Модели динамики и равновесия

УДК 513.88

ВОССТАНОВЛЕНИЕ СЕПАРАБЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ПОЛЕЗНОСТИ НА n-МЕРНОМ КУБЕ

Н.П.Дементьев

Пусть потребитель, функция полезности которого $U=U(x_1,\dots,x_n)$, имеет доход M и покупает n товаров по ценам $p=(p^1,\dots,p^n)>0$. Пусть $X\subset R^n_+$ – множество наборов потребительских благ. Тогда спрос потребителя $x(p,M)$ определяется как решение задачи максимизации

$$U(x)\to max,$$
$$px\le M,\quad x\in X.$$

Кривая $x(M)=x(\bar p,M)$ называется кривой Энгеля, соответотвующей фиксированным ценам $\bar p$.

П.Самуэльсон [1] высказал гипотезу о возможности восстановления сепарабельной функции по ее двум кривым Энгеля*).

П.Дыбвиг [2] установил, что при некоторых предположениях относительно функции полезности гипотеза П.Самуэльсона неверна уже для двух продуктов. Приведем соответствующую теорему.

ТЕОРЕМА [2]. Пусть $U(x_1,x_2)=F_1(x_1)+F_2(x_2)$, где F_1,F_2 – (неизвестные) возрастающие, строго вогнутые и непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям:

---

*) Речь идет о восстановлении функций с точностью до аффинного преобразования. В этом смысле функции $U(x), V(x)$ считаются эквивалентными, если для некоторых $c,d\in R, c>0$ имеет место соотношение $V(x)=d+cU(x)$.

$$\lim_{x\to 0} F_i'(x)=\infty,\ \lim_{x\to\infty} F_i'(x)=0,\ i=1,2. \qquad (1)$$

Тогда U восстанавливается по ее $k>2$ кривым Энгеля, соответствующим наборам цен $(1,p^1),(1,p^2),\dots,(1,p^n)$, тогда и только тогда, когда

$$D_{ij}=\frac{\log(p^1/p^i)}{\log(p^1/p^j)}$$

– иррациональное число.

Ниже рассматривается случай $X=(0,1]\times(0,1]\times\dots\times(0,1]\subset R^n$. В этом случае при условиях, аналогичных условиям приведенной теоремы, а также при некоторых предположениях относительно вторых производных функций $F_i(x)$ в единице установлена справедливость гипотезы П.Самуэльсона. Кроме того, приведены достаточные условия, при которых две кривые на X являются кривыми Энгеля для некоторой сепарабельной функции полезности. Указан алгоритм отыскания такой функции полезности.

ТЕОРЕМА I. Пусть $U(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}F_i(x_i)$, где $F_1,F_2,\dots,F_n$ – (неизвестные) возрастающие, строго вогнутые и непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям:

$$\lim_{x\to 0} F_i'(x)=\infty,\ \lim_{x\to 1} F_i'(x)=0,\ i=1,2,\dots,n. \qquad (2)$$

Пусть, кроме того, существуют вторые производные слева $F_i''(1)$, причем $F_i''(1)<0,\ i=1,2,\dots,n$.

Тогда U восстанавливается по двум ее кривым Энгеля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функции $U(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}F_i(x_i)$ и $V(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}G_i(x_i)$ имеют две общие кривые Энгеля, соответствующие ценам $(1,p^2,p^3,\dots,p^n)$ и $(1,q^2,q^3,\dots,q^n)$, $(1,p^2,\dots,p^n)\neq(1,q^2,\dots,q^n)$. Пусть функции $G_i(x)$ удовлетворяют всем свойствам функций $F_i(x)$, перечисленным в формулировке теоремы. Тогда нужно установить, что $G_i(x)=d_i+cF_i(x)$, где $d_1,d_2,\dots,d_n$, c – некоторые числа, причем $c>0$. Пусть i_0 – такой номер, что $p^{i_0}\neq q^{i_0}$.

Такой номер всегда найдется, так как $(1,p^2,\dots,p^n)\neq(1,q^2,\dots,q^n)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $p^{i_0}>q^{i_0}$. Пусть z_0 - произвольная точка из (0,I). Из свойства (2) и из непрерывности производных $F_i'(x), x\in(0,1), i=1,\dots,n$, следует существование чисел $x_2, x_3,\dots,x_n\in(0,1)$ и числа $\lambda>0$ таких, что

$$F_1'(z_0)=\lambda,\ F_2'(x_2)=\lambda q^2,\dots,F_n'(x_n)=\lambda q^n.$$

Ясно, что кривая Энгеля, соответствующая ценам $(1,q^2,\dots,q^n)$, содержит точку $(z_0,x_2,\dots,x_n)$. При этом $F_{i_0}'(x_{i_0})=$ $=F_1'(z_0)\,q^{i_0}$. По тем же соображениям найдутся числа y_1, $y_2,\dots,y_{i_0-1},y_{i_0+1},\dots,y_n\in(0,1)$ и число $\mu>0$ такие, что

$$F_{i_0}'(x_{i_0})=\mu p^{i_0},\ F_1'(y_1)=\mu,\dots,F_{i_0-1}'(y_{i_0-1})=\mu p^{i_0-1},$$

$$F_{i_0+1}'(y_{i_0+1})=\mu p^{i_0+1},\dots,F_n'(y_n)=\mu p^n.$$

При этом точка $(y_1,y_2,\dots,y_{i_0-1},x_{i_0},y_{i_0+1},\dots,y_n)$ принадлежит кривой Энгеля, соответствующей ценам $(1,p^2,\dots,p^n)$, причем $F_1'(y_1)=F_{i_0}'(x_{i_0})/p^{i_0}$. Обозначим y_1 через z_1. Из равенств $F_{i_0}'(x_{i_0})=F_1'(z_0)q^{i_0}$, $F_1'(y_1)=F_{i_0}'(x_{i_0})/p^{i_0}$ следует $F_1'(z_1)=F_1'(z_0)\,q^{i_0}/p^{i_0}$. Итак, исходя из точки z_0, мы получили z_1. Аналогично можно последовательно получить числа $z_2,z_3,z_4,\dots,z_i\in(0,1), i=2,3,\dots$ При этом

$$F_1'(z_k)=(q^{i_0}/p^{i_0})^k F_1'(z_0). \qquad (3)$$

Так как кривые Энгеля для функций $\sum_{i=1}^{n}F_i(x_i), \sum_{i=1}^{n}G_i(x_i)$ совпадают при ценах $(1,p^2,\dots,p^n),(1,q^2,\dots,q^n)$, то и $G_1'(z_k)=(q^{i_0}/p^{i_0})^k G_1'(z_0)$. Согласно (3) $F_1'(z_k)\to0$ при $k\to\infty$. Отсюда, из монотонности $F_1'(z)$ и (2) вытекает, что $z_k\to1$ при $k\to\infty$. Тогда из существования второй производной слева следует представление

$$F_1'(z_k)=F_1''(1)\cdot(z_k-1)+\varepsilon_k\cdot(z_k-1);$$

$$G_1'(z_k)=G_1''(1)\cdot(z_k-1)+\delta_k\cdot(z_k-1),$$

где $\varepsilon_k\to0$, $\delta_k\to0$ при $k\to\infty$. Итак, $F_1'(z_0)/G_1'(z_0)=$ $=(F_1''(1)+\varepsilon_k)/(G_1''(1)+\delta_k)$. Переходя к пределу при $k\to\infty$, имеем $F_1'(z_0)/G_1'(z_0)=F_1''(1)/G_1''(1)$. Таким образом,

$G_1'(z_0)=cF_1'(z_0)$, где $c=G_1''(1)/F_1''(1)$. Заметим, что величина c не зависит от выбора $z_0\in(0,1)$. Отсюда следует, что $G_1(x)=d_1+cF_1(x)$.

Пусть $i\in\{2,3,\dots,n\}$. Для всякого $x\in(0,1)$ существуют числа $x_1,x_2,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n$ такие, что $(x_1,x_2,\dots$ $\dots,x_{i-1},x,x_{i+1},\dots,x_n)$ принадлежат кривой Энгеля, соответствующей ценам $(1,q^2,\dots,q^n)$. Тогда $F_i'(x)=F_1'(x)q^i$, $G_i'(x)=$ $=G_1'(x_1)q^i=cF_1'(x_1)q^i$. Отсюда $G_i'(x)=cF_i'(x)$ и, в свою очередь, $G_i(x)=d_i+cF_i(x)$, где d_i - некоторое число. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $U(x_1,x_2,\dots,x_n)=F(x_1)+m_2F(x_2)+$ $+\dots+m_nF(x_n)$, где $m_2>0,\dots,m_n>0$ а F - возрастающая, строго вогнутая и непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{x\to 0}F'(x)=\infty,\ \lim_{x\to 1}F'(x)=0.$$

Пусть, кроме того, существует вторая производная слева $F''(1)$, причем $F''(1)<0$. Тогда U восстанавливается по одной кривой Энгеля, отличной от диагонали $x_1=x_2=$ $=\dots=x_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следствия. Пусть $V(x_1,\dots,x_n)=G(x_1)+$ $+l_2G(x_2)+\dots+l_nG(x_n)$ удовлетворяет тем же свойствам, что и $U(x_1,\dots,x_n)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $F''(1)=G''(1)=-1$. Пусть функции $U(x_1,\dots,x_n)$, $V(x_1,\dots,x_n)$ имеют общую кривую Энгеля, соответствующую ценам $(1,p^2,\dots,p^n)$. Покажем прежде всего, что $m_i=l_i$, $i=2,\dots,n$. Обозначим $\bar M=$ $=1+p^2+\dots+p^n$. Пусть $z(M), M\in(0,\bar M)$ - потребительский спрос, соответствующий доходу M и ценам $(1,p^2,\dots,p^n)$. Этот спрос не зависит от того, какой из двух функций полезности U,V руководствуется потребитель. Так как

$$F'(z_1(M))=\lambda(M),$$
$$m_2F'(z_2(M))=\lambda(M)p^2,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$m_nF'(z_n(M))=\lambda(M)p^n$$

при некоторых $\lambda(M)>0$, то для всякого $i\in\{2,3,\dots,n\}$

$$m_i=\rho^i\,\frac{F'(z_1(M))}{F'(z_i(M))}=\rho^i\,\frac{1-z_1(M)-0(1-z_1(M))}{1-z_i(M)-0(1-z_i(M))}.$$

Поскольку $z_i(M)\to(1,1,\dots,1)$ при $M\to\bar M$, то

$$m_i=\lim_{M\to\bar M}\rho^i\,\frac{1-z_1(M)-0(1-z_1(M))}{1-z_i(M)-0(1-z_i(M))}=\rho^i\lim_{M\to\bar M}\frac{1-z_1(M)}{1-z_i(M)}.$$

Аналогично можно получить

$$l_i=\rho^i\lim_{M\to\bar M}\frac{1-z_1(M)}{1-z_i(M)}.$$

Итак, $l_i=m_i,\ i=2,\dots,n$. Тогда диагональ $x_1=x_2=\dots=x_n$ является кривой Энгеля, соответствующей ценам $(1,m_2,\dots,m_n)$ для обеих функций $U(x_1,\dots,x_n)$, $V(x_1,\dots,x_n)$. Стало быть, эти функции имеют две общие кривые Энгеля. Остается применить предыдущую теорему. Следствие доказано.

В доказанной выше теореме единственности остались невыясненными те условия, при которых две кривые являются кривыми Энгеля для некоторой сепарабельной функции полезности. Ниже сформулированы достаточные условия для существования такой функции и приведена простая формула ее нахождения. Для простоты рассматривается случай двух продуктов.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\varphi_1:[0,1]\to[0,1]$, $\varphi_2:[0,1]\to[0,1]$ – некоторые непрерывные строго возрастающие функции такие, что

1) $\varphi_1(0)=0,\ \varphi_2(0)=0,\ \varphi_1(1)=1,\ \varphi_2(1)=1;$

2) $\varphi_2(t)>\varphi_1(t),\ t\in(0,1);$

3) φ_1,φ_2 дифференцируемы в некоторой окрестности $t=1$ и дважды дифференцируемы слева в $t=1$, причем $\varphi_1'(1)>\varphi_2'(1)>0$.

Пусть $\rho^1,\rho^2>0$ – два числа таких, что $\rho^1/\rho^2=\varphi_1'(1)/\varphi_2'(1)$. Тогда существуют вогнутые функции $F_1:(0,1]\to R$, $F_2:(0,1]\to R$, удовлетворяющие следующему свойству. Две кривые на

квадрате $(0,1]\times(0,1]$, задаваемые в параметрической форме

$$x_1(t)=t,\ x_2(t)=\varphi_1(t);$$

$$x_1(t)=t,\ x_2(t)=\varphi_2(t),$$

являются кривыми Энгеля для функции $F_1(x_1)+F_2(x_2)$ при ценах $(1,p^1)$, $(1,p^2)$ соответственно. При этом $F_1(x)$, $F_2(x)$ непрерывно дифференцируемы на (0,I), причем $\lim\limits_{x\to 0}F_i'(x)=\infty, \lim\limits_{x\to 1}F_i'(x)=0, i=1,2.$ Кроме того, $F_1(x)$, $F_2(x)$ имеют вторые производные слева в $t=1$ и эти производные строго отрицательны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $z_0\in(0,1)$. Построим последовательность $z_0, z_1, z_2,\ldots$ по следующему правилу: $z_k=\varphi_2\varphi_1^{-1}(z_{k-1})$*). Заметим, что этот способ задания последовательности лишь по форме отличается от способа построения последовательности в предыдущей теореме. Покажем, что последовательность $\{z_k\}$ строго возрастает и $z_k\to 1$ при $k\to\infty$. Прежде всего отметим, что $z_k<1, k=0,1,2,\ldots$ Пусть, от противного, $z_k=1$ для некоторого k. Тогда $\varphi_2\varphi_1^{-1}(z_{k-1})=1$. Из I) и строгой монотонности функций φ_1, φ_2 следует, что $\varphi_1^{-1}(z_{k-1})=1$, $z_{k-1}=1$. Продолжая таким образом, получим $z_0=1$. Итак, $z_k<1, k=0,1,\ldots$ Но тогда строгая монотонность последовательности следует из 2): $z_k=\varphi_2\varphi_1^{-1}(z_{k-1})>\varphi_1\varphi_1^{-1}(z_{k-1})=z_{k-1}$. Предположим, что $z_k\to\bar z$ при $k\to\infty$, где $\bar z<1$. Тогда $\varphi_1^{-1}(z_k)\in[\varphi_1^{-1}(z_0),\varphi_1^{-1}(\bar z)]\subset(0,1)$ для всех k. Ввиду непрерывности функций φ_1, φ_2 и 2) существует $\delta>0$ такое, что $\varphi_2(z)\geq\varphi_1(z)+\delta$ для всякого $z\in[\varphi_1^{-1}(z_0), \varphi_1^{-1}(\bar z)]$. Отсюда следует оценка $z_{k+1}-z_k=\varphi_2(\varphi_1^{-1}(z_k))-\varphi_1(\varphi_1^{-1}(z_k))\geq\delta$, так как $\varphi_1^{-1}(z_k)\in(\varphi_1^{-1}(z_0),\varphi_1^{-1}(\bar z))$. Стало быть, $z_k\geq z_0+k\delta$. Это противоречит тому, что $z_k<1, k=0,1,2,\ldots$ Итак, установлено, что $\{z_k\}$ строго возрастает и $z_k\to 1$ при $k\to\infty$.

Определим функцию $f_2(z_0), z_0\in(0,1)$ следующим образом:

---

*) Здесь и ниже через φ_1^{-1} обозначается функция, обратная функции φ_1, т.е. $\varphi_1^{-1}(\varphi_1(z))=z$.

$$f_2(z_0)=\lim_{k\to\infty}(p^1/p^2)^k(1-z_k), \qquad (4)$$

где z_k - исходящая из z_0 сконструированная выше последовательность. Нужно доказать существование предела в (4). С этой целью введем последовательность $g_k=(p^1/p^2)^k(1-z_k)$ и докажем ее сходимость.

Так как функции φ_1, φ_2 дважды дифференцируемы в $t=1$, то дважды дифференцируема в этой точке и функция $\Phi(z) = \varphi_2\varphi_1^{-1}(z)$, причем $\Phi'(1)=\varphi_2'(1)/\varphi_1'(1)=p^2/p^1$. Для достаточно близких к I точек z справедливо разложение

$$\Phi(z)=1+\Phi(1)(z-1)+\Phi(1)(z-1)^2/2+O((z-1)^2).$$

Найдутся $R>0, \delta>0$, что при $|z-1|<\delta$ имеет место разложение

$$\Phi(z)=1+(p^2/p^1)(z-1)+R(z)(z-1)^2,$$

где $R(z)$ - некоторая функция на $(1-\delta, 1]$, $|R(z)|<R$. Так как $z_k\to 1$ при $k\to\infty$, то для достаточно больших k

$$z_{k+1}=1+(p^2/p^1)(z_k-1)+R(z_k)(z_k-1)^2. \qquad (5)$$

Из определения g_k следует, что $z_k=1-(p^2/p^1)^k g_k$. Подставляя выражения для z_k, z_{k+1} в (4), имеем

$$g_{k+1}=g_k-R(z_k)(p^2/p^1)^{k-1}g_k^2. \qquad (6)$$

Покажем, что последовательность $\{g_k\}$ сходится. Пусть k_0 - такой номер, что $\frac{1}{1-z_{k_0}}>\frac{\bar{R}}{\beta}$, где $\bar{R}=R(p^1/p^2)^2$, а $\beta=\ln\frac{p^1}{p^2}$. На интервале $[k_0,\infty)$ решение уравнения

$$\dot{G}=\bar{R}G^2e^{-\beta t} \qquad (7)$$

мажорирует последовательность $g_{k_0}, g_{k_0+1},\ldots$ в том смысле, что $g_k\le G(k)$ в целых точках $k>k_0$. Но решение (7) может быть выписано в явном виде:

$$G(t)=\left(\left(\frac{1}{1-z_{k_0}}-\frac{\bar{R}}{\beta}\right)e^{-\beta k_0}+\frac{\bar{R}}{\beta}e^{-\beta t}\right)^{-1}, t<k_0. \qquad (8)$$

Ясно, что последовательность $\{G(k)\}, k>k_0$ возрастает и ограничена, причем $|g_{k+1}-g_k|<G(k+1)-G(k)$. Тогда и последовательность $\{g_k\}$ сходится.

Покажем, что предел последовательности $\{g_k\}$ не равен нулю. Предположим противное. Пусть ε - произвольно фиксированное число из (0,I). Выберем k_0 такое, что $R(p^2/p^1)^{k_0-1}/$

$(1-\rho^2/\rho^1)<\varepsilon$. Выберем среди $k_0, k_0+1, k_0+2, \ldots$ такое k_1, что $g(k)\le g(k_1)<1,\ k>k_1$. Такое k_1, очевидно, найдется. Тогда для всех $k>k_1$ имеем

$$|g_k-g_{k_1}|\le\sum_{\tau=k_1}^{k-1} Rg_{k_1}^2(\rho^2/\rho^1)^{\tau-1}\le\frac{R}{1-\rho^2/\rho^1}(\rho^2/\rho^1)^{k_1-1}g_{k_1}<\varepsilon g_{k_1}$$

Отсюда $g_k>(1-\varepsilon)g_{k_1}$ при $k>k_1$. Получено противоречие. Итак, $f_2(z)\ne 0,\ z\in(0;1)$.

Покажем, что $f_2(z)$ непрерывна на (0,I). Пусть $z^0\in(0,1)$, а $\{z^s\}_{s=1}^{\infty}$ - такая последовательность, что $z^s\to z^0$ при $s\to\infty$, $z^s\in(0,1), s=1,2\ldots$ Установим, что $f_2(z^s)\to f_2(z^0)$ при $s\to\infty$. Пусть $\{z_k^s\}_{k=0}^{\infty}$ - последовательность, исходящая из $z_0^s=z^s$: $z_{k+1}^s=\varphi_2\varphi_1^{-1}(z_k^s)$, где $s=0,1,2,\ldots$ Пусть $\{g_k^s\}_{k=0}^{\infty}=\{(\rho^1/\rho^2)^k(1-z_k^s)\}_{k=0}^{\infty}$ - семейство последовательностей, $s=0,1,2,\ldots$. Как было определено выше, $f_2(z^s)=\lim\limits_{k\to\infty} g_k^s$. Так как $z_0^s\to z_0^0$ при $s\to\infty$, то в силу непрерывности отображения $\varphi_2\varphi_1^{-1}$ для каждого фиксированного k имеют место предельные соотношения

