УДК 519.865.3

КОНЕЧНЫЙ АЛГОРИТМ ОТЫСКАНИЯ РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ ОБМЕНА

В.И.Шмырев

В работе рассматривается модель обмена в следующей постановке. Пусть $I=\{1,2,\dots,m\}$ - множество (номеров) участников, а $J=\{1,2,\dots,n\}$ - множество продуктов модели. Для каждого из участников $i\in I$ заданы два неотрицательных вектора: $d^i=(d_1^i,d_2^i,\dots,d_n^i)$ и $c^i=(c_1^i,c_2^i,\dots,c_n^i)$. Компонента d_j^i указывает количество j -го товара, которым располагает для обмена i-й участник. Обмен осуществляется по ценам, задаваемым вектором цен $p=(p_1,p_2,\dots,p_n)\geq 0$. При фиксированном векторе цен i-й участник решает задачу об отыскании такого неотрицательного вектора $x^i=(x_1^i,x_2^i,\dots,x_n^i)$, который доставляет максимальное значение функции (c^i,x^i) при соблюдении бюджетного ограничения $(p,x^i)=(p,d^i)$. Состояние равновесия определяется равновесным вектором цен p , для которого среди оптимальных решений задач участников найдутся такие решения $\bar{x}^i$, что $\sum_{i\in I}(\bar{x}^i-d^i)=0$.

По существу, без сужения общности предполагаются выполненными следующие условия:

1) $\sum_{i\in I} d^i=(1,\dots,1)=\vartheta$;

2) $c^i, d^i\neq 0 \quad \forall i\in I$;

3) $\max_{i\in I} c_j^i>0, \max_{i\in I} d_j^i>0 \quad \forall j\in J$;

4) $p\in\sigma=\{p\in R^n \mid p\geq 0, (p,\vartheta)=1\}$.

В приведенной постановке модель обмена рассматривалась Д.Гейлом [I,2], который получил необходимое и достаточное условие существования состояния равновесия. Для частного случая, когда все d^i пропорциональны вектору v, т.е. $d^i=\lambda_i v$ (модель с фиксированными бюджетами), он показал также [I], что векторы $\bar{x}^i$, отвечающие состоянию равновесия, образуют решение задачи максимизации функции $\prod_{i\in I}(c^i, x^i)^{\lambda_i}$ на множестве всевозможных наборов неотрицательных векторов $x^i, i\in I$, удовлетворяющих условию $\sum_{i\in I} x^i = v$. Для общего случая Ивесом предложен конечный алгоритм [3], основанный на сведении исходной задачи к некоторой задаче дополнительности. Осложняющим обстоятельством при применении этого подхода является значительная размерность возникающей задачи дополнительности - порядка $m\times n$.

Предлагаемый в настоящей работе конечный алгоритм основан на рассмотрении порождаемых моделью полиэдральных разбиений симплекса цен и использует некоторое свойство монотонности [4] возникающего кусочно-постоянного отображения, неподвижные точки которого и задают состояния равновесия модели.

§I. Описание алгоритма

Чтобы не осложнять изложение, проведем основные рассмотрения в предположении, что $c^i>0$ при всех $i\in I$. Это предположение гарантирует существование состояния равновесия (см. [2]). На возможных обобщениях процесса для общего случая остановимся в конце работы.

Для полноты изложения напомним кратко построения, уже использованные автором в [4]. Свяжем с исследуемой моделью параметрическую транспортную задачу линейного программирования, рассматривая в качестве параметров цены p_j:

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} z_{ij}\ln c^i_j - max! \tag{I}$$

$$\sum_{j\in J} z_{ij}=(p,d^i),\ i\in I; \tag{2}$$

$$\sum_{i\in I} z_{ij}=p_j, \quad j\in J; \tag{3}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i,j) \in I \times J. \tag{4}$$

Отметим, что эта задача разрешима при любом $p \in \sigma$.

Назовем множество $\mathcal{B} \subset I \times J$ i-накрывающим, если для каждого $i \in I$ непусто множество $\{j \in J \mid (i,j) \in \mathcal{B}\}$. Пусть $\mathcal{b}$ - совокупность двойственно-допустимых базисных множеств введенной транспортной задачи и их всевозможных i-накрывающих подмножеств. Каждому $\mathcal{B} \in \mathcal{b}$ сопоставляется пара множеств, которые будем обозначать $\Omega(\mathcal{B})$ и $\Xi(\mathcal{B})$.

Множество $\Omega(\mathcal{B})$ представляет собой совокупность тех $p \in \sigma$, при которых совместна система условий (2)-(4) вместе с дополнительным условием

$$x_{ij} = 0, \quad (i,j) \notin \mathcal{B}. \tag{5}$$

Ввиду $\mathcal{B} \in \mathcal{b}$ величины $x_{ij} = x_{ij}^{\mathcal{B}}(p)$ определяются этими условиями однозначно и образуют для данного p оптимальное решение транспортной задачи (I)-(4). Легко указать необходимые и достаточные условия совместности системы уравнений (2),(3),(5). Для этого множеству $\mathcal{B}$ сопоставим граф $\Gamma(\mathcal{B})$ с множеством вершин $V = \{1, 2, \ldots, m+n\}$ и множеством дуг $\{(i, m+j) \mid (i,j) \in \mathcal{B}\}$. Каждая из компонент связности этого графа будет деревом. Пусть компоненты связности занумерованы значениями индекса $\nu \in \mathcal{N}(\mathcal{B})$ и V_ν - множество вершин ν-й компоненты. Положим $I_\nu = I \cap V_\nu$, $J_\nu = \{j \in J \mid (m+j) \in V_\nu\}$. Упомянутые условия совместности системы (2),(3),(5) задаются системой уравнений

$$\sum_{j \in J_\nu} p_j = \sum_{i \in I_\nu} (p, d^i), \quad \nu \in \mathcal{N}(\mathcal{B}). \tag{6}$$

Так как $x_{ij}^{\mathcal{B}}(p)$ являются линейными функциями параметров p_j , то $\Omega(\mathcal{B})$ - многогранник, задаваемый системой линейных уравнений (6), системой линейных неравенств

$$x_{ij}^{\mathcal{B}}(p) \geq 0, \quad (i,j) \in \mathcal{B}, \tag{7}$$

и условием $p \in \sigma$. Заметим, что неотрицательность p_j следует из (3),(4), а потому условие $p \in \sigma$ при описании $\Omega(\mathcal{B})$ можно заменить условием

$$\sum_{j \in J} p_j = 1. \tag{8}$$

Множество $\Xi(\mathcal{B})$ можно охарактеризовать как совокупность тех $q\in\sigma^\circ$ (σ° - относительная внутренность симплекса σ), при которых множество "рентабельных" товаров в задаче i-го участника совпадает с множеством $\{j\in J\,|\,(i,j)\in\mathcal{B}\}$. Точнее говоря, множество $\Xi(\mathcal{B})$ задается условием $q\in\sigma^\circ$ и следующей системой уравнений и неравенств:

$$\frac{c_k^i}{q_k}=\frac{c_j^i}{q_j}\quad,(i,j),(i,k)\in\mathcal{B},\tag{9}$$

$$\frac{c_l^i}{q_l}\le\frac{c_j^i}{q_j}\quad,(i,l)\notin\mathcal{B},(i,j)\in\mathcal{B}.\tag{10}$$

Легко видеть, что если $p\in\Omega(\mathcal{B})\cap\Xi(\mathcal{B})$ при некотором $\mathcal{B}\in\mathcal{b}$, то p - равновесный вектор цен модели. Действительно, так как $p\in\Omega(\mathcal{B})$, то величины z_{ij}, решающие систему (2), (3), (5), являются неотрицательными, а векторы $\bar{x}^i$ с компонентами $\bar{x}_j^i=z_{ij}/p_j$ - допустимыми в задачах участников. Из $p\in\Xi(\mathcal{B})$ следует, что эти векторы будут и оптимальными в этих задачах. Условие же (3) дает $\sum_{i\in I}\bar{x}^i=\vartheta(=\sum_{i\in I}d^i)$, т.е. p - равновесный вектор.

Несложно показать и обратное: если p - равновесный вектор цен, то $p\in\Omega(\mathcal{B})\cap\Xi(\mathcal{B})$ при некотором $\mathcal{B}\in\mathcal{b}$. В связи с этим для $\mathcal{B}\in\mathcal{b}$ будем рассматривать совместно систему (6) и систему (9), которую перепишем в виде:

$$\frac{p_k}{c_k^i}=\frac{p_j}{c_j^i}\quad,(i,j),(i,k)\in\mathcal{B}.\tag{11}$$

Система (6),(11) всегда имеет ненулевое неотрицательное решение. Действительно, система (II) задает некоторые пропорции между величинами p_j, соответствующими одной и той же компонете связности графа $\Gamma(\mathcal{B})$, т.е. общее решение этой системы имеет вид:

$$p_j=\pi_\nu g_j\ ,\quad j\in J_\nu,\quad \nu\in\mathcal{N}(\mathcal{B}),\tag{12}$$

где π_ν - произвольные параметры, а g_j - положительные константы, задающие упомянутые пропорции. Подставляя представление (12) в (6), получим

$$\pi_\nu\cdot\sum_{j\in J_\nu}g_j=\sum_{i\in I_\nu}\sum_{\mu\in\mathcal{N}(\mathcal{B})}\pi_\mu\sum_{j\in J_\mu}d_j^i g_j,\quad \nu\in\mathcal{N}(\mathcal{B}).\tag{13}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $\sum_{i\in J_\nu} g_j = 1$ при всех $\nu \in \mathcal{N}(\mathcal{B})$. В результате, объединяя $\mathcal{X}_\nu$ и вектор $\mathcal{X}$, систему (I3) можно переписать в векторном виде:

$$\mathcal{X} = \gamma \mathcal{X}, \tag{I4}$$

где γ - неотрицательная квадратичная матрица, обладающая тем свойством, что сумма ее элементов в каждом столбце равна единице. Иными словами, γ^T - стохастическая матрица, а следовательно, система (I4) имеет ненулевые неотрицательные решения. Каждое такое решение дает в соответствии в (I2) ненулевое неотрицательное решение системы (6),(II).

Таким образом, система (6) имеет ненулевые неотрицательные решения при любом $\mathcal{B} \in \mathcal{D}$.

Перейдем к описанию алгоритма. К началу s-го шага процесса имеется некоторое множество $\mathcal{B}_s \in \mathcal{D}$ и точки $p^s \in \Omega(\mathcal{B}_s), q^s \in \Xi(\mathcal{B}_s)$. Рассмотрим систему (6),(II), порождаемую множеством $\mathcal{B} = \mathcal{B}_s$. Определим какое-либо из ее решений $p = r^s$, принадлежащее симплексу σ. Положим $p(t) = p^s + t(r^s - q^s), q(t) = q^s + t(r^s - q^s)$ и найдем максимальное $t = t_s$ из отрезка [0,I], при котором $p(t) \in \Omega(\mathcal{B}_s), q(t) \in \Xi(\mathcal{B}_s)$.

Если оказалось $t_s = 1$, то тем самым $p = r^s$ - искомый равновесный вектор цен рассматриваемой модели. Если же $t_s < 1$, то будем различать два случая:

(i) лимитирующим условием при определении t_s оказалось условие $p(t) \in \Omega(\mathcal{B}_s)$, т.е. какое-то из неравенств (7) для $p = p(t)$, например, неравенство при $(i,j) = (i_0, j_0)$; в этом случае принимается $\mathcal{B}_{s+1} = \mathcal{B}_s \setminus \{(i_0, j_0)\}$.

(ii) лимитирующим условием при определении t_s оказалось условие $q(t) \in \Xi(\mathcal{B}_s)$, т.е. какое-то из неравенств (I0) для $q = q(t)$, например, неравенство при $(i,l) = (i', l')$; в этом случае принимается $\mathcal{B}_{s+1} = \mathcal{B}_s \cup \{(i', l')\}$.

Если реализовать обе из указанных возможностей, то выбираем любую из них. Вне зависимости от этого полагаем $p^{s+1} = p(t_s), q^{s+1} = q(t_s)$ и переходим к следующему шагу процесса.

Для обоснования корректности приведенного описания алгоритма нужно показать, что максимальное $t = t_s$ всегда существует, а $\mathcal{B}_{s+1} \in \mathcal{D}$.

Пусть $\hat{t}_s = \sup\{t \in [0,1] / q(t) \in \Xi(\mathcal{B}_s), p(t) \in \Omega(\mathcal{B}_s)\}$. Легко видеть, что так как $r^s \geq 0$, то $\hat{t}_s$ может не достигаться лишь в том случае, когда $\hat{t}_s = 1$ и среди компонент τ_j^s есть нулевые. Пусть $\tau_{j'}^s = 0$. Так как $\tau^s \neq 0$, то найдется $\tau_{j''}^s > 0$. Из этого, в свою очередь, следует существование такого $i_0 \in I$, что $(i_0, j'') \in \mathcal{B}_s$. Очевидно, что при t, достаточно близких к единице, будет нарушаться неравенство

$$\frac{c_{j''}^{i_0}}{q_{j''}(t)} \geq \frac{c_{j'}^{i_0}}{q_{j'}(t)},$$

входящее в систему (10) для $\mathcal{B} = \mathcal{B}_s$, а значит, $q(t) \notin \Xi(\mathcal{B}_s)$. Тем самым $\hat{t}_s < 1$ и $\hat{t}_s$ достигается, т.е. $\hat{t}_s = t_s$.

Проверим, что $\mathcal{B}_{s+1} \in \mathcal{b}$. В случае (i) достаточно заметить, что вершина i_0 (как, впрочем, и вершина $(m+j_0)$) не может быть концевой вершиной графа $\Gamma(\mathcal{B}_s)$, ибо $\tau^s \geq 0$, и если бы i_0 была концевой вершиной, то мы имели бы $z_{i_0 j_0}(\tau^s) = (d^{i_0}, \tau_s) \geq 0$, а тогду условие $z_{i_0 j_0}(p(t)) \geq 0$ не могло бы быть лимитирующим при определении t_s. Таким образом, при исключении пары (i_0, j_0) из множества $\mathcal{B}_s$ снова получится i-накрывающее множество, и, следовательно, в этом случае $\mathcal{B}_{s+1} \in \mathcal{b}$.

В случае (ii) множество $\mathcal{B}_{s+1}$ получается пополнением множества $\mathcal{B}_s$ парой (i', ℓ'), и, значит, i-накрываемость сохраняется. Нужно показать, что $\mathcal{B}_{s+1}$ можно дополнить до базисного двойственно допустимого множества транспортной задачи (1)-(4). Для этого необходимо и достаточно, чтобы нашлись числа $u_i, i \in I$, и $v_j, j \in J$, такие, что

$$u_i + v_j = \ln c_j^i, \ (i,j) \in \mathcal{B}, \qquad (9')$$

$$u_i + v_j \geq \ln c_j^i, \ (i,j) \notin \mathcal{B}, \qquad (10')$$

для $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{s+1}$, причем условия (9′) должны быть линейно-независимыми. Легко видеть, что этим условиям удовлетворяют $v_j = \ln q_j^{s+1}$; $u_i = \max(\ln c_j^i - v_j)$. Линейная независимость условий (9′) эквивалентна отсутствию циклов в графе $\Gamma(\mathcal{B})$. Последнее следует для $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{s+1}$ из того, что это так для $\mathcal{B} = \mathcal{B}_s$, а вершины i' и $(m + \ell')$ не лежат на одной компоненте связности графа $\Gamma(\mathcal{B}_s)$, ибо иначе условие (10) при $(i, \ell) = (i', \ell')$ не могло бы быть лимитирующим для величины t_s.

Таким образом, приведенное выше описание алгоритма корректно. Начальное множество $\mathcal{B}_0 \in \mathcal{b}$ и точки $q^0 \in \Xi(\mathcal{B}_0)$,

$p^0 \in \Omega(\mathcal{B}_0)$ легко получить, например, следующим образом. Зафиксируем произвольно $p^0 \in \mathfrak{S}$ и решим при $p = p^0$ транспортную задачу (I)-(4). Получающееся при этом базисное множество и принимается в качестве $\mathcal{B}_0$. После этого точка $q^0 \in \mathfrak{S}^0$ однозначно определяется из системы (9), порождаемой множеством $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0$.

§2. Сходимость алгоритма

Приведем доказательство сходимости рассматриваемого алгоритма при предположении, обеспечивающем в некотором смысле невырожденное течение процесса. Для формулировки этого предположения введем одно вспомогательное понятие.

Заметим, что для переменных точек $p(t)$ и $q(t)$, вводимых на s-м шаге, выполняется равенство

$$p(t)-q(t)=tz^s+(1-t)p^s-tz^s-(1-t)q^s=(1-t)(p^s-q^s)$$

и, значит,

$$p^{s+1}-q^{s+1}=(1-t_s)(p^s-q^s)=\ldots=(1-t_s)\ldots(1-t_0)(p^0-q^0).$$

Таким образом, точки $p=p^{s+1}$ и $q=q^{s+1}$ при $\mu=\mu_{s+1}=(1-t_s)\ldots(1-t_0)$ удовлетворяютт равенству

$$p-q=\mu(p^0-q^0). \tag{I5}$$

Иными словами, p^{s+1} и q^{s+1} образуют допустимую пару точек в смысле следующего определения.

Пару точек (p, q) назовем допустимой, если при некотором $\mathcal{B} \in \mathfrak{b}$ точки p и q принадлежат соответственно множествам $\Omega(\mathcal{B})$ и $\Xi(\mathcal{B})$ и при подходящем $\mu \in [0,1]$ удовлетворяют равенству (I5).

Для $q \in \Xi(\mathcal{B})$ введем величины $y_i = c_j^i / q_j, (i,j) \in \mathcal{B}$, и, используя их, перепишем систему неравенств (I0) в эквивалентном виде:

$$y_i q_l \geq c_l^i, \quad (i, l) \notin \mathcal{B}. \tag{I6}$$

Предположение невырожденности: для любой допустимой пары (p, q) и отвечающего ей множества $\mathcal{B} \in \mathfrak{b}$ такого, что $p \in \Omega(\mathcal{B}), q \in \Xi(\mathcal{B})$, разве лишь одно из неравенств систем (7),(I6) обращается в равенство.

Помимо этого предположения будем предполагать также, что система уравнений (6),(II), порождаемая начальным множеством

$\mathcal{B}=\mathcal{B}_0$, имеет ранг $(n-1)$. Это так, если начальное множество $\mathcal{B}_0$ определяется как указывалось выше. Покажем, что в таком случае это условие выполняется для всех $\mathcal{B}_s$. Так как ранг системы (6),(II) не превосходит $(n-1)$ при любом $\mathcal{B}\in\mathfrak{B}$, то достаточно показать, что при переходе от $\mathcal{B}_s$ к $\mathcal{B}_{s+1}$ ранг указанной системы не уменьшается. Пусть, например, при определении t_s реализовался случай (i) и $\mathcal{B}_{s+1}=$ $=\mathcal{B}_s\setminus\{(i_0,j_0)\}$. Исключение пары (i_0,j_0) вызовет разбиение одной из компонент связности графа $\Gamma(\mathcal{B}_s)$ на две компоненты. Пусть, для определенности, это компонента связности с номером τ, которой соответствует пара множеств I_τ, J_τ. Исключение дуги $(i_0, m+j_0)$ вызовет разбиение каждого из этих множеств на два подмножества: $I_\tau=I'_\tau\cup I''_\tau$, $J_\tau=J'_\tau\cup J''_\tau$. Пусть $i_0\in I'_\tau$ и, следовательно, $j_0\in J''_\tau$. В системе уравнений (6) при переходе от $\mathcal{B}_s$ к $\mathcal{B}_{s+1}$ уравнение

$$\sum_{j\in J_\tau} p_j=\sum_{i\in I_\tau}(p,d^i)$$

заменится двумя уравнениями:

$$\sum_{j\in J'_\tau} p_j=\sum_{i\in I'_\tau}(p,d^i), \tag{17}$$

$$\sum_{j\in J''_\tau} p_j=\sum_{i\in I''_\tau}(p,d^i).$$

Это эквивалентно тому, что к прежней системе (6) добавляется дополнительное уравнение (17). Заметим, однако, что, как несложно получить,

$$\varkappa^{\mathcal{B}_s}_{i_0 j_0}(p)=\sum_{i\in I'_\tau}(p,d^i)-\sum_{j\in J'_\tau}p_j \quad , \tag{18}$$

и, следовательно, добавляемое уравнение (17) не является следствием системы (6), (II) при $\mathcal{B}=\mathcal{B}_s$, ибо для решения этой системы $p=\tau^s$ мы имеем $\varkappa^{\mathcal{B}_s}_{i_0 j_0}(\tau^s)<0$. Поэтому ранг расширенной системы (6),(II),(17) на единицу больше ранга прежней системы (6),(II).

Теперь рассмотрим, как меняется система (II) при переходе от $\mathcal{B}_s$ к $\mathcal{B}_{s+1}$. Эта система, как уже отмечалось выше, задает определенные пропорции между величинами p_j, соответствующими одной и той же компоненте связности. Ясно, что при удалении дуги $(i_0, m+j_0)$ ранг этой системы уменьшится на единицу, а значит, ранг рассмотренной выше системы (6),(II),(I7) также может понизиться лишь на единицу. Но получаемая в результате система будет эквивалентна системе (6),(II) при $\mathcal{B}=\mathcal{B}_{s+1}$. Тем самым, в случае ($i$) ранг системы (6),(II) не убывает при переходе от $\mathcal{B}_s$ к $\mathcal{B}_{s+1}$. Доказательство для случая (ii) проводится по аналогичной схеме.

Наши рассмотрения также значительно упростятся, если предположить $\rho^{\circ}>0$. Это видно из следующей леммы.

ЛЕММА I. Если для некоторого $\mathcal{B}\in\mathcal{A}$ выполняется $\Omega(\mathcal{B})\cap\sigma^{\circ}\neq\emptyset$ и система (6), (II) имеет ранг $(n-1)$, то матрица γ соответствующей системы (I4) неразложима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что структура матрицы γ (т.е. взаимное расположение ее нулевых и ненулевых элементов) не зависит от конкретных пропорций между ρ_j на компонентах связности графа $\Gamma(\mathcal{B})$, задаваемых системой (II), а определяется лишь самой структурой графа $\Gamma(\mathcal{B})$ и структурой матрицы векторов d^i, $i\in I$. Пусть $\hat{\rho}\in\Omega(\mathcal{B})\cap\sigma^{\circ}$. Зададим пропорции между ρ_j на каждой компоненте связности графа $\Gamma(\mathcal{B})$ такими, как у компонент вектора $\hat{\rho}$, т.е. положим g_j в (I2) равными $\hat{\rho}_j/\sum_{k\in J_\nu}\hat{\rho}_k$ при $j\in J_\nu$, $\nu\in\mathcal{N}(\mathcal{B})$. В результате получим систему вида (I4) с матрицей $\hat{\gamma}$, вообще говоря, отличной от матрицы γ, но совпадающей с ней по своей структуре. Для этой системы можем указать строго положительное решение: $\pi_\nu=\sum_{j\in J_\nu}\hat{\rho}_j$, $\nu\in\mathcal{N}(\mathcal{B})$, т.е. максимальному характеристическому числу $\lambda=1$ матрицы $\hat{\gamma}$ отвечает положительный собственный вектор. Поскольку это так и для транспонированной матрицы $\hat{\gamma}^T$, ибо она стохастическая, то это означает, что $\hat{\gamma}$, а значит, и γ некоторой перестановкой строк и такой же перестановкой столбцов может быть приведена к блочно-диагональному виду, и каждый из диагональных блоков неразложим [5, с.376]. Так как γ^T - стохастическая матрица, то $\lambda=1$ является характеристическим числом для каждого ее диагонального блока. Но по предположению система (6),(II) имеет ранг $(n-1)$, а это означает, что система (I4) имеет ранг $(\tau-1)$. Поэтому число диагональных блоков не может быть больше единицы, т.е. γ - неразложимая матрица, что и требовалось доказать.

Из доказанной леммы следует, что если на некотором шаге процесса оказалось $\rho^{s}>0$, то матрица γ, получаемая на этом шаге, неразложима, а поэтому $\tau^s>0$ и, следовательно, $\rho^{s+1}>0$, т.е. свойство положительности вектора ρ^s сохраняется на последующих шагах процесса.

При доказательстве основного утверждения о сходимости процесса нам потребуется следующая

ЛЕММА 2. *Пусть A – неотрицательная матрица, x – ее положительный собственный вектор, λ – соответствующее ему характеристическое число матрицы A. Если для некоторого положительного вектора $\tilde{x}$ соответствующий ему вектор $\tilde{z}=\lambda\tilde{x}-A\tilde{x}$ таков, что $\tilde{z}_i=0$ при $i\neq i_1, i_2$, то условия*

(α) $\tilde{z}_{i_1}\geq 0$,

(β) $\dfrac{x_{i_1}}{x_{i_2}}\leq\dfrac{\tilde{x}_{i_1}}{\tilde{x}_{i_2}}$

эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для вектора $h=\tilde{x}-x$ выполняется

$$(\lambda E-A)h=\tilde{z},$$

где E – единичная матрица. Поскольку все условия однородны, то достаточно рассмотреть случай $x_{i_2}=\tilde{x}_{i_2}$, т.е. $h_{i_2}=0$. Тогда для вектора $\bar{h}=(h_1,\dots,h_{i_2-1},h_{i_2+1},\dots,h_n)$ получаем

$$(\lambda\bar{E}-\bar{A})\bar{h}=\bar{e}_{i_1}\tilde{z}_{i_1}, \tag{19}$$

где $\bar{E},\bar{A}$ – матрицы, полученные из матриц E и A вычеркиванием столбца и строки с номером i_2; аналогично $\bar{e}_{i_1}$ – единичный орт, полученный из орта e_{i_1} вычеркиванием компоненты с номером i_2. Обозначая для краткости $\lambda\bar{E}-\bar{A}$ через $\bar{H}$, можно сказать, что вектор $\bar{h}$ является решением системы линейных уравнений

$$\bar{H}w=\bar{e}_{i_1}\tilde{z}_{i_1}.$$

Так как A – неразложимая неотрицательная матрица, то максимальное характеристическое число любого главного минора этой матрицы строго меньше λ (см.[5, с.367]) и, в частности, это верно для минора $\bar{A}$. Поэтому матрица $\bar{H}$ – неособенная и $\bar{H}^{-1}\geq 0$. Кроме того, на том же основании можно утверждать, что все главные миноры матрицы $\bar{H}$ положительны [5, с.368], а потому положительны диагональные элементы матрицы $\bar{H}^{-1}$. Теперь из (I9) имеем

$$h_{i_1} = \bar{z}_{i_1}(\bar{e}_{i_1}, \bar{H}^{-1}\bar{e}_{i_1}),$$

и, следовательно, неравенства $h_{i_1} \geq 0$ и $\tilde{z}_{i_1} \geq 0$ эквивалентны, что и требовалось доказать. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА. Если $p^0 > 0$ и выполнено условие невырожденности, то рассматриваемый алгоритм дает равновесный вектор цен модели обмена за конечное число шагов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем прежде, что ввиду условия невырожденности на каждом шаге процесса, кроме разве лишь начального (т.е. при $s \neq 0$), величина t_s положительна.

Рассмотрим переход от множества $\mathcal{B}_s$ к множеству $\mathcal{B}_{s+1}$ в случае (i), т.е. когда $\mathcal{B}_{s+1} = \mathcal{B}_s \setminus \{(i_0, j_0)\}$. Так как множество $\mathcal{B}_{s+1}$ i- накрывающее, то найдется $(i_0, j_1) \in \mathcal{B}_{s+1}$. Вместе с тем $(i_0, j_0) \notin \mathcal{B}_{s+1}$, и мы можем записать соответствующее неравенство системы (I8) в виде

$$\frac{c_{j_1}^{i_0}}{q_{j_1}} q_{j_0} \geq c_{j_0}^{i_0}.$$

Это неравенство должно выполняться для любого $q \in \Xi(\mathcal{B}_{s+1})$. Оно выполняется как равенство для $q = q^{s+1} \in \Xi(\mathcal{B}_s) \subset \Xi(\mathcal{B}_{s+1})$. По условию невырожденности это единственное из неравенств системы (7),(I6), которое для допустимой пары (p^{s+1}, q^{s+1}) выполняется как равенство. Поэтому для того, чтобы показать, что t_{s+1} положительно, нужно показать, что это неравенство выполняется и при $q = r^{s+1}$, а потому не может оказаться лимитирующим при определении t_{s+1}. Таким образом, нужно показать, что

$$\frac{c_{j_1}^{i_0}}{r_{j_1}^{s+1}} \geq \frac{c_{j_0}^{i_0}}{r_{j_0}^{s+1}}. \tag{20}$$

Пусть число компонент связности у графа $\Gamma(\mathcal{B}_s)$ равно τ и, следовательно, $(\tau+1)$ у графа $\Gamma(\mathcal{B}_{s+1})$. Чтобы различать множества I_y, J_y, отвечающие компонентам связности графа $\Gamma(\mathcal{B}_{s+1})$ от аналогичных множеств для графа $\Gamma(\mathcal{B}_{s+1})$, будем писать I_y^s, J_y^s в первом случае и I_y^{s+1}, J_y^{s+1} - во втором. Пусть дуга $(i_0, m+j_0)$ принадлежит последней компоненте графа $\Gamma(\mathcal{B}_s)$, т.е. $i_0 \in I_\tau^s, j_0 \in J_\tau^s$. Сохраняя нумерацию прочих компонент связности неизменной, имеем $I_\nu^s = I_\nu^{s+1}, J_\nu^s = J_\nu^{s+1}$ при $\nu = 1, 2, \ldots, (\tau-1)$ и $I_\tau^s = I_\tau^{s+1} \cup I_{\tau+1}^{s+1}, J_\tau^s = J_\tau^{s+1} \cup J_{\tau+1}^{s+1}$.

