

УДК 519.852.64:67

ОБНОВЛЕНИЕ МНОГОСЛОЙНОГО БЛОЧНОГО БАЗИСА С
УЧЕТОМ СПЕЦИФИКИ КОНЦЕВЫХ БЛОКОВ

Р.А.Звягина

Степень эффективного использования многослойной блочности [1] в квадратной невырожденной матрице существенно зависит от порядка в множестве блоков и от согласованного с ним типа линейных преобразований, приводящих матрицу к блочно-треугольному виду. Дробление клеток-блоков очередного разбиения матрицы, начиная с нее самой и кончая разбиением, содержащим концевые блоки, позволяет учитывать ее структуру на основе линейных преобразований типа гауссовских исключений [1,2]. При этом гарантируется линейная независимость строк или столбцов в каждой прямоугольной клетке, из которой приходится исключать лишние ненулевые элементы. Однако в общем случае специфика некоторых концевых блоков на всех разбиениях, кроме последнего, почти игнорируется.

Если порядок разбиений заменить обратным, последовательно объединяя клетки мелкого разбиения в более крупные, то специфика всех концевых блоков, включаемых в начальное разбиение, может быть учтена более эффективно. Однако в том же общем случае возникает задача выбора квадратной невырожденной подматрицы в прямоугольной матрице при любом ранге последней. Привлечение более трудоемких по сравнению с исключениями ортогональных преобразований, как правило, отражений, открывает доступ к сингулярным числам [3] базисных (например, двухдиагональных) подматриц в блоках, что позволяет управлять обусловленностью [4] главных подматриц в блочно-треугольной матрице. Так как норма ортогональных преобразований равна 1, то их

применение делает алгоритм более устойчивым относительно ошибок округления по сравнению с исключениями, норма которых больше I. Доступность же сингулярных чисел дает возможность оценивать возмущения, вносимые в решение системы ее триангуляризацией [5].

Заметим, что в концевых блоках с некоторыми специальными структурами (например, узкоблочной, транспортной, двухкомпонентной) можно обойтись простейшими ортогональными преобразованиями - перестановками. Этот замечательный факт позволяет и в алгоритме [1], основанном на дроблении разбиений, учитывать такие структуры, начиная с первого этапа. Более того, на последнем этапе, в отличие от алгоритма, основанного на укрупнении разбиений, нейтрализуется первоначальная зависимость порядка базисной матрицы в блоке от задаваемой нижней границы ее сингулярных чисел.

§1. Упорядочение множества блоков

1. Блочную структуру рассматриваемых здесь квадратных невырожденных матриц $A[M, N]$ с множествами M номеров строк и N номеров столбцов нагляднее всего определить рекурсивно. Для любого k ; в частности для $k = \bar{k}$ и $A[M^k, N^k] = A[M, N]$, будем предполагать, что в блоке $A[M^k, N^k]$ отличны от нуля разве лишь клетки

$$A[M_k, N_k], A[M^{\tau}, N^{\tau}], \tau \in Z(k),$$

при некоторых множествах $M_k \subset M^k, N_k \subset N^k$ и множестве номеров подблоков

$$Z(k) = Z_{-|k|} \cup Z_{|k|} \quad (Z_{-|k|} \cap Z_{|k|} = \emptyset). \quad (1)$$

При этом матрицы $A[M^k, M_k, N_k]$ и $A[M_k, N^k, N_k]$ блочно-диагональные с независимыми блоками $A[M^{\tau}, N^{\tau}], \tau \in Z_{\sigma|k|}$, соответственно при $\sigma = -1$ и $\sigma = 1$. Другими словами,

$$M^{\tau} \cap M^{\alpha} = N^{\tau} \cap N^{\alpha} = \emptyset, \tau \neq \alpha, \tau, \alpha \in Z(k), \quad (2)$$

$$M^{\tau} \subset M_k, \tau \in Z_{|k|}, \quad N^{\tau} \subset N_k, \tau \in Z_{-|k|}$$

(рис. 1 при $k = \bar{k} = 7, Z_{-7} = \{-3, -4\}, Z_7 = \{10, 11\}$).

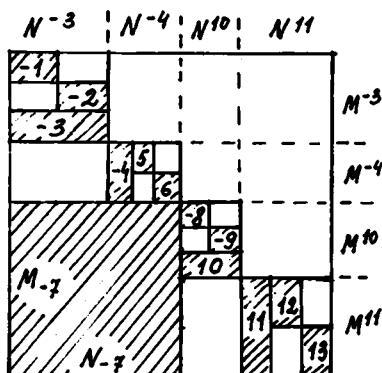


Рис. 1

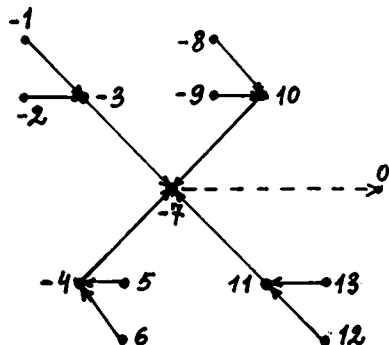


Рис. 2

При непустом множестве $Z(k)$ рекурсивность состоит в замене k на $\tau \in Z(k)$. В противном случае блок $A[M^k, N^k]$ является концевым: $M_k = M^k$, $N_k = N^k$.

