Выпуск 35(52) ОПТИМИЗАЦИЯ 1985 г.
Модели динамики и равновесия

УДК 519.86

СТРАТЕГИИ С НЕУБЫВАЮЩИМ ДОХОДОМ В ДИНАМИЧЕСКИХ СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ МЕЖДУ ПРОИЗВОДСТВОМ И ПОТРЕБЛЕНИЕМ

В.К.Доманский, Г.Н.Дюбин

1. В основе построения математических моделей экономики лежит представление о том, что моделируемая "экономика . . . представляет собой целенаправленную,функционирующую, сознательно, планомерно управляемую и оптимизируемую систему" [1, с.46]. При сопоставлении постулатов, лежащих в основе математико-экономических моделей и главных факторов, определяющих функционирование реальных экономических систем, наиболее спорным является вопрос о том, что понимать под оптимальностью функционирования. Проблема значительно усложняется для динамических моделей, включающих в себя случайные параметры.

"Принципы оптимальности", используемые в стохастических моделях экономический динамики, достаточно разнообразны, но все они обладают рядом недостатков (см.обзор в [2]). Примером может служить принцип оптимальности, заключающийся в максимизации суммарной полезности за плановый период или, в стохастическом случае, ее математического ожидания. Одна из существенных трудностей, возникающих при использовании этого принципа, связана с проблемой послепланового периода, т.е. с выяснением того, что должно быть достигнуто в конце планового периода. В абстрактных моделях экономической динамики указанная трудность обходится посредством построения моделей с бесконечным горизонтом планирования, что приводит к рассмотрению бесконечных траекторий и математического ожидания соответствующей

суммарной полезности. Этот подход, конечно, не соответствует реальному положению.

Кроме того, вызывает возражения сам принцип суммирования полезностей на различных временных этапах. Достижение суммарного оптимума может сопровождаться значительным снижением эффективности на отдельных этапах и т.п. Есть основания предполагать, что равномерность функционирования экономического механизма, отсутствие значительных колебаний в достигнутых результатах значительно важнее, чем достижение максимальной суммарной полезности.

Исходя из вышесказанного, в данной работе анализируется принцип оптимальности (обозначаемый далее "принцип А") , в соответствии с которым функционирование экономики считается оптимальным, если:

а) на любом этапе планирование ведется так, что ожидаемая полезность, получаемая на следующем этапе, не меньше полезности, полученной на данном этапе;

б) получаемая на начальном этапе планирования полезность - наибольшая возможная при соблюдении условия а).

Этот принцип, конечно, не может рассматриваться как общеупотребимый и "оптимальный" в любых ситуациях (как, впрочем, и любой другой). Так, например, иногда может оказаться полезным и даже необходимым понизить уровень потребления на начальных этапах с тем, чтобы посредством высоких капиталовложений нарастить производственные мощности и в дальнейшем обеспечить более высокий уровень потребления. Такой подход исключает использование пункта б) описанного принципа оптимальности. Тем не менее, можно предположить, что для экономики, достигшей достаточно высокого уровня развития, подход, основанный на выполнении требования б), достаточно обоснован. Принцип пункта а), по-видимому, не должен вызывать возражений; вопрос состоит лишь в том, способна ли исследуемая экономическая модель ему следовать.

2. Описанный принцип оптимальности изучается в приложении к наиболее простой однопродуктовой последовательной модели распределения ресурса между потреблением и производством, включающей в себя случайные факторы. Модель функционирует в дискретном времени, т.е. состояние модели в момент $t+1$ определяется решениями, принимаемыми в момент $t=0,1,\ldots$

на основании информации, полученной в моменты $0, 1, \ldots, t$. В наиболее общем виде эта модель описывается следующим образом.

Пусть $U=\{U_t, t \geq 0\}$ и $C=\{C_t, t\geq 0\}$ - две заданных последовательности случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и согласованных с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ σ-поля $\mathcal{F}$. Это означает, что $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ - последовательность неубывающих σ-подполей σ-поля $\mathcal{F}$ и при всех $t \geq 0$, величины U_t и C_t являются $\mathcal{F}_t$-измеримыми. Пусть $z_0 \in R^1_+$ - количество ресурса, имеющееся в наличии в начальный момент $t=0$.

В момент $t = 0, 1, 2, \ldots$ имеющееся количество $z_t \in R^1_+$ ресурса должно быть распределено между потреблением (извлечением дохода, измеряемого в единицах полезности) и производством (капиталовложениями, определяющими количество z_{t+1} ресурса в следующий момент $t+1$). Таким образом,

$$z_t = x_t + y_t,$$

где $x_t \in R^1_+$ - количество ресурса, предназначенного для потребления, $y_t \in R^1_+$ - количество ресурса, предназначенного для производства.