$$\lim_{s\to\infty} z_k^s=z_k^0,\quad \lim_{s\to\infty} g_k^s=g_k^0.$$

Выберем $k_1, s_1\in N=\{1,2,\ldots\}$ такими, что $z_k^s\in(1-\delta,1)$, $s\in\{0\}\cup\{s_1,s_1+1,s_1+2,\ldots\}, k\ge k_1$. Такие числа всегда существуют, так как для всякого s последовательность $\{z_k^s\}_{k=0}^{\infty}$ возрастает, $\lim\limits_{k\to\infty} z_k^s=1$, а $\lim\limits_{s\to\infty} z_k^s=z_k^0$ для всякого k. При $k\ge k_1, s\ge s_1$ имеют место соотношения

$$g_{k+1}^s=g_k^s-R(z_k^s)(\rho^2/\rho^1)^{k-1}(g_k^s)^2.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $(1-z_k^s)^{-1}\ge 2\bar R/\beta$, при $k>k_1, s\in\{0\}\cup\{s_1,s_1+1,s_2+2,\ldots\}$. Тогда $G^s(k)\ge g_k^s$, $k>k_1, s\in\{0\}\cup\{s_1,s_1+1,s_1+2,\ldots\}$, где $G^s(t)=$ $=\left(\left(\frac{1}{1-z_{k_1}^s}-\frac{\bar R}{\beta}\right)e^{-\beta k_2}+\frac{\bar R}{\beta}e^{-\beta t}\right)^{-1}, t\in[k_1,\infty)$. Величины $G^s(t)$ равномерно ограничены по $t\in[k_1,\infty), s\in\{0\}\cup\{s_1,s_1+1,s_1+2,\ldots\}$. Тогда существует $C>0$ такое, что $g_k^s<C, k\ge k_1, s\in\{0\}\cup$ $\cup\{s_1,s_1+1,\ldots\}$. Зафиксируем произвольное $k_2, k_2\ge k_1$. Для $k\ge k_2, s\ge s_1$ имеем

$$g_{k+1}^s-g_{k+1}^0=g_k^s-g_k^0-(R(z_k^s)(g_k^s)^2-R(z_k^0)(g_k^0)^2)(\rho^2/\rho^1)^{k-1}.$$

Ясно, что

$$|g_k^s - g_k^0| \le |g_{k_2}^s - g_{k_2}^0| + 2RC^2\sum_{\tau=k_2}^{k-1}(\rho^2/\rho^1)^{\tau-1} \le$$

$$\le |g_{k_2}^s - g_{k_0}^0| + 2RC^2(\rho^2/\rho^1)^{k_2-1}/(1-\rho^2/\rho^1),\ k\ge k_2,\ s\ge s_1.$$

Переходя к пределу k, имеем

$$|f_2(z^s)-f_2(z^0)| \le |g_{k_2}^s - g_{k_2}^0| + 2RC^2(\rho^2/\rho^1)^{k_2-1}/(1-\rho^2/\rho^1).$$

Так как $g_{k_2}^s \to g_{k_2}^0$ при $s\to\infty$, то

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}|f_2(z^s)-f_2(z^0)| \le 2RC^2(\rho^2/\rho^1)^{k_2-1}/(1-\rho^2/\rho^1).$$

Ввиду произвольности $k_2>k_1$, имеем $\overline{\lim_{s\to\infty}}|f_2(z^s)-f_2(z^0)|\le 0$, т.е. $f_2(z^s)\to f_2(z^0)$ при $s\to\infty$. Непрерывность на (0,I) установлена.

Покажем, что производная слева $f_2'(1)$ существует, причем $f_2'(1)=-1$. Зафиксируем z_0 из интервала $(1-\beta/2\bar R,1)\cap(0,1)$. Пусть $z_0,z_1,z_2,\dots$ – последовательность, устроенная по правилу $z_k=\varphi_2\varphi_1^{-1}(z_{k-1})$, $k=1,2,\dots$ Так как $1/(1-z_0)>2\bar R/\beta>\bar R/\beta$, то последовательность $g_0,g_1,g_2,\dots,g_k,\dots$ мажорируется величинами $G(k)=(1/(1-z_0)-\bar R/\beta+\frac{\bar R}{\beta}e^{-\beta k})^{-1}$ для каждого k соответственно. Но $(1/(1-z_0)-\frac{\bar R}{\beta}+\frac{\bar R}{\beta}e^{-\beta k})^{-1}<\left(\frac{1}{1-z_0}-\frac{\bar R}{\beta}\right)^{-1}=(1-z_0)\left(1-\frac{\bar R(1-z_0)}{\beta}\right)^{-1}<2(1-z_0)$, так как из $z_0>1-\beta/2R$ вытекает $(1-(1-z_0)\bar R/\beta)^{-1}<2$.

Согласно (6)

$$|g_k-g_0|\le\sum_{\tau=0}^{k-1}|R(z_\tau)|e^{-\beta(\tau-1)}g_\tau^2\le 4R(1-z_0)^2\sum_{\tau=0}^{k-1}e^{-\beta(\tau-1)}\le\frac{4\bar R(1-z_0)^2}{1-e^{-\beta}}.$$

Тогда $f_2(z_0)=\lim_{k\to\infty}g_k=g_0+\psi(z_0)=1-z_0+\psi(z_0)$, где $\psi(z_0)$ – некоторая величина такая, что $|\psi(z_0)|\le\frac{4\bar R(1-z_0)^2}{1-e^{-\beta}}$. Ясно, что

$$\lim_{z_0\to1}\frac{f_2(z_0)-f_2(1)}{z_0-1}=\lim_{z_0\to1}\frac{f_2(z_0)}{z_0-1}=-1.$$

Итак, $f_2'(1)$ существует и равна -I.

Докажем, что функция $f_2(z)$ монотонно убывает. Действительно, пусть $z^0,z^1\in(0,1)$, $z^0\ge z^1$. Покажем, что $f_2(z_0)\le f_2(z^1)$. Пусть $z_0^0=z^0, z_1^0, z_2^0,\dots, z_0^1=z^1, z_1^1, z_2^1,\dots$ – две последовательности, исходящие соответственно из точек z^0, z^1:

$z^0_{k+1}=\varphi_2\varphi_1^{-1}(z^0_k)$, $z^1_{k+1}=\varphi_2\varphi_1^{-1}(z^1_k)$. Так как отображение $\varphi_2\varphi_1^{-1}$ монотонно, то $z^0_k\geq z^1_k$ для всех k. Тогда монотонность функции $f_2(z)$ следует из ее определения (4).

Зафиксируем $z_0\in(0,1)$. Пусть $\ldots,z_{-k},\ldots,z_{-2},z_{-1},z_0,z_1,z_2,\ldots,z_k\ldots$ – последовательность, определенная следующим образом: $z_{-k-1}=\varphi_1\varphi_2^{-1}(z_{-k})$, $z_{k+1}=\varphi_2\varphi_1^{-1}(z_k)$. Выше было установлено, что $z_k\in(0,1)$, $k=1,2,\ldots$, и $z_k\to 1$ при $k\to\infty$. Аналогично можно показать, что $z_{-k}\in(0,1)$, $-k=-1,-2,\ldots$ и $z_{-k}\to 0$ при $-k\to-\infty$. Из определения функции $f_2(z)$ следует, что

$$f_2(z_{-k})=(P^1/p^2)^k f_2(z_0),\quad f_2(z_k)=(P^2/p^1)^k f_2(z_0).$$

Отсюда $f_2(z_{-k})\to\infty$ при $-k\to-\infty$, $f_2(z_k)\to 0$ при $k\to\infty$. Так как $f_2(z)$ монотонно убывает, то $\lim\limits_{z\to 0}f_2(z)=\infty$, $\lim\limits_{z\to 1}f_2(z)=0$.

Положим $f_1(z)=f_2(\varphi_2(z))/p^2$. Так как φ_2 – строго возрастающая функция, то $f_1(z)$, как и $f_2(z)$, является непрерывной, неотрицательной, монотонно убывающей функцией, причем $\lim\limits_{z\to 0}f_1(z)=\infty$, $\lim\limits_{z\to 1}f_1(z)=0$. Положим $F_1(z)=-\int_z^1 f_1(\tau)d\tau$, $F_2(z)=-\int_z^1 f_2(\tau)d\tau$, $z\in(0,1)$. Функции $F_1(z)$, $F_2(z)$ являются, таким образом, вогнутыми функциями, строго возрастающими на (0,1).