Обозначим через Z объединение номера \bar{k} со всеми непустыми относительно матрицы $A[M, N]$ множествами (I) , а через G - множество упорядоченных пар (τ, k) при всех $k \in Z$, $\tau \in Z(k)$. Не нарушая общности, предположим, что нумерация блоков удовлетворяет условиям $\bar{k} < 0$ и $\text{sign } \tau = \sigma$, если $\tau \in Z_{\sigma|k|}$ ($\sigma = -1, 1$), для всех $k \in Z$. Блочную структуру матрицы $A[M, N]$ удобно представлять в виде ориентированного связного дерева с множеством вершин Z , множеством дуг G и корнем \bar{k} : рис.1,2 при

$$Z(-7) = \{-4, -3, 10, 11\}, Z(-3) = Z_{-3} = \{-1, -2\}, Z(-4) = Z_4 = \{5, 6\}, Z(10) = Z_{-10} = \{-8, -9\}, Z(11) = Z_{11} = \{12, 13\}.$$

2. Зону знака $\sigma = -1, 1$ в вершине $k \in Z$ определим рекуррентным отношением

$$Z^{\sigma|k|} = Z_{\sigma|k|} \cup \left(\bigcup_{\tau \in Z_{\sigma|k|}} Z^{\sigma|\tau|} \right)$$

и в множестве Z выделим подмножество L тех вершин k , для которых зона Z^{-k} не пуста: $L = \{-4, -7, 10\}$ на рис. 1,2.

Дополним Z и L фиктивной вершиной 0 и из корня \bar{k} проведем дугу $(\bar{k}, 0)$, полагая

$$Z(0) = Z_0 = \{\bar{k}\}, Z^0 = \{\bar{k}\} \cup Z^{\bar{k}}, M^0 = M, M_0 = \emptyset, N^0 = N_0 = N.$$

Множество $L \cup \{0\}$ разобьем на подмножества (слои)

$$L_0 = \{0\}, L_{s+1} = \left\{ k \in \bigcup_{\alpha \in L_s} Z^{-\alpha} : Z^{-k} \neq \emptyset \right\}, s = 0, 1, \dots, z, \quad (3)$$

где $z \geq 0$ определяется как наименьший номер, при котором $L_{z+1} = \emptyset$, т.е. z - наибольшее число перемен знака в путях, заканчивающихся в корне \bar{k} . Частичные упорядочения в множестве $L \cup \{0\}$, устанавливаемые возрастанием или убыванием s в пределах $0 \leq s \leq z$, позволяют строить все упомянутые выше алгоритмы, преобразующие матрицу $A[M, N]$ в блочно-треугольную. При этом порядок перебора вершин в зонах $Z^{-\alpha}$, $\alpha \in L_s$, при каждом s ($0 \leq s \leq z$) в любом случае один и тот же [1]: от концевых вершин k зоны $Z^{-\alpha}$ (т.е. вершин, для которых $Z^k = \emptyset$) в сторону приближения к ее корню α .

3. Следует особо выделить случаи $L = \{\bar{k}\}$ и $L = \emptyset$. Это так называемая "чистая" или однослойная ($z \leq 1$) структура, примерами которой могут служить как матрица $A[M, N]$, схематично изображенная на рис. 1, так и ее подматрицы $A[M_{-7}, N]$ и $A[M, N_{-7}]$, если положить $N_{-4} = N^{-4}$, $M_{10} = M^{10}$, а на соответствующем графе (рис. 2) вычеркнуть вершины 5, 6, -8, -9 вместе с исходящими из них стрелками.

Эффективность алгоритмов здесь проявляется в том, что первое (и единственное) разбиение $A[M_k, N_k]$, $k \in Z$, ненулевой части исходной матрицы $A[M, N]$ и любой из указанных порядков перебора $k \in Z$ обеспечивают линейную независимость либо строк ($k \in Z^{\bar{k}}$), либо столбцов ($k \in Z^{-\bar{k}}$), либо строк и столбцов ($k = \bar{k}$) в каждой преобразуемой прямоугольной клетке. Следствием этого являются условия для наилучшего учета специфики в концевых блоках, и, кроме того, как в процессе отражений, так и в процессе исключений индексы ненулевых элементов остаются в пределах попарно-непересекающихся множеств $M_k \times N_k$, $k \in Z$.

§2. Преобразование матрицы в блочно-треугольную на основе укрупнения разбиений

В дальнейшем будем считать, что при любом линейном преобразовании $\Lambda[I, I]$ и любом множестве $J \supset I$ матрица $\Lambda[J, J]$ отличается от единичной разве лишь блоком $\Lambda[I, I]$.