В результате в момент $t+1$ будет получена полезность $u_{t+1}(x_t, U_{t+1})$ и количество ресурса окажется равным z_{t+1}, где

$$z_{t+1} = P_{t+1}(y_t, C_{t+1}).$$

Здесь $u_{t+1}(x, U)$ - функция полезности в момент $t+1$, зависящая от случайного фактора U, возрастающая по x и равная нулю при $x = 0$, а $P_{t+1}(y, C)$ - производственная функция в момент $t+1$, зависящая от случайного фактора C, возрастающая по y и равная нулю при $y=0$.

Выбираемые в момент t величины x_t и y_t должны быть $\mathcal{F}_t$-измеримы, т.е. решение должно приниматься только на основании информации о значениях случайных факторов, доступной к моменту t. При таком выборе случайные величины u_{t+1} и z_{t+1} оказываются $\mathcal{F}_t$-измеримыми.

Приложение описанного выше принципа оптимальности A к задаче оптимального распределения ресурса между производством и потреблением в рамках описанной модели допускает раз-

личные трактовки в зависимости от способа учета случайных факторов. Мы рассматриваем две такие трактовки.

I) ЗАДАЧА A_E. Стратегия распределения $\{x_t, t=0,1,\dots\}$ считается A_E-допустимой, если для всех $t=0,1,\dots$ выполнены соотношения

$$E[u_{t+1}(x_t, U_{t+1})|\mathcal{F}_t] \leq E[u_{t+2}(x_{t+2}, U_{t+2})|\mathcal{F}_t]; \tag{I}$$

Далее, будем говорить, что A_E-допустимая стратегия распределения $\{x_t^*, t=0,1,\dots\}$ A_E-оптимальна в точке $z_0 \in R_+^1$, если

$$E[u_1(x_0^*(z_0); V_1)] \geq E[u_1(x_0(z_0), V)]$$

для любой другой A_E-допустимой стратегии $\{x_t, t=0,1,\dots\}$. Стратегия распределения $\{x_t, t=0,1,\dots\}$ называется A_E-оптимальной, если она A_E-оптимальна в любой начальной точке $z \in R_+^1$.

2) ЗАДАЧА A_P. Стратегия распределения $\{x_t, t=0,1,\dots\}$ A_P-допустима, если для всех $t=0,1,\dots$ выполнены соотношения

$$E[u_{t+1}(x_t, U_{t+1})|\mathcal{F}_t] \leq E[u_{t+2}(x_{t+1}, U_{t+2})|\mathcal{F}_{t+1}]. \tag{2}$$

Определения A_P-оптимальных в точке z_0 и A_P-оптимальных стратегий аналогичны определениям A_E-оптимальности.

Отметим, что множества A_E и A_P-допустимых стратегий непусты, ибо они включают стратегию распределения $\{x_t = 0, t=0,1,\dots\}$. Вопрос о существовании нетривиальных A_E и A_P-допустимых стратегий в общей модели достаточно сложен.

Класс A_E-допустимых стратегий значительно шире, чем класс A_P-допустимых стратегий. Ясно, что принятие принципа оптимальности A_P означает значительно более осторожный подход к моделированию, нежели принятие принципа A_E.

3. Ограничимся рассмотрением в качестве иллюстрации предложенного принципа оптимальности частного случая описанной выше модели, для которого:

а) функция полезности не зависит от случайных факторов $(U_t \equiv 1)$ и имеет вид

$$u_{t+1}(x) = \alpha^t \cdot f(x), \quad t=0,1,\dots,$$

где α - коэффициент дисконтирования ($0<\alpha\leq 1$), а f - непрерывная возрастающая функция и $f(0)=0$.

б) производственная функция P мультипликативна, т.е. имеет вид

$$P_{t+1}(y, C_{t+1}) = z_{t+1}(y) = C_{t+1} \cdot y, \quad t = 0, 1, \ldots,$$

где $C_t \sim C$, $t = 1, 2, \ldots,$ – независимые неотрицательные одинаково распределенные случайные величины.

Описанная модель обозначается через $M(f, \alpha, C)$.

Эта модель однородна во времени, т.е. задача распределения ресурса, начинающаяся в момент t, аналогична исходной задаче с начальным ресурсом z_t и с функцией полезности, домноженной на постоянный множитель α^t.

Стратегия распределения этой модели с начальным ресурсом z_0 определяется в общем виде последовательностью функций $\{x_t, t = 0, 1, \ldots\}$

$$x_t : \{z_0, x_0, \ldots, x_{t-1}, z_t\} \to [0, z_t], \quad t = 0, 1, \ldots,$$

где x_t сопоставляет каждой возможной истории к моменту t количество ресурса, направляемое на потребление. Отметим, что реализации $c_1, \ldots, c_t$ случайных величин $C_1, \ldots, C_t$, наблюдавшихся к моменту t, неявно присутствуют в аргументе функции x_t, ибо

$$c_i = \frac{z_i}{z_{i-1} - x_{i-1}}.$$

Естественно, $y_i = z_i - x_i$.