Лимитирующим неравенством при определении t оказалось неравенство $x_{i_0 j_0}^{\mathcal{B}_s}(p(t)) \geq 0$. Это означает, что $x_{i_0 j_0}^{\mathcal{B}_s}(r^s) < 0$. Пусть $i_0 \in I_\tau^{s+1}$ и, следовательно, $j_0 \in J_{\tau+1}^{s+1}$. Воспользовавшись для $x_{i_0 j_0}^{\mathcal{B}_s}(p)$ представлением (I8), где $I_\tau' = I_\tau^{s+1}$, $J_\tau' = J_\tau^{s+1}$, имеем

$$\sum_{j \in J_\tau^{s+1}} r_j^s > \sum_{i \in J_\tau^{s+1}} (r^s, d^i). \tag{2I}$$

Но $p = r^s$ удовлетворяет системе (6) при $\mathcal{B} = \mathcal{B}_s$ и, в частности,

$$\sum_{j \in J_\tau} r_j^s = \sum_{i \in I_\tau} (r^s, d^i). \tag{22}$$

Вместе с (2I) это дает

$$\sum_{j \in J_{\tau+1}^{s+1}} r_j^s < \sum_{i \in I_{\tau+1}^{s+1}} (r^s, d^i) \tag{23}$$

Остальные равенства системы (6) при $\mathcal{B} = \mathcal{B}_s$ для $p = r^s$ можно переписать в виде

$$\sum_{j \in J_\nu^{s+1}} r_j^s = \sum_{i \in I_\nu^{s+1}} (r^s, d^i), \; \nu = 1, 2, \ldots, (\tau-1). \tag{24}$$

Теперь, сопоставляя полученные соотношения (24),(2I),(23), видим, что они представляют собой результат подстановки $p = r^s$ в систему (6) при $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{s+1}$. С другой стороны, этой системе отвечает система вида (I4) порядка $(\tau+1)$:

$$\pi = \gamma_{s+1} \pi \tag{25}$$

Легко видеть, что при формировании этой системы коэффициенты g_j в представлении (I2) задаются формулами

$$g_j = \frac{r_j^s}{\sum_{k \in J_\nu} r_k^s}, \; j \in J_\nu .$$

Это следует из того, что $p = r^s$ удовлетворяет (II) при $\mathcal{B} = \mathcal{B}_s$, а значит, и при $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{s+1} \subset \mathcal{B}_s$.

Учитывая сказанное, можно рассматривать соотношения (24), (2I),(23) как результат подстановки в систему (25) вектора $\pi = \tilde{\pi} \in R^{\tau+1}$ с компонентами

$$\tilde{\pi}_\nu = \sum_{j \in J_\nu} r_j^s, \quad \nu = 1, 2, \ldots, (\tau+1).$$

Поэтому для вектора $\tilde{z} = \tilde{\pi} - \gamma_{s+1}\tilde{\pi}$ имеем $\tilde{z}_\tau > 0, \tilde{z}_{\tau+1} < 0$ и $\tilde{z}_\nu = 0, \nu = 1, 2, \ldots, (\tau-1)$. Если $\rho^* \in \sigma^*$, то по лемме I матрица γ_{s+1} неразложима и по лемме 2

$$\frac{\pi_\tau^{s+1}}{\pi_{\tau+1}^{s+1}} < \frac{\tilde{\pi}_\tau}{\tilde{\pi}_{\tau+1}},$$

где $\pi_\tau^{s+1}, \pi_{\tau+1}^{s+1}$ - компоненты положительного вектора π^{s+1}, решающего систему (25). Умножая это неравенство на g_{j_1}/g_{j_0}, получим

$$\frac{r_{j_1}^{s+1}}{r_{j_0}^{s+1}} < \frac{r_{j_1}^s}{r_{j_0}^s}, \tag{26}$$

Но $\rho = r^s$ удовлетворяет системе (II) при $\mathcal{B} = \mathcal{B}_s$, и так как $(i_0, j_0), (i_0, j_1) \in \mathcal{B}_s$, то

$$\frac{r_{j_0}^s}{c_{j_0}^{i_0}} = \frac{r_{j_1}^s}{c_{j_1}^{i_0}}. \tag{27}$$

Поэтому (26) равносильно

$$\frac{r_{j_1}^{s+1}}{r_{j_0}^{s+1}} < \frac{c_{j_1}^{i_0}}{c_{j_0}^{i_0}},$$

и, следовательно, неравенство (20) выполнено, что и требовалось доказать.

Мы показали, что $t_{s+1} > 0$, если на s-м шаге реализовался случай (i). При этом мы воспользовались утверждением леммы 2 лишь частично: условие (β) необходимо для выполнения (α). Рассмотрение случая (ii) проводится по аналогичной схеме и основано на использовании достаточности в указанной логической связке. Ради полноты изложения приведем соответствующие рассуждения.

Для достижения большего сходства с уже рассмотренным случаем (i) будем считать, что $\mathcal{B}_{s+1} = \mathcal{B}_s \cup \{(i_0, j_0)\}$. Это означает, что для t_s лимитирующим оказалось неравенство вида

$$\frac{c_{j_0}^{i_0}}{q_{j_0}(t)} \leq \frac{c_{j_1}^{i_0}}{q_{j_1}(t)}, \qquad (28)$$

где $(i_0, j_1) \in \mathcal{B}_s$. При переходе от $\mathcal{B}_s$ к $\mathcal{B}_{s+1}$ в систему неравенств (7) добавится неравенство $x_{i_0 j_0}^{\mathcal{B}_{s+1}}(p) \geq 0$, которое для $p = p^{s+1}$ выполняется как равенство. По условию невырожденности это единственное из неравенств системы (7),(16), которое для допустимой пары (p^{s+1}, q^{s+1}) выполняется как равенство. Поэтому, для того чтобы t_{s+1} было положительным, необходимо и достаточно, чтобы указанное неравенство выполнялось и для $p = r^{s+1}$, т.е. нужно показать, что

$$x_{i_0 j_0}^{\mathcal{B}_{s+1}}(r^{s+1}) \geq 0. \qquad (29)$$

Ради большего сходства со случаем (i) будем считать также, что число компонент графа $\Gamma(\mathcal{B}_s)$ равно $(\tau+1)$ и дуга $(i_0, m+j_0)$ соединяет компоненты с номерами τ и $(\tau+1)$. Пусть $I_\nu^s = I_\nu^{s+1}, J_\nu^s = J_\nu^{s+1}$ для $\nu = 1, 2, \ldots, (\tau-1)$, и $I_\tau^s \cup I_{\tau+1}^s = I_\tau^{s+1}$, $J_\tau^s \cup J_{\tau+1}^s = J_\tau^{s+1}$. Кроме того, $i_0 \in I_\tau^s$, $j_0 \in J_{\tau+1}^s$. Тогда требуемое неравенство (29) имеет вид

$$\sum_{j \in J_\tau^s} r_j^{s+1} \leq \sum_{i \in I_\tau^s} (r^{s+1}, d^i). \qquad (30)$$

Так как $p = r^{s+1}$ удовлетворяет системе (6) при $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{s+1}$ и $I_\nu^s = I_\nu^{s+1}, J_\nu^s = J_\nu^{s+1}$ при $\nu = 1, 2, \ldots, (\tau-1)$, то

$$\sum_{j \in J_\nu^s} r_j^{s+1} = \sum_{i \in I_\nu^s} (r^{s+1}, d^i), \; \nu = 1, \ldots, (\tau-1). \qquad (31)$$

Тем самым $p = r^{s+1}$ удовлетворяет всем уравнениям системы (6) при $\mathcal{B} = \mathcal{B}_s$, кроме двух последних. Этой системе отвечает система вида (14):

$$\pi = \gamma_s \pi, \qquad (32)$$

при формировании которой коэффициенты g_j в (12) можно вычислить по формулам

$$g_j = \frac{r_j^{s+1}}{\sum_{k \in J_\nu} r_k^{s+1}}, \quad j \in J_\nu,$$

ибо $\rho = r^{s+1}$ удовлетворяет (II) при $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{s+1}$, а значит, и при $\mathcal{B} = \mathcal{B}_s$. При подстановке в систему (32) вектора $\tilde{\pi} \in R^{\tau+1}$ с компонентами

$$\tilde{\pi}_\nu = \sum_{j \in J_\nu} r_j^{s+1}, \quad \nu = 1, 2, \dots, \tau+1,$$

получим вектор невязок $\tilde{z} = \tilde{\pi} - \gamma_s \tilde{\tilde{\pi}}$, для которого ввиду (31) $\tilde{z}_\nu = 0$ при $\nu \neq \tau, \tau+1$.

С другой стороны, тот факт, что неравенство (27) оказалось лимитирующим при определении t_s, означает

$$\frac{c_{j_0}^{i_0}}{r_{j_0}^s} > \frac{c_{j_1}^{i_0}}{r_{j_1}^s},$$

т.е.

$$\frac{r_{j_1}^s}{r_{j_0}^s} > \frac{c_{j_1}^{i_0}}{c_{j_0}^{i_0}}. \tag{33}$$

Но $(i_0, j_1), (i_0, j_0) \in \mathcal{B}_{s+1}$, а потому

$$\frac{c_{j_1}^{i_0}}{c_{j_0}^{i_0}} = \frac{r_{j_1}^{s+1}}{r_{j_0}^{s+1}},$$

и (33) можно переписать в виде

$$\frac{r_{j_1}^s}{r_{j_0}^s} > \frac{r_{j_1}^{s+1}}{r_{j_0}^{s+1}}. \tag{34}$$

Теперь заметим, что $\rho = r^s$, являясь решением системы (6), (II) при $\mathcal{B} = \mathcal{B}_s$, порождается в соответствии с (12) некоторым решением $\pi = \pi^s$ системы (32). По этим же формулам получается и $\rho = r^{s+1}$, но при $\pi = \tilde{\pi}$. Поэтому $r_{j_1}^s = \pi_\tau^s g_{j_1}$, $r_{j_0}^s = \pi_{\tau+1}^s g_{j_0}$, $r_{j_1}^{s+1} = \tilde{\pi}_\tau g_{j_1}$, $r_{j_0}^{s+1} = \tilde{\pi}_{\tau+1} g_{j_0}$ и из (34) следует

$$\frac{\pi_\tau^s}{\pi_{\tau+1}^s} > \frac{\tilde{\pi}_\tau}{\tilde{\pi}_{\tau+1}}.$$

Применяя лемму , можем утверждать, что $\tilde{z}_{\tau+1} > 0$, и, следовательно, $\tilde{z}_\tau > 0$ (ибо $\tilde{z}_\tau + \tilde{z}_{\tau+1} = 0$). Это и означает справедливость неравенства (30), что и требовалось доказать.

Таким образом, доказано, что при сделанных предположениях величины t_s для $s \geq 1$ положительны. Вернемся теперь к полученному в начале параграфа соотношению

$$p^{s+1} - q^{s+1} = \mu_{s+1}(p^0 - q^0). \tag{35}$$

Поскольку μ_{s+1} и μ_s связаны равенством

$$\mu_{s+1} = (1 - t_s)\mu_s,$$

то из $t_s > 0$ следует $\mu_{s+1} < \mu_s$, т.е. последовательность μ_s убывает. Для доказательства конечности процесса остается показать, что величина μ_{s+1} однозначно определяется множеством $\mathcal{B}_s$ и, значит, ни одно из множеств $\mathcal{B}_s$ не может в процессе повториться дважды. В результате конечность процесса будет следовать из конечности числа множеств в совокупности $\mathcal{b}$.

Чтобы показать, что μ_{s+1} однозначно определяется множеством $\mathcal{B}_s$, покажем, что $\mu = \mu_{s+1}$ является минимальным среди всех μ, порождаемых допустимыми парами (p, q) с множеством $\mathcal{B} = \mathcal{B}_s$, т.е. что μ_{s+1}, p^{s+1} и q^{s+1} решают задачу минимизации μ при условиях

$$p - q = \mu(p^0 - q^0),\ p \in \Omega(\mathcal{B}_s),\ q \in \Xi(\mathcal{B}_s). \tag{36}$$

Пусть граф $\Gamma(\mathcal{B}_s)$ имеет τ компонент связности. По предположению соответствующая система линейных уравнений (6), (II) имеет ранг $(n-1)$, т.е. она содержит подсистему из $(n-1)$ линейно-независимых уравнений и все прочие уравнения системы являются следствием выделенной подсистемы. Рассмотрим такую подсистему. Хотя она выделяется не единственным образом, однако любая из таких подсистем имеет, как легко видеть, следующую структуру: она содержит $(n-\tau)$ уравнений системы (II) и $(\tau-1)$ уравнений системы (6), причем выделенные уравнения образуют подсистемы максимального ранга как для системы (II), так и для системы (6). Запишем рассматриваемую подсистему в виде

$$(a_i, p) = 0,\quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{37}$$

условившись, что уравнения с номерами $1, 2, \ldots, n-\tau$ являются уравнениями системы (I6), а остальные - уравнениями системы (6). То из условий систем (7),(I0), которое оказалось лимитирующим при определении величины t_s, также запишем в виде

$$(a_n, p) \geq 0. \tag{38}$$

Пусть для определенности это одно из условий системы (7). Для $p = r^s$ удовлетворяются уравнения (37) и нарушается неравенство (38). Следовательно, векторы $a_i, i=1,\ldots,n$, линейно-независимы и образуют базис R^n. Разложим по этому базису вектор $v=(1,\ldots,1)$:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \tag{39}$$

и рассмотрим вектор

$$h = \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i a_i \cdot$$

Для этого вектора выполняется

$$(h, q) = 0 \qquad \forall q \in \Xi(\mathcal{B}_s). \tag{40}$$

С другой стороны, при $p \in \Omega(\mathcal{B}_s)$ имеем

$$(v-h, p) = \sum_{i=n-\tau+1}^{n} \lambda_i (a_i, p) = \lambda_n (a_n, p). \tag{41}$$

Здесь $(a_n, p) \geq 0$, ибо для $p \in \Omega(\mathcal{B}_s)$ выполняется (38), величина же λ_n отрицательна, ибо, умножая (39) на r^s, получаем

$$1 = \lambda_n (a_n, r^s),$$

а $(a_n, r^s) < 0$. Поэтому из (41) следует

$$(v-h, p) \leq 0 \quad \forall p \in \Omega(\mathcal{B}_s),$$

что эквивалентно

$$(h, p) \geqslant 1 \quad \forall p \in \Omega(\mathcal{B}_s). \tag{42}$$

Так как неравенство (38) для $p = p^{s+1}$ обращается в равенство, то это так и для неравенства (42). Равенство же (40) выполняется, в частности, и для $q = q^{s+1} \in \Xi(\mathcal{B}_s)$. В результате получаем

$$(h, p-q) \geq 1 = (h, p^{s+1} - q^{s+1}) \quad \forall p \in \Omega(\mathcal{B}_s), q \in \Xi(\mathcal{B}_s). \tag{43}$$

Теперь из (35) следует

$$\mu_{s+1} = 1/(h, p^0 - q^0),$$

а из (36), аналогично,

$$\mu \geq 1/(h, p^0 - q^0).$$

Тем самым, любое μ из (36) не меньше μ_{s+1}, что и завершает доказательство теоремы.

§3. Пример

В качестве иллюстративного примера рассмотрим следующую простую модель, имеющую двух участников и три товара:

$$c^1 = (2,1,2), \quad d^1 = (0{,}6,\ 0{,}6,\ 0{,}2),$$
$$c^2 = (1,4,2), \quad d^2 = (0{,}4,\ 0{,}4,\ 0{,}8).$$

Векторы p, q, r нам удобно будет записывать в виде столбцов. Возьмем

$$p^0 = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}2 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$$

Это дает $(p^0, d^1) = 0{,}52$, $(p^0, d^2) = 0{,}48$. Решая задачу (1)-(4) при $p = p^0$, получаем решение: $z_{12} = 0{,}52$, $z_{21} = 0{,}08$, $z_{22} = 0{,}2$, $z_{23} = 0{,}2$. Этому решению соответствует базисное множество $\mathcal{B}_0 = \{(1,1);\ (2,1);\ (2,2);\ (2,3)\}$. Для наглядности будем записывать множества $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$ в виде матриц 2x3, отмечая значком X позиции, соответствующие элементам рассматриваемого множества $\mathcal{B}$, и точкой - остальные позиции. Так, множество $\mathcal{B}_0$ запишется в виде

$$\mathcal{B}_0 = \begin{pmatrix} X & \cdot & \cdot \\ X & X & X \end{pmatrix}$$

Вектор q^0, как решение системы (9) при $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0$, пропорционален вектору c^2 и, следовательно,

$$q^0 = \begin{pmatrix} 1/7 \\ 4/7 \\ 2/7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}1429 \\ 0{,}5714 \\ 0{,}2857 \end{pmatrix}$$