1. Перебирая слои L_s в порядке убывания $s = z, \dots, 1, 0$, предположим, что для некоторого $s \leq z$ и каждого $k \in L_{s+1}$ выделены базисные множества $I^k \subset M^k, J^k \subset N^k, \tau \in Z^{-k}$, и при $\sigma = -1$ построены такие преобразования

$$T_\tau[M^\tau, M^\tau], R_\tau[N^\tau, N^\tau], \tau \in Z^{\sigma k}, \quad (4)$$

что в каждой из матриц

$$B_{\tau}[M^{\tau}, N^{\tau}] = T_{\tau}[M^{\tau}, M^{\tau}] \cdot A[M^{\tau}, N^{\tau}] \cdot R_{\tau}[N^{\tau}, N^{\tau}], \tau \in Z^{sk}, \quad (5)$$

квадратная невырожденная подматрица $B_\tau[I^\tau, J^\tau]$ является блочно-треугольной, а клетка $B_\tau[I^\tau, N^\tau - J^\tau]$ при $\tau < 0$ или клетка $B_\tau[M^\tau, I^\tau, J^\tau]$ при $\tau > 0$ — нулевой. Для $z = z$ эти предположения выполняются, поскольку $L_{z+1} = \emptyset$ по определению.

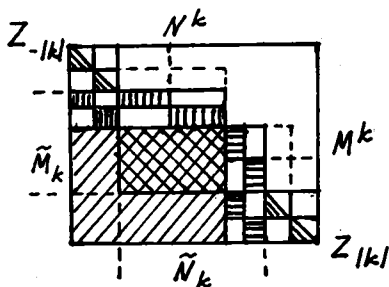


Рис. 3

шин k зоны $Z^{-\alpha}$ это действительно так, поскольку $Z^k = \emptyset$, а если $Z^{-k} \neq \emptyset$, то $\beta < \alpha$ и вершина k попадает по определению (3) в слой $L_{\beta+1}$, где эти предположения совпадают с индуктивными.

На основании свойств (2) можно заключить, что матрица

Перебирая при любом $\alpha \in L_3$ вершины k в порядке удаления от концевых вершин зоны $Z^{-\alpha}$ и приближения к α , предположим также, что для некоторого $k \in Z^{-\alpha}$ выделены множества $I^k \subset M^k$, $J^k \subset N^k$, $\tau \in Z^{\sigma k}$, определены преобразования (4) и матрицы (5), обладающие указанными выше свойствами как при $\sigma = -1$, так и при $\sigma = 1$. Для концевых вер-

$$B'_k[M^k, N^k] = \prod_{\tau \in Z(k)} T_\tau[M^k, M^k] \cdot A[M^k, N^k] \cdot \prod_{\tau \in Z(k)} R_\tau[N^k, N^k] \quad (6)$$

обладает следующей структурой: при каждом $\tau \in Z_{-|k|}$ в полосе $B'_k[I^\tau, N^k]$ и при каждом $\tau \in Z_{|k|}$ в полосе $B'_k[M^k, J^\tau]$ отлична от нуля лишь базисная подматрица $B'_k[I^\tau, J^\tau]$ (рис. 3), совпадающая с $B_\tau[I^\tau, J^\tau]$ при каждом $\tau \in Z(k)$. Положим

$$\tilde{M}_k = M^k \cdot \left(\bigcup_{\tau \in Z(k)} I^\tau \right), \quad \tilde{N}_k = N^k \cdot \left(\bigcup_{\tau \in Z(k)} J^\tau \right)$$

и умножим вырезку $B'_k[\tilde{M}_k, \tilde{N}_k]$ из матрицы (6) на некоторые преобразования $P_k[\tilde{M}_k, \tilde{M}_k]$ и $Q_k[\tilde{N}_k, \tilde{N}_k]$ соответственно слева и справа, чтобы получить матрицу $\tilde{B}_k[\tilde{M}_k, \tilde{N}_k]$ с базисной подматрицей $\tilde{B}_k[I_k, J_k]$ и нулевой клеткой $\tilde{B}_k[I_k, \tilde{N}_k - J_k]$ при $k < 0$ (рис. 4) или нулевой клеткой $\tilde{B}_k[\tilde{M}_k - I_k, J_k]$ при $k > 0$ (рис. 5).

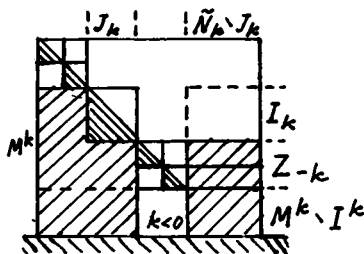


Рис. 4

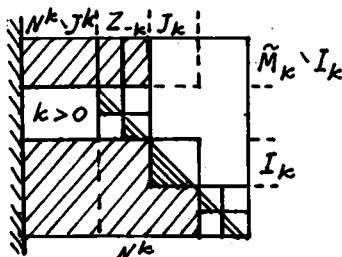


Рис. 5

В частности, тождественные преобразования и пустые базисные множества подходят для этих целей. Однако, чтобы предотвратить при дальнейших преобразованиях в зоне $Z^{-\alpha}$ и в слоях L_t ($0 \leq t < 3$) слишком сильное "расползание" номеров ненулевых элементов за пределы множества $\tilde{M}_k \times \tilde{N}_k$, естественно стремиться к увеличению порядка матрицы $\tilde{B}_k[I_k, J_k]$ за счет относительно произвольного (без ущерба для ее обусловленности) выбора множеств $I_k \subset \tilde{M}_k$, $J_k \subset \tilde{N}_k$.

Таким образом, для приобретения матрицей

$$\tilde{B}_k[M^k, N^k] = P_k[M^k, M^k] \cdot B'_k[M^k, N^k] \cdot Q_k[N^k, N^k]$$

тех же свойств, какими обладают ее блоки (5) при $\tau \in Z(k)$, достаточно положить

$$I^k = I_k \cup \left(\bigcup_{\tau \in Z(k)} I^\tau \right), \quad J^k = J_k \cup \left(\bigcup_{\tau \in Z(k)} J^\tau \right)$$

и потребовать сохранения равенств

$$\tilde{B}_k [I^\tau, J^\tau] = B_k [I^\tau, J^\tau] = B_\tau [I^\tau, J^\tau], \quad \tau \in \{k\} \cup Z(k),$$

от преобразований $\tilde{T}_k [M^k, M^k]$ и $\tilde{R}_k [N^k, N^k]$, исключающих клетки $\tilde{B}_k [\tilde{M}_k, I_k, J^\tau], \tau \in Z_{-k}$, при $k > 0$ (рис.5) или клетки $\tilde{B}_k [I^\tau, \tilde{N}_k, J_k], \tau \in Z_{-k}$, при $k < 0$ (рис.4) с помощью соответствующих базисов $B_\tau [I^\tau, J^\tau], \tau \in Z_{-k}$. Это значит, что матрица (5) определена при $\tau = k$, поскольку определены множества $I^k \subset M^k, J^k \subset N^k$ и преобразования

$$T_k [M^k, M^k] = \tilde{T}_k [M^k, M^k] \cdot P_k [M^k, M^k] \cdot \prod_{\tau \in Z(k)} T_\tau [M^k, M^k], \quad (7)$$

$$R_k [N^k, N^k] = \prod_{\tau \in Z(k)} R_\tau [N^k, N^k] \cdot Q_k [N^k, N^k] \cdot \tilde{R}_k [N^k, N^k].$$

2. Структура переходных множителей в рекуррентных соотношениях (7), связывающих преобразования в вершинах k и $\tau \in Z(k)$, при каждом $k \in Z^{-\alpha}, \alpha \in L_3, 3 = 2, \dots, 1, 0$, обуславливается сформулированными в п.1 требованиями.

Прежде всего очевидно, что при $k < 0$ матрица $\tilde{T}_k [M^k, M^k]$ единичная, а при $k > 0$ отличается от нее разве лишь блоками, удовлетворяющими равенствам

$$\tilde{T}_k [\tilde{M}_k, I_k, I^\tau] \cdot B_\tau [I^\tau, J^\tau] = -\tilde{B}_k [\tilde{M}_k, I_k, J^\tau], \quad \tau \in Z_{-k}. \quad (8)$$

Наоборот, при $k > 0$ матрица $\tilde{R}_k [N^k, N^k]$ единичная, а при $k < 0$ отличается от нее разве лишь решениями уравнений

$$B_\tau [I^\tau, J^\tau] \cdot \tilde{R}_k [J^\tau, \tilde{N}_k, J_k] = -\tilde{B}_k [I^\tau, \tilde{N}_k, J_k], \quad \tau \in Z_{-k}. \quad (9)$$

Из определения этих матриц следуют случаи, когда обе они единичные:

$$Z_{-k} = \emptyset; \quad I^\tau = J^\tau = \emptyset, \tau \in Z_{-k}; \quad \tilde{M}_k = I_k (k > 0); \quad \tilde{N}_k = J_k (k < 0).$$

Алгоритмы решения систем (8), (9) с блочно-треугольной матрицей $B_\tau [I^\tau, J^\tau]$ здесь не рассматриваются, так как они являются следствиями алгоритмов для решения систем с мультипликативным представлением матрицы $A[M, N]$ на основе выражения (5) при $\tau = k$.

Далее, если $\alpha \in L \setminus \{\bar{k}\}$, то в матрице $B'_k[\tilde{M}_k, \tilde{N}_k]$ ($k \in Z^{-\alpha}$) нельзя гарантировать линейной независимости ни строк, ни столбцов. Поэтому при некотором заданном $\varepsilon_k > 0$ множества I_k, J_k и преобразования $P_k[\tilde{M}_k, \tilde{M}_k], Q_k[\tilde{N}_k, \tilde{N}_k]$ следует выбирать так, чтобы сингулярные числа матрицы $B_k[I_k, J_k]$ были отделены от нуля барьером ε_k . В общем случае для построения таких преобразований предлагается алгоритм [4], накапливающий с помощью двусторонних отражений двухдиагональную матрицу $B_k[I_k, J_k]$, допустимую относительно ε_k , но, возможно, не оптимальную относительно ее порядка. В некоторых частных случаях для концевых блоков предлагается (§3, п.1) общая схема специальных алгоритмов, накапливающих перестановками строк и столбцов базисную матрицу $A[I_k, J_k]$, как правило, оптимальную относительно своего порядка, с последующим исключением клетки $A[I_k, N_k \setminus J_k]$ при $k < 0$ или клетки $A[M_k \setminus I_k, J_k]$ при $k > 0$, так что одна из матриц $P_k[M_k, M_k]$ ($k < 0$) или $Q_k[N_k, N_k]$ ($k > 0$) - единичная.