Пусть i – фиксировано и является одним из чисел 1,2. Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered}F_1(x_1)+F_2(x_2)\to\max,\\ x_1+p^i x_2\leq M,\ x_1,x_2\in(0,1],\end{gathered}\tag{9}$$

где параметр $M\in(0,1+p^i)$. Пусть $x^i_1(M),x^i_2(M)\in(0,1]$ – координаты точки пересечения i-й кривой с прямой $x_1+p^i x_2=M$. Покажем, что эта точка – решение экстремальной задачи (9). Для этого надо установить, что

$$F_1'(x^i_1(M))=\lambda^i(M),$$
$$F_2'(x^i_2(M))=\lambda^i(M)p^i$$

для некоторых $\lambda^i(M)>0$.

Пусть $i=1$. Положим $\lambda^1(M)=f_1(x^1_1(M))$. Из равенств $f_1(z)=f_2(\varphi_2(z))/p^2$ и $f_2(z)=(P^1/p^2)f_2(\varphi_2\varphi_1^{-1}(z))$ следует, что $f_1(x^1_1(M))=f_2(\varphi_2(x^1_1(M)))/p^2$, $(P^1/p^2)f_2(\varphi_2\varphi_1^{-1}(x^1_1(M)))=$

$=f_2(\varphi_1(x_1^1(M)))$. Отсюда, $f_1(x_1^1(M))=f_2(\varphi_1(x_1^1(M)))/p^1$, или $\lambda^1(M)=F_1'(x_1^1(M))=F_2'(x_2^1(M))>0$.

Пусть $i=2$. Положим $\lambda^2(M)=f_1(x_1^2(M))>0$. Из равенства $f_1(x_1^2(M))=f_2(\varphi_2(x_1^2(M)))/p^2$ следует $f_1(x_1^2(M))=$ $=f_2(x_2^2(M))/p^2$, или $F_1'(x_1^2(M))=F_2'(x_2^2(M))/p^2$.

Итак, обе кривые являются геометрическим местом решений экстремальных задач (9), зависящих от параметра M. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть функция $\varphi_1:[0,1]\to[0,1]$ удовлетворяет условиям теоремы, причем $\varphi_1(t)\neq t$ при всяком $t\in(0,1)$. Пусть $(1,p^1)$ - некоторый набор цен. Тогда существует вогнутая непрерывно дифференцируемая на (0,1) функция $F(x)$ такая, что кривая $x_1(t)=t, x_2(t)=\varphi_1(t)$ является кривой Энгеля, соответствующей ценам $(1,p^1)$ для функции $F(x_1)+m_2F(x_2), m_2=p^1/\varphi_1'(1)$. Кроме того, F имеет вторую производную слева в $t=1, F''(1)<0, \lim\limits_{x\to 0}F'(x)=\infty, \lim\limits_{x\to 1}F'(x)=0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следствия. Рассмотрим функцию $\varphi_2(t)=t$. Функция $\varphi_2(t)$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы. Положим $p^2=p^1/\varphi_1'(1)$. Согласно теореме 2 существует функция вида $F_1(x_1)+F_2(x_2)$, для которой кривые

$$x_1(t)=t,\ x_2(t)=\varphi_1(t);$$
$$x_1(t)=t,\ x_2(t)=\varphi_2(t)=t$$

являются кривыми Энгеля при ценах $(1,p^1),(1,p^2)$ соответственно. При этом функции F_1 и F_2 связаны соотношением

$$F_1'(x)=F_2'(\varphi_2(x))/p^2.$$

В нашем случае $\varphi_2(x)=x, p^2=p^1/\varphi_1'(1)$. Поэтому $F_1'(x)=$ $=F_2'(x)\,\varphi_1'(1)/p^1$. Остается положить $F(x)=F_1(x)$, $m_2=p^1/\varphi_1'(1)$. Справедливость следствия установлена.

ЛИТЕРАТУРА

1. SAMUELSON P. Foundations of economic Analysis. - Cambrighe, M.A: Harvard Univ. Press, 1947.
2. DYBVIG P. Recovering additive utility functions. - Internat. Economic Review, 1983, v.24, № 2, 1983, p.379-399.

Поступила в ред.изд. отдел
6.I2.I984 г.