1-я итерация. Множество $\mathcal{B}_0$ - базисное, граф $\Gamma(\mathcal{B}_0)$ - связен и соответствующая система (6) содержит лишь одно уравнение, являющееся тождеством $\sum_{j=1}^{3} p_j = \sum_{j=1}^{3} p_j$. Поэтому получаем $r^0 = q^0$, $q(t) = q^0$ и

$$p(t)=\begin{pmatrix}0,6-0,4571t\\0,2+0,3414t\\0,2+0,0857t\end{pmatrix}$$

При определении $t=t_0$ лимитирующим может быть только условие $\varkappa_{21}^{B_0}(p)=p_1-(p,d^1)\geq 0$. Это дает

$$0,4p_1(t)-0,6p_2(t)-0,2p_3(t)\geq 0,$$

откуда $t_0=0,1892$. В результате:

$$\mathcal{B}_1=\begin{pmatrix}X & \cdot & \cdot\\ \cdot & X & X\end{pmatrix},\ p^1=\begin{pmatrix}0,5135\\0,2703\\0,2162\end{pmatrix},\ q^1=\begin{pmatrix}0,1429\\0,5714\\0,2857\end{pmatrix}$$

2-я итерация. Система уравнений для определения $p=\tau^1$, порождаемая множеством $\mathcal{B}_1$., такова:

$$\begin{cases}0,4p_1-0,6p_2-0,2p_3=0,\\ \dfrac{p_2}{4}=\dfrac{p_3}{2}.\end{cases}$$

Это дает

$$\tau^1=\begin{pmatrix}0,5385\\0,3077\\0,1538\end{pmatrix},\ p(t)=\begin{pmatrix}0,5135+0,0250t\\0,2703+0,0374t\\0,2162-0,0624t\end{pmatrix},\ q(t)=\begin{pmatrix}0,1429+0,3956t\\0,5714-0,2637t\\0,2857-0,1319t\end{pmatrix}$$

Для определения $t=t_1$ имеем два неравенства системы (10), которым должны удовлетворять компоненты вектора $q=q(t)$:

$$\frac{2}{q_1}\geq\frac{2}{q_3},\quad \frac{2}{q_1}\geq\frac{1}{q_2},$$

т.е.

$$q_3\geq q_1,\quad 2q_2\geq q_1.$$

Подставляя $q_j=q_j(t)$, получаем

$$0,2857-0,1319t\geq 0,1429+0,3956t,\quad 0,5275t\leq 0,1428,\ t\leq 0,2707,$$

и

$$1,1428-0,5274t\geq 0,1429+0,3956t,\quad 0,9230t\leq 1,\ t\leq 1,0834.$$

Таким образом, $t_1=0,2707$ и $\mathcal{B}=\mathcal{B}_1$ пополняется парой (1,3). В результате:

$$\mathcal{B}_2=\begin{pmatrix}X & \cdot & X\\ \cdot & X & X\end{pmatrix},\ p^2=\begin{pmatrix}0,5203\\0,2804\\0,1953\end{pmatrix},\quad q^2=\begin{pmatrix}0,25\\0,50\\0,25\end{pmatrix}$$

3-я итерация. Снова $\mathcal{B}_2$ - базисное множество, и, значит, $r^2 = q^2$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $r^2 \in \Omega(\mathcal{B}_2)$. Действительно, в проверке нуждаются лишь условия

$$z_{13}^{\mathcal{B}_2}(p) = (p, d^1) - p_1 \geq 0,$$

$$z_{23}^{\mathcal{B}_2}(p) = (p, d^2) - p_2 \geq 0,$$

т.е.

$$p_1 \leq 0{,}6p_1 + 0{,}6p_2 + 0{,}2p_3,$$
$$p_2 \leq 0{,}4p_1 + 0{,}4p_2 + 0{,}8p_3.$$

Эти неравенства для $p = r^2$ выполняются. Тем самым, $r^2 \in \Omega(\mathcal{B}_2)$, а следовательно, r^2- равновесный вектор цен рассматриваемой модели.

§4. Некоторые обобщения и дополнения

В этом параграфе остановимся кратко на общем случае модели обмена, не требуя уже строгой положительности векторов c^i, а возвращаясь к исходным предположениям: $c^i \geq 0, c^i \neq 0$ и $\sum_{i \in I} c_j^i > 0$ для каждого $j \in J$. Простейший подход к исследованию таких моделей состоит в том, что варьируются нулевые компоненты c_j^i, т.е. заменяются некоторым малым числом $\delta > 0$. Получающаяся в результате модель является моделью уже рассмотренного класса, и, применяя описанный алгоритм, можем получить ее равновесный вектор цен $\hat{p}$. Если при этом оказалось, что последнее множество $\mathcal{B}_s$, определяющее $r^s = \hat{p}$, не содержит пар (i, j), соответствующих проварьированным $c_j^i = \delta$, то $\hat{p}$ и является искомым равновесным вектором цен исходной модели.

Этот подход обладает тем недостатком, что даже если он и дает равновесный вектор цен исходной модели при достаточно малом δ, трудно a priori указать величину такого δ. Поэтому в общем случае для исследования модели следует, как и прежде, воспользоваться транспортной задачей вида (I)-(4), исключив в ней, однако, связи (i, j), соответствующие нулевым c_j^i. Такая задача уже не обязательно имеет решение при любом $p \in \sigma$. Покажем, что существование положительных $p \in \sigma$, для которых получаемая транспортная задача имеет решение, является необходимым и достаточным условием существования равновесных векторов цен в модели.

Необходимость очевидна, ибо если p – равновесный вектор цен и $\tilde{x}^i$ – соответствующие оптимальные решения задач участников, $\sum_{i\in I}\tilde{x}^i = \vartheta$, то величины $z_{ij} = p_j\tilde{x}^i_j$ образуют допустимое решение транспортной задачи модели; наличие же допустимых решений в этой задаче достаточно для ее разрешимости ввиду ограниченности множества ее допустимых решений. (Несложно показать, что приведенное допустимое решение является и оптимальным.)

Для доказательства достаточности воспользуемся результатом Д.Гейла из [2]: равновесие в модели обмена существует тогда и только тогда, когда нет $(ss\text{-}s)$-подмножеств множества участников I ; под $(ss\text{-}s)$-множеством понимается такое $S \subset I$, для которого можно указать $G \subset J$, что

$$c^i_j = 0\ ,\quad i\in S,\ j\notin G, \tag{44}$$

$$d^i_j = 0,\quad i\notin S,\ j\in G, \tag{45}$$

и хотя бы один из элементов d^i_j при $i\in S,\ j\notin G$ отличен от нуля. Покажем, что наличие $(ss\text{-}s)$-подмножества в I влечет неразрешимость транспортной задачи модели при любом $p\in\sigma^\circ$. Для простоты записи будем предполагать, что все прочие c^i_j, кроме указанных в (44), положительны. Среди ограничений транспортной задачи модели присутствуют такие:

$$\sum_{j\in G} z_{ij} = (p, d^i)\ ,\quad i\in S,$$

$$\sum_{i\in I} z_{ij} = p_j \qquad ,\quad j\in G.$$

Просуммируем эти ограничения, умножая при этом уравнения первой группы на (-1). Получим

$$\sum_{j\in G}\sum_{i\in I\setminus S} z_{ij} = \sum_{j\in G} p_j - \sum_{i\in S}(p, d^i). \tag{46}$$

Но

$$\sum_{i\in S}(p,d^i) = \sum_{j\in J} p_j \sum_{i\in S} d^i_j = \sum_{j\in G} p_j + \sum_{j\in J\setminus G} p_j \sum_{i\in S} d^i_j,$$

ибо $\sum_{i\in S} d^i_j = 1$ при $j\in G$. Учитывая, что хотя бы один из элементов d^i_j при $i\in S, j\in J\setminus G$ положителен, получаем для любого $p>0$

$$\sum_{i\in S}(p,d^i)>\sum_{j\in G}p_j.$$

Но тогда (46) несовместимо с неотрицательностью величин x_{ij} и транспортная задача модели при таких p не имеет допустимых решений.