Если $\alpha = \bar{k}$ ($\beta = 1$) или $\alpha = 0$ ($\beta = 0$), то в матрице (6) и в ее блоках (5) при $\sigma = 1$ линейно-независимы либо столбцы ($k \in Z^{-\bar{k}}$), либо строки ($k \in Z^0$). Это значит, что в вырезке $B'_k[\tilde{M}_k, \tilde{N}_k]$ также линейно-независимы либо столбцы ($k \in Z^{-\bar{k}} \cup \{\bar{k}\}$), либо строки ($k \in Z^{\bar{k}} \cup \{\bar{k}\}$). Поэтому можно полагать

$$I_k = \tilde{M}_k, k \in Z^{\bar{k}} \cup \{\bar{k}\}, \quad J_k = \tilde{N}_k, k \in Z^{-\bar{k}} \cup \{\bar{k}\},$$

откуда очевидным образом следует включение

$$\tilde{M}_k \subset M_k, k \in Z^{\bar{k}} \cup \{\bar{k}\}, \quad \tilde{N}_k \subset N_k, k \in Z^{-\bar{k}} \cup \{\bar{k}\}. \quad (10)$$

Кроме того, в качестве $P_k[M^k, M^k]$ и $Q_k[N^k, N^k]$ можно принимать как произведения отражений [4], не заботясь о сингулярных числах двухдиагональной или треугольной матрицы $B_k[I_k, J_k]$, так и исключения. В последнем случае для выбора недостающего элемента пары I_k, J_k при $Z(k) = \emptyset$ предлагаются, как и выше, специальные алгоритмы, в частности учитывающие слабую заполненность блока $A[M_k, N_k]$ ненулевыми элементами [8, 9], а при $Z(k) \neq \emptyset$ - преобразования вырезки $B'_k[\tilde{M}_k, \tilde{N}_k]$ в виде полной симплекс-таблицы (§3, п.2) с вычислением матрицы, обратной к $B_k[I_k, J_k]$.

Нетрудно заметить, что в любом случае выбор базисных множеств из условий $I_k \subset \tilde{M}_k \cap M_k$ при $k < 0$ или $J_k \subset \tilde{N}_k \cap N_k$

при $k > 0$ значительно упрощает вычисление вырезок $B'_k[\tilde{M}_k, \tilde{N}_k]$ и $B'_k[\tilde{M}_k, \tilde{N}_k \cap N_k]$ из матрицы (6), поскольку можно опустить преобразования $T_\tau[M^k, M^k]$, $\tau \in Z_k$, с заменой M^k на M_k , если $k < 0$, или опустить преобразования $R_\tau[N^k, N^k]$, $\tau \in Z_k$, с заменой N^k на N_k , если $k > 0$. Можно надеяться, что на размерность базиса $B_k[I_k, J_k]$ это совсем или почти не повлияет, так как неучитываемые множества $\tilde{M}_k \setminus (\tilde{M}_k \cap M_k)$, $k < 0$, $\tilde{N}_k \setminus (\tilde{N}_k \cap N_k)$, $k > 0$,

либо пусты, как в случаях (10) или $Z_k = \emptyset$, либо состоят из номеров строк ($k < 0$) или столбцов ($k > 0$), отбрасываемых из блоков $B_\tau[M^\tau, N^\tau]$, $\tau \in Z_k$, как правило, по причине их непригодности для окаймления базисов $B_\tau[I^\tau, J^\tau]$, $\tau \in Z_k$, а следовательно, и для окаймления базиса $B_k[I_k, J_k]$.

3. В заключение вернемся к случаю $z \leq 1$ при $Z = Z^{\bar{k}} \cup U\{\bar{k}\} \cup Z^{-\bar{k}}$, в котором преобразования (7) для всех $k \in Z$ можно сделать однотипными: только исключениями, и тогда описанный здесь алгоритм с точностью до очередности зон $Z^{-\bar{k}}$ и $Z^{\bar{k}}$ совпадает с опубликованным ранее [1], или только отражениями, которые при $k \neq \bar{k}$ в вырезке $B'_k[M_k, N_k]$, содержащей $B'_k[\tilde{M}_k, \tilde{N}_k]$ на основании свойств (10), накапливаются разве лишь с одной стороны. Действительно, как следует из уравнений (8), (9), матрицы $\tilde{T}_k[M^k, M^k]$ и $\tilde{R}_k[N^k, N^k]$ единичны при всех $k \in Z$, поскольку $Z_{-k} = \emptyset$ для $k \in Z \setminus \{\bar{k}\}$ и $\tilde{N}_{\bar{k}} = J_{\bar{k}}$. Если $\alpha = \bar{k}$, что соответствует $z = z = 1$, то $M_k = M^k$, $J_k = N_k$, а в полосе $R_k[N^k, N_k]$ отлична от нуля лишь часть $R_k[N_k, N_k]$, равная $Q_k[N_k, N_k]$, для всех $k \in Z^{-\bar{k}}$. Если $\alpha = 0$ ($z = 0$), то $N_k = N^k$, $I_k = M_k$, а в полосе $T_k[M_k, M^k]$ отлична от нуля лишь часть $T_k[M_k, M_k] = P_k[M_k, M_k]$ для всех $k \in Z^{\bar{k}}$.

§3. Учет специфики концевых блоков в алгоритме с дроблением разбиений

1. Пусть S - множество номеров k концевых блоков ($Z(k) = \emptyset$) со специальной структурой, позволяющей для любого $k \in S$ получать базисную матрицу $A[I'_k, J'_k]$ в конце последовательных окаймлений матриц $A[I^{(t)}, J^{(t)}]$, $t = 1, 2, \dots$, где

$$I^{(t)} = J^{(t)} = \emptyset, I^{(t+1)} = I^{(t)} \cup \{i_t\}, J^{(t+1)} = J^{(t)} \cup \{j_t\}, t = 1, 2, \dots \quad (II)$$

При этом окончание процесса (II) и выбор номеров $i_t \in M_k \setminus I^{(t)}$, $j_t \in N_k \setminus J^{(t)}$ в случае его продолжения зависят от специфики блока $A[M_k, N_k]$. Например, для транспортного блока последовательность (II) не обрывается на $I^{(t)}, J^{(t)}$ в том и только в том случае, когда найдется такая пара i_t, j_t , что

$$|A[i_t, j_t] - A[i_t, J^{(t)}] \cdot \{A[I^{(t)}, J^{(t)}]\}^{-1} \cdot A[I^{(t)}, j_t]| > 0, \quad (I2)$$

а для однокомпонентного блока - когда $|A[i_t, j_t]| > \varepsilon_k$. Каждое из этих неравенств обеспечивает максимальную размерность базиса $A[I'_k, J'_k]$: первое - ввиду целочисленности результатов всех операций в своей левой части [6], а второе - ввиду диагональности базиса.

Для двухкомпонентного блока номера i_t, j_t выбираются так, чтобы сингулярные числа матрицы $A[I^{(t+1)}, J^{(t+1)}]$ были отделены от нуля барьером $\varepsilon_k > 0$ при условии, что это верно для окаймляемой матрицы $A[I^{(t)}, J^{(t)}]$. Подстановка в общую схему алгоритма [4] двухкомпонентного базиса вместо двухдиагонального позволяет накапливать допустимую относительно ε_k матрицу $A[I'_k, J'_k]$ за счет обобщенного [7] на этот случай метода Штурма [3] для вычисления сингулярных чисел. Возможная неоптимальность двухкомпонентного базиса относительно его размерности, как будет показано ниже, исправляется на последних шагах.

Заметим, что использование этой же схемы окаймлений в случае линейной независимости строк в конечном блоке $A[M_k, N_k]$ облегчается произвольным выбором номера $i_t \in M_k \setminus I^{(t)} \neq \emptyset$, так как тогда достаточным условием для хорошей обусловленности матрицы $A[I^{(t+1)}, J^{(t+1)}]$ является наибольшее отклонение от нуля левой части неравенства (I2) на номере $j_t \in N_k \setminus J^{(t)}$. В случае линейной независимости столбцов номера i_t и j_t меняются ролями.

2. Основной частью алгоритма [I], опирающегося на перебор множеств L_s по возрастанию $s = 0, 1, \dots, 2$, является построение для некоторой матрицы $B[I, J]$ с линейно-независимыми строками последовательности (II), обрывающейся на $I^{(t+1)} = I^{(m)} = I$. Выбор пары i_t, j_t для очередного $t = 1, 2, \dots, m-1$ сопровождается левосторонними преобразованиями симплекс-таблицы

$$\begin{bmatrix} H_t[I^{(t)}, J] \\ B[i_t, J] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D[I^{(t)}, J^{(t)}] & H_t[I^{(t)}, J \setminus J^{(t)}] \\ B[i_t, J^{(t)}] & B[i_t, J \setminus J^{(t)}] \end{bmatrix} \quad (13)$$

при любом $i_t \in I \setminus I^{(t)}$ в следующих условиях: на номере j_t реализуется максимум величины $|H_t[i_t, j]|$, $j \in J \setminus J^{(t)}$, из строки

$$H_t[i_t, J] = B[i_t, J] - B[i_t, J^{(t)}] \cdot D^{-1}[J^{(t)}, I^{(t)}] \cdot H_t[I^{(t)}, J] \quad (14)$$

с нулевой частью $H_t[i_t, J^{(t)}]$, а преобразование матрицы $H_t[I^{(t+1)}, J]$ в $H_{t+1}[I^{(t+1)}, J]$ строится из условия $H_{t+1}[I^{(t+1)}, j_t] = D[I^{(t+1)}, j_t]$, где матрица $D[I^{(p)}, J^{(p)}]$ как при $p = t$, так и при $p = t+1$ диагональная с элементами $D[i_h, j_h] = 1$, $h = 1, 2, \dots, p-1$. При этом очевидно, что правостороннее преобразование $H[J, J]$, исключаяе клетку $B[I, J \setminus J^{(m)}]$ в матрице $B[I, J]$, отличается от единичной матрицы $E[J, J]$ разве лишь блоком

$$H[J^{(m)}, J \setminus J^{(m)}] = -D^{-1}[J^{(m)}, I] \cdot H_m[I, J \setminus J^{(m)}].$$

Модификация алгоритмов [1, 2] состоит в том, что некоторые из заранее выбранных множеств I'_k, J'_k ($k \in S$) включаются в начальные множества $I^{(0)}, J^{(0)}$ последовательности (II), а начальная симплекс-таблица (13) при $t = 1$ вычисляется из решения системы уравнений

$$B[I^{(0)}, J^{(0)}] \cdot \{D^{-1}[J^{(0)}, I^{(0)}] \cdot H_1[I^{(0)}, J]\} = B[I^{(0)}, J] \quad (15)$$

со специальной матрицей $B[I^{(0)}, J^{(0)}]$.

Заметим, что последовательность полных симплекс-таблиц $H_t[I, J]$, $t = 1, 2, \dots, m$, преобразуемых, начиная с $H_1[I, J] = B[I, J]$ и $J^{(0)} = \emptyset$, с соблюдением равенства $H_{t+1}[I, J^{(t+1)}] = D[I, J^{(t+1)}]$ при очередном $t < m$, позволяет получить матрицу, обратную к $B[I, J^{(m)}]$, в мультипликативном виде:

$$B^{-1}[J^{(m)}, I] = D^{-1}[J^{(m)}, I] \cdot E_{m-1}[I, I] \cdot \dots \cdot E_2[I, I] \cdot E_1[I, I],$$

где множитель $E_t[I, I]$ при каждом $t = 1, 2, \dots, m-1$ отличается от единичной матрицы $E[I, I]$ разве лишь столбцом

$$E_t[I, i_t] = E[I, i_t] - \frac{1}{H_t[i_t, j_t]} \cdot \{H_t[I, j_t] - E[I, i_t]\}.$$

3. Для каждого $k \in Z \setminus S$ объединим в S_{-k} те вершины $\beta \in S$, из которых есть путь в одну из вершин множества Z_{-k} .

Предположим, что для некоторого $\beta \geq 0$ определены такие базисные матрицы $B^\beta[I_{(-1)\beta}^\alpha, J_{(-1)\beta}^\alpha]$, $\alpha \in L_\beta$, в частности $B^0[I_{-1}^0, J_{-1}^0] = A[M, N]$, что при любом $k \in Z^{-\alpha}$ в случае $k < 0$ (последнее всегда совпадает со случаем нулевого или четного β) имеем

$$I'_\beta \subset M_k \cap I_{(-1)\beta}^\alpha = I_{(-1)\beta}^k, J'_\beta \subset N_k \cap J_{(-1)\beta}^\alpha = \tilde{N}^k, \beta \in S_{-k},$$

а если $k > 0$ (что всегда равносильно нечетному β), то по симметрии имеем

$$I'_\beta \subset M_k \cap I_{(-1)\beta}^\alpha = \tilde{M}^k, J'_\beta \subset N_k \cap J_{(-1)\beta}^\alpha = J_{(-1)\beta}^k, \beta \in S_{-k}.$$

Распространяя определение множества \tilde{M}^k на $k < 0$, а множества \tilde{N}^k на $k > 0$, для любой вершины $k \in Z^{-\alpha}$, в частности для концевой ($Z_k = \emptyset$), определим матрицу

$$B^{\beta+1}[\tilde{M}^k, \tilde{N}^k] = T^\beta[\tilde{M}^k, \tilde{M}^k] \cdot A[\tilde{M}^k, \tilde{N}^k] \cdot R^\beta[\tilde{N}^k, \tilde{N}^k], \quad (16)$$

где преобразования $T^\beta[\tilde{M}^k, \tilde{M}^k]$ и $R^\beta[\tilde{N}^k, \tilde{N}^k]$ исключают для всех $\tau \in Z_k$ полосы $A[\tilde{M}^\tau, I^\tau, J^\tau]$ и $A[I^\tau, \tilde{N}^\tau, J^\tau]$ с помощью базиса $A[I^\tau, J^\tau]$, в котором $I^\tau = \tilde{M}^\tau, J^\tau \subset \tilde{N}^\tau$, если $k < 0$, или $I^\tau \subset \tilde{M}^\tau, J^\tau = \tilde{N}^\tau$, если $\tau > 0$. Положим

$$M_{-1}^k = \tilde{M}^k \setminus \left(\bigcup_{\tau \in Z_k} I^\tau \right), k < 0, N_1^k = \tilde{N}^k \setminus \left(\bigcup_{\tau \in Z_k} J^\tau \right), k > 0,$$

