Выпуск 35(52) ОПТИМИЗАЦИЯ 1985 г.

Численные методы

УДК 519.853

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДРОБНО-ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

И.А.Быкадоров

Для рассмотренной в [1] пары двойственных задач дробно-линейного программирования предлагается алгоритм, основанный на идеях, развитых автором в [2].

Для постановки интересующих нас задач рассмотрим множества индексов $M=\{1,\dots,m\}$ и $N=\{1,\dots,n\}$, каждое из которых разбито на два непустых непересекающихся подмножества

$$M=M_1\cup M_2,\ N=N_1\cup N_2.$$

ЗАДАЧА 1. При заданных вещественных числах

$$a_{ij}\ (i\in M, j\in N),\ a_{ij}>0\ (i\in M_2, j\in N_2)$$

определить вектор

$$x=(x_1,\dots,x_m), \tag{1}$$

максимизирующий функцию

$$\mu(x)=\min_{j\in N_2}\frac{\sum_{i\in M_1}a_{ij}x_i}{\sum_{i\in M_2}a_{ij}x_i} \tag{2}$$

при ограничениях

$$\begin{gathered} x_i\geq 0,\ i\in M;\\ \sum_{i\in M_2}x_i=1;\\ \sum_{i\in M}a_{ij}x_i\geq 0,\ j\in N_1. \end{gathered} \tag{3}$$

ЗАДАЧА 1'. При числовых данных задачи 1 определить вектор

$$y=(y_1,\dots,y_n), \tag{4}$$

минимизирующий функцию

$$\nu(y)=\min_{i\in M_2}\frac{\sum_{j\in N_1}a_{ij}y_j}{\sum_{j\in N_2}a_{ij}y_j} \tag{5}$$

при ограничениях

$$\begin{gathered} y_j\geq 0,\ j\in N;\\ \sum_{j\in M_2}y_j=1;\\ \sum_{j\in N}a_{ij}y_j\leq 0,\ i\in M_1. \end{gathered} \tag{6}$$

Как обычно, вектор (I) (соответственно (4)), удовлетворяющий ограничениям (3) (соответсвенно (6)), называется допустимым, а искомый допустимый вектор, максимизирующий функцию (2) (соответственно минимизирующий функцию (5)), называется оптимальным.

Множества допустимых в задачах I и I$'$ векторов обозначим соответственно через X и Y.

Непосредственно проверяется (см., например, [I]), что для любых векторов $x\in X$ и $y\in Y$ имеет место неравенство

$$\mu(x)\leq \nu(y'), \tag{7}$$

в котором достигается равенство в том и только в том случае, если

$$\begin{gathered} x_i\sum_{j\in N}a_{ij}y_j=0,\ i\in M_1;\\ x_i\Big(\sum_{j\in N_1}a_{ij}y_j-\nu(y)\sum_{j\in N_2}a_{ij}y_j\Big)=0,\ i\in M_2;\\ y_j\sum_{i\in M}a_{ij}x_i=0,\ j\in N_1;\\ y_j\Big(\sum_{i\in M_1}a_{ij}x_i-\mu(x)\sum_{i\in M_2}a_{ij}x_i\Big)=0,\ j\in N_2. \end{gathered} \tag{8}$$

Следовательно, для оптимальности векторов $x\in X$ и $y\in Y$ достаточно достижения равенства в (7) или, что то же, выполнения условий (8).

С помощью геометрической схемы двойственности доказывается (см. [I]), что указанный признак является также необходимым. Более того, каковы бы ни были исходные данные, имеет

место один из следующих взаимоисключающих случаев:

1^0. В задачах $\mathbf{I}$ и $\mathbf{I}'$ существуют оптимальные векторы (1) и (4), на которых значения соответствующих функций (2) и (5) совпадают.

2^0. Множество X непусто, но функция (2) на нем не ограничена сверху и, следовательно, $Y=\emptyset$.

3^0. Множество Y непусто, но функция (5) на нем не ограничена снизу и, следовательно, $X=\emptyset$.

4^0. Ни в одной из рассматриваемых задач нет допустимых векторов.

Это означает, что следующие утверждения относительно рассматриваемых задач $\mathbf{I}$ и $\mathbf{I}'$ равносильны:

а) Для этих задач имеет место случай 1^0.

б) В обеих задачах существуют допустимые векторы.

в) В одной из рассматриваемых задач существует оптимальный вектор.

г) В задаче $\mathbf{I}$ существуют допустимые векторы и функция (2) на них ограничена сверху.

д) В задаче $\mathbf{I}'$ существуют допустимые векторы и функция (5) на них ограничена снизу.

Предлагаемый численный метод состоит из двух этапов. На первом из них выясняется, имеет ли место для рассматриваемых задач случай 1^0. Если это так, то на втором этапе вычисляются соответствующие оптимальные векторы.

На первом этапе при фиксированном $\lambda=\tilde{\lambda}$ и числовых данных исследуемых задач $\mathbf{I}$ и $\mathbf{I}'$ рассматривается следующая пара двойственных задач линейного программирования.