Из приведенных рассуждений следует, что если при некотором $p>0$ транспортная задача модели обладает допустимыми (а значит, и оптимальными) решениями, то в I нет $(ss-s)$-подмножеств, и поэтому равновесный вектор цен существует.

Перейдем к обсуждению описанного выше алгоритма в рассматриваемом случае. Хотя исследование вопроса о существовании положительных векторов p, для которых разрешима транспортная задача модели, в принципе осуществимо методами линейного программирования, однако получение таким способом начального вектора $p^0>0$ представляется довольно трудоемкой процедурой. Проще начинать процесс следующим образом.

Зафиксируем в качестве q^0 произвольную точку в σ^0 и сформируем $\mathcal{B}_0$ из пар (i,j_i), выбирая j_i так, чтобы

$$\frac{c^i_{j_i}}{q^0_{j_i}}=\max_{j\in J}\frac{c^i_j}{q^0_j}. \qquad (47)$$

После этого $p^0\in\sigma$ определяется (возможно, не однозначно) из системы (6), порождаемой множеством $\mathcal{B}=\mathcal{B}_0$. Ясно, что $\mathcal{B}_0\in\mathcal{b}$ и $q^0\in\Xi(\mathcal{B}_0)$, $p^0\in\Omega(\mathcal{B}_0)$.

Вследствие того, что p^0 не предполагается положительным, нельзя гарантировать и положительность вектора z^s, получаемого на s-м шаге процесса. Поэтому может оказаться, что на некотором шаге $\hat{t}_s=1$ не достигается. Покажем, что в этом случае при определенном дополнительном ограничении на выбор z^s можно сделать заключение об отсутствии равновесных векторов цен в исследуемой модели.

Рассмотрим систему (14), порождаемую множеством $\mathcal{B}=\mathcal{B}_s$. Матрица γ теперь уже, в отличие от рассмотрений §2, вообще говоря, не является неразложимой. Подходящей перестановкой строк и соответствующей перестановкой столбцов ее можно привести [5, с.373] к виду

$$\gamma = \begin{pmatrix} F_1 & & 0 & F_{1,k+1} \dots & F_{1\tau} \\ 0 & \ddots & F_k & F_{k,k+1} \dots & F_{k\tau} \\ 0 \dots & & 0 & F_{k+1} \dots & F_{k+1,\tau} \\ 0 & & 0 & 0 \quad \ddots & F_\tau \end{pmatrix}$$

где матрицы $F_1, \dots, F_\tau$ неразложимы, а среди матриц $F_{1\ell}, \dots, F_{\ell-1,\ell}$ есть ненулевые при всех $\ell = k+1, \dots, \tau$. Легко видеть, что при этом единица является максимальным по модулю собственным числом блоков $F_1, \dots, F_k$ и не является таковым для блоков $F_{k+1}, \dots, F_\tau$. Вектор $\mathcal{X}$, решающий систему (I4), в соответствии со структурой матрицы γ приобретает структуру $\mathcal{X} = (\mathcal{X}^1, \dots, \mathcal{X}^k, \mathcal{X}^{k+1}, \dots, \mathcal{X}^\tau)$. Из сказанного выше следует, что $\mathcal{X}^{k+1} = \dots = \mathcal{X}^\tau = 0$, а векторы $\mathcal{X}^1, \dots, \mathcal{X}^k$ являются решениями систем

$$\mathcal{X}^\ell = F_\ell \mathcal{X}^\ell, \quad \ell = 1, \dots, k.$$

Для определения τ^s нужно зафиксировать некоторое ненулевое неотрицательное решение $\hat{\mathcal{X}}$, после чего $\rho = \tau^s$ определяется в соответствии с формулами (I2). Упомянутое выше ограничение на выбор τ^s состоит в том, что все $\hat{\mathcal{X}}^\ell$ при $\ell = 1, \dots, k$ выбираются положительными. Это возможно, ибо каждая из соответствующих матриц F_ℓ неразложима и, как отмечалось выше, единица является максимальным по модулю собственным числом этих матриц.

Разбиение всего множества блоков $F_1, \dots, F_\tau$ на два класса: $F_1, \dots, F_k$ и $F_{k+1}, \dots, F_\tau$ - вызывает соответствующее разбиение множества компонент связности графа $\Gamma(\mathcal{B}_s)$, а значит, и разбиение множества вершин этого графа, что, в свою очередь, приводит к разбиению множеств I и J: $I = S_1 \cup S_2$, $J = G_1 \cup G_2$, где S_1 и G_1 соответствуют первому из указанных классов, а S_2 и G_2 - второму. Это означает, что $\tau_j^s = 0$ при $j \in G_2$ и, ввиду указанного соглашения относительно выбора $\hat{\mathcal{X}}^\ell$, $\ell = 1, \dots, k$, $\tau_j^s > 0$ при $j \in G_1$.

Если $\hat{t}_s = 1$ и не достигается, то из $\tau_j^s = 0$ следует $c_j^i = 0$ при $(i,j) \notin \mathcal{B}_s$. Но $(i,j) \notin \mathcal{B}_s$ при $i \in S_1$, $j \in G_2$, и, значит,

$$c_j^i = 0, \quad i \in S_1, \; j \in G_2.$$

С другой стороны, из структуры матрицы γ следует, что

$$d_j^i = 0, \; i \in S_2, \; j \in G_1,$$

и среди d_j^i при $i \in S_1$ и $j \in G_2$ есть ненулевые. Резюмируя изложенное, заключаем, что S_1 является $(ss-s)$-подмножеством множества I, а потому модель не имеет равновесных векторов цен, что и требовалось показать.

Не касаясь подробностей практической реализации рассматриваемого алгоритма, отметим лишь, что осложняющим обстоятельством при этом является необходимость исследования структуры матрицы γ^r. От этого можно избавиться, если начальное множество $\mathcal{B}_0$ выбрать так, чтобы отвечающая ему система (6),(II) имела ранг $(n-1)$.

Как отмечалось выше, ранг этой системы не убывает и, следовательно, при таком выборе $\mathcal{B}_0$ он будет оставаться равным $(n-1)$ в течение всего процесса. Указанный выбор множества $\mathcal{B}_0$ легко осуществить, если для некоторого $\ell \in J$ все c_ℓ^i положительны. Действительно, в этом случае выбирая $q^0 \in \sigma^0$ так, чтобы q_ℓ^0 было достаточно малым, будем в (47) иметь $j_i = \ell$ при всех $i \in I$. В результате система (6) принимает вид

$$p_\ell = \sum_{j \in J} p_j,$$
$$p_j = 0, \quad j \neq \ell.$$

Ранг этой системы, очевидно, равен $(n-1)$, а получающийся вектор $p^* \in \sigma$ совпадает с ℓ-единичным ортом пространства R^n.

ЛИТЕРАТУРА

1. ГЕЙЛ Д. Теория линейных экономических моделей. - М.: ИЛ, 1963.
2. GALE D. The linear exchange model. - J. Math. Economics, 1976, v.3, N 2, p. 205-209.
3. EAVES B.C. A finite algorithm for the linear exchange model. - J. Math. Economics, 1976, v.3, N 2, p. 197-204.
4. ШМЫРЕВ В.И. Монотонность в линейных моделях обмена. - Оптимизация, 1981, вып. 27(44), с.77-95.
5. ГАНТМАХЕР Ф.Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1967.

Поступила в ред.-изд. отдел
27.09.84 г.