и с целью выбора базисного множества $J_1^k \subset N_1^k$ ($k \in Z^{-\alpha}, \alpha \in L_\beta$) при нулевом или четном β и при $Z_{-k} \neq \emptyset$ подставим в симплексо-таблицу (I3) вместо матрицы $B[I, J]$ вырезку $B^{\beta+1}[I_1^k, N_1^k]$ с линейно-независимыми строками из матрицы (16), а в начальные множества $I^{(1)}$ и $J^{(1)}$ последовательности (II) объединим I'_β ($\beta \in S_{-k}$) и J'_β ($\beta \in S_{-k}$) соответственно. При этом $J'_\beta \subset N_1^k$ для всех $\beta \in S_{-k}$ на основании свойств (2) и определенных множеств \tilde{N}^k, N_1^k . В результате алгоритма (I3)-(I5) получим базисное множество $J_1^k = J^{(m)}$. Аналогично, с целью выбора базисного множества $I_{-1}^k \subset M_{-1}^k$ ($k \in Z^{-\alpha}, \alpha \in L_\beta$) при нечетном β и при $Z_{-k} \neq \emptyset$ подставим вместо матрицы $B[I, J]$ транспонированную вырезку $B^{\beta+1}[M_{-1}^k, J_{-1}^k]$ из матрицы (16), а в начальные множества $I^{(1)}$ и $J^{(1)}$ объединим J'_β ($\beta \in S_{-k}$) и I'_β ($\beta \in S_{-k}$) соответственно. В резуль-

тате получим $I_i^k = J^{(m)}$. Заметим, что при этих подстановках в выражении (I4) полезно учитывать слабую заполненность строки $B[i_t, J^{(t)}]$ ненулевыми элементами, так как $Z^{-k} \neq \emptyset$, а матрица (I6) наследует структуру блока $A[\tilde{M}^k, \tilde{N}^k]$, причем новые ненулевые элементы появляются разве лишь в вырезке $B^{s+1}[M_k \cap \tilde{M}^k, N_k \cap \tilde{N}^k]$.

Если $Z^{-k} = \emptyset$ для некоторого $k \in Z^{-\alpha}$ ($\alpha \in L_s, 0 \leq s \leq z$), то $I_k = I_1^k$ ($k < 0$) или $J_k = J_{-1}^k$ ($k > 0$), и в случае $k \notin S$ выбор множества $J_k \subset N_1^k$ ($k < 0$) или $I_k \subset M_{-1}^k$ ($k > 0$) сопровождается преобразованием соответствующей вырезки из матрицы (I6) в виде полной симплекс-таблицы (п.2) с вычислением матрицы, обратной к $B^{s+1}[I_k, J_k]$.

Если $k \in Z^{-\alpha} \cap S$ и при этом $I_k, I'_k \neq \emptyset$ ($k < 0$) или $J_k, J'_k \neq \emptyset$ ($k > 0$), что возможно разве лишь для $\alpha \in Z^{-\{k\}}$, то базис $A[I_k, J_k]$ можно получить соответствующим случаю специальным алгоритмом (п.1) с начальными множествами $I^{(1)} = I'_k$, $J^{(1)} = J'_k$ последовательности (II) в условиях линейной независимости строк в матрице $A[I_k, \tilde{N}^k]$ ($k < 0$) или столбцов в матрице $A[\tilde{M}^k, J_k]$ ($k > 0$), содержащихся в концевом блоке $A[M_k, N_k]$. В этих случаях компенсируется как несовершенство специального алгоритма при первоначальном выборе базиса в блоке $A[M_k, N_k]$, так и возможное завышение барьера E_k по сравнению со степенью обусловленности исходной матрицы $A[M, N]$. Заметим кстати, что верхней границей для барьера E_k может служить наименьшее сингулярное число в базисных подматрицах блоков $A[M_k, N_k]$ с линейно-независимыми строками ($k \in Z^k \cap S$) или столбцами ($k \in Z^{-k} \cap S$).

ЛИТЕРАТУРА

1. ЗВЯГИНА Р.А. Упорядочение блоков при обновлении базиса с блочной структурой. - Оптимизация, 1983, вып. 33(50), с. 44-55.
2. ЗВЯГИНА Р.А. Приведение к блочно-треугольному виду матрицы с симметрично разветвленной блочностью. - Оптимизация, 1981, вып. 26(43), с.34-44.
3. ГОДУНОВ С.К. Решение систем линейных уравнений. - Новосибирск: Наука, 1980.
4. ЗВЯГИНА Р.А. Выявление хорошо обусловленного блока в прямоугольной матрице. - Оптимизация, 1983, вып. 31(48), с. 48-61.

5. ЗВЯГИНА Р.А. Об оценке погрешности в системе с клеточным разбиением матрицы. - Оптимизация, 1984, вып. 34(51), с.76-88.
6. ЯКОВЛЕВА М.А. Транспортная задача с окаймлением. - Оптимизация, 1974, вып. 15(32), с.79-89.
7. ЯКОВЛЕВА М.А. Вычисление сингулярных чисел базисной матрицы в двухкомпонентных задачах линейного программирования. - Оптимизация, 1983, вып. 31(48), с. 74-89.
8. HELLERMAN E., RARICK D.C. Reinversion with the preassigned pivot procedure.- Math. Programming, 1971, v.1, p.195-216.
9. МАЛКОВ У.Х. Обзор путей повышения эффективности мультипликативного алгоритма симплекс-метода. - Математические методы решения экономических задач, 1977, №7, с.30-51.

Поступила в ред.-изд. отдел
21.01.1985 г.