ЗАДАЧА $\mathbf{I}_\lambda$. Определить вектор $u=(x_1,\dots,x_m,z)$, максимизирующий функцию

$$\mu_\lambda(u)=z$$

при ограничениях

$$x_i\geq 0,\ i\in M;$$

$$\sum_{i\in M_2} x_i=1;$$

$$\sum_{i\in M} a_{ij}x_i\geq 0,\ j\in N_1;$$

$$\sum_{i\in M_1} a_{ij}x_i+\sum_{i\in M_2}(-\lambda a_{ij})x_i-z\geq 0,\ j\in N_2.$$

ЗАДАЧА I'_λ. Определить вектор

$$v=(y_1,\dots,y_n,t),$$

минимизирующий функцию

$$\nu_\lambda(v)=t$$

при ограничениях

$$y_j\geq 0,\ j\in N;$$

$$\sum_{j\in N_2} y_j=1;$$

$$\sum_{j\in N} a_{ij}y_j\leq 0,\ i\in M_1;$$

$$\sum_{j\in N_1} a_{ij}y_j+\sum_{j\in N_2}(-\lambda a_{ij})y_j-t\leq 0,\ i\in M_2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если задачи I_λ и I'_λ разрешимы при $\lambda=\tilde{\lambda}$, то, используя отвечающее им экстремальное значение

$$z(\tilde{\lambda})=t(\tilde{\lambda})=C \tag{9}$$

функций $\mu_{\tilde{\lambda}}$ и $\nu_{\tilde{\lambda}}$, для исходных задач дробно-линейного программирования можно найти оценки искомого экстремального значения $\mu^*=\nu^*$ функций (2) и (5). Действительно, полагая

$$A_1=\begin{cases}\max\limits_{j\in N_2}\ \max\limits_{x\in X}\left\{\sum\limits_{i\in M_2} a_{ij}x_i\right\} & \text{при } C\geq 0,\\ \min\limits_{j\in N_2}\ \min\limits_{x\in X}\left\{\sum\limits_{i\in M_2} a_{ij}x_i\right\} & \text{при } C<0;\end{cases}$$

$$A_2=\begin{cases}\min\limits_{i\in M_2}\ \min\limits_{y\in Y}\left\{\sum\limits_{j\in N_2} a_{ij}y_j\right\} & \text{при } C\geq 0,\\ \max\limits_{i\in M_2}\ \max\limits_{y\in Y}\left\{\sum\limits_{j\in N_2} a_{ij}y_j\right\} & \text{при } C<0,\end{cases}$$

имеем

$$\tilde{\lambda}+\frac{C}{A_1}\leq\mu^*=\nu^*\leq\tilde{\lambda}+\frac{C}{A_2}. \tag{10}$$

Это означает, в частности, что если $C=0$, то $\mu^*=\nu^*=\tilde{\lambda}$.

При решении задач $I_{\tilde{\lambda}}$ и $I'_{\tilde{\lambda}}$ возможны следующие случаи:

I.^{00}. В задаче $I_{\tilde{\lambda}}$ нет допустимых векторов. Это означает, что для исследуемых задач I и I$'$ имеет место случай 3^0 или случай 4^0.

2^{00}. В задаче $I_{\tilde{\lambda}}$ существуют допустимые векторы, но целевая функция $\mu_{\tilde{\lambda}}$ на них не ограничена сверху. Это означает, что для исследуемых задач I и I' имеет место случай 2^0.

3^{00}. В задачах $I_{\tilde{\lambda}}$ и $I'_{\tilde{\lambda}}$ существуют допустимые векторы. Это означает, что для исследуемых задач I и I' имеет место случай I^0.

Если имеет место случай I^{00} или случай 2^{00}, то исследование задач I и I' на этом завершается.

Если имеет место случай 3^{00} и при этом величина (9) равна нулю, то (см. замечание) $\lambda = \tilde{\lambda}$ - искомое экстремальное значение функций (2) и (5). При этом если векторы

$$u(\lambda) = (x_1(\lambda), \ldots, x_m(\lambda), z(\lambda)),$$

$$v(\lambda) = (y_1(\lambda), \ldots, y_n(\lambda), t(\lambda))$$

являются оптимальными в соответствующих задачах I_λ и I'_λ при $\lambda = \tilde{\lambda}$, то векторы

$$x = (x_1(\lambda), \ldots, x_m(\lambda)), \tag{II}$$

$$y = (y_1(\lambda), \ldots, y_n(\lambda)) \tag{I2}$$

являются оптимальными в соответствующих задачах I и I'.

Если же имеет место случай 3^{00} и при этом величина (9) не равна нулю, то переходим ко второму этапу.

На втором этапе к задаче I' применяется алгоритм из [2], состоящий в последовательном решении задачи I'_λ при различных λ и уточнении полученных на первом этапе оценок (I0) искомого экстремального значения $\mu^* = \nu^*$ функций (2) и (5). При этом если для некоторого $\lambda = \tilde{\lambda}$ величина $z(\lambda) = t(\lambda)$ близка к нулю, то векторы (II) и (I2) близки к искомым векторам (I) и (4), а сама величина $\lambda = \tilde{\lambda}$ близка к искомому экстремальному значению функций (2) и (5).

Автор благодарит Г.Ш.Рубинштейна за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

I. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Исследования по двойственным экстремальным задачам. - Оптимизация, 1973, вып. 9(26), с.13-149.

2. БЫКАДОРОВ И.А. Конечные системы дробно-линейных неравенств. - Настоящий сб-к, с.43-50.

Поступила в ред.-изд. отдел
16.01.85 г.