к бесконечности. Аналогично можно получить, что нечетные моменты случайной величины стремятся к нулю. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. РАПОПОРТ Э.О. О критериях согласия, связанных с наилучшим приближением мер. - Оптимизация, 1980, вып. 25(42), с.42-56.
2. PYKE R. Spacing. - J. Roy. Statist. Soc. Ser.B, 1965, v.27, N 3, p.395-436.

3. KIMBALL B.F. On the asymptotic distribution of the sum of power of unit frequency differens.- Ann.Math. Statistics, 1950, N 21, p.263-271.
4. WEISS L. The asymptotic power of certain tests of fit based on sample spacings.- Ann. Math. Statistics, 1957, N 28, p. 783-786.

Поступила в ред.-изд. отдел
I9.II.I984 г.