Ввиду однородности модели $M(f, \alpha, C)$ во времени при ее анализе существенную роль играют распределения, определяемые лишь количеством ресурсов, имеющихся в наличиии в момент t, т.е. стационарные стратегии.

Стратегия $\{x_t, t = 0, 1, \ldots\}$ называется стационарной, если существует такая функция $x(z)$, что $0 \le x(z) \le z$ и при всех $t = 0, 1, \ldots$ и $z \in R^1_+$

$$x_t(z_0, x_0, \ldots, x_{t-1}, z_t) = x(z_t).$$

В дальнейшем отождествляем стационарную стратегию с задающей ее функцией $x(z)$.

Естественно, все входящие в определения стратегии функции должны быть измеримы. В дальнейшем изложении не касаемся вопросов, связанных с измеримостью. Соответствующие построения могут быть проведены с помощью стандартных методов.

4. Рассмотрим сначала детерминированный случай, для которого принципы A_p и A_E совпадают. В этом случае $\rho_t(y)=c\cdot y$, $c>1$, $u_t(x)=\alpha^t\cdot f(x)$, где $f(x)$ - непрерывная строго возрастающая функция, $f(0)=0$, $\alpha<1$. Стратегия распределения $\{x_t, t=0,1,\ldots\}$ называется A-допустимой, если

$$f(x_0)\leq \alpha f(x_1)\leq \ldots \leq \alpha^n f(x_n)\leq \ldots; \tag{3}$$

$$x_k+y_k=z_k,\ z_{k+1}=cy_k,\ x_k,y_k\geq 0.$$

Стратегия $x^*=\{x_t^*, t=0,1,\ldots\}$ будет оптимальной, если

$$f(x_0^*)=\max_x f(x_0),$$

где максимум берется по всем A-допустимым стратегиям.

Рассмотрим систему уравнений

$$f(z_0-y_0)=\alpha f(c\cdot y_0-y_1)=\ldots=\alpha^t f(c\cdot y_{t-1}-y_t).$$

Здесь $y_t=z_t-x_t$.

Выражая последовательно y_t, $t\geq 1$, через y_0, получим

$$y_1(y_0,z_0)=c\cdot\left(y_0-\frac{f^{-1}\left(\frac{f(z_0-y_0)}{\alpha}\right)}{c}\right);$$

. . . .

$$y_t(y_0,z_0)=c^t\left(y_0-S_t(y_0,z_0)\right),$$

. . . .

где $S_t(y_0,z_0)$ - сумма t первых членов ряда

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{f^{-1}\left(\frac{f(z_0-y_0)}{\alpha^t}\right)}{c^t}. \tag{4}$$

Заметим далее, что при фиксированном z_0 выбор $0\leq y_0\leq z_0$ определяет набор функций $\{y_t, t=0,1,\ldots\}$, которые рекуррентными соотношениями (3) определяют стратегию $x(y_0)$. Эта стратегия будет A-допустимой тогда и только тогда, когда все $y_t(y_0,z_0)=c^t\cdot(y_0-S_t(y_0,z_0))$ будут положительны.

Обозначим через $g(y_0,z_0)$ сумму ряда (4), если он равномерно сходится на отрезке $[0,z_0]$. Очевидно, что функция $g(y_0,z_0)$ - непрерывная на отрезке $[0,z_0]$.

ТЕОРЕМА I. Если ряд (4) равномерно сходится на отрезке $[0,z_0]$, то

уравнение

$$y_0 = g(y_0, z_0) \tag{5}$$

имеет на этом отрезке единственный корень y_0^*, а оптимальная стратегия единственна и равна $x(y_0^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что уравнение (5) имеет единственное решение на отрезке $[0, z_0]$, так как функция $y_0 - g(y_0, z_0)$ в нуле отрицательна, в z_0 положительна, непрерывна и сторого возрастает. Кроме того, очевидно, что y_0^* является наименьшим из чисел отрезка $[0, z_0]$, для которых все числа

$$y_t(y_0, z_0) = c^t(y_0 - S_t(y_0, z_0))$$

строго положительны.

Докажем теперь, что стратегия

$$x(y_0^*) = \{x_t(y_0^*)\},$$

где $x_0 = z_0 - y_0^*,\ x_t(y_0^*) = c\,y_{t-1}(y_0^*) - y_t(y_0^*),\ t = 1, 2, \dots,$
A -оптимальна.

Предположим противное, т.е. предположим, что существуют A -допустимая стратегия, $\bar{x} = \{\bar{x}_t,\ t = 0, 1, \dots\}$, для которой $f(\bar{x}_0) > f(x_0(y_0^*))$. Это значит, что существует набор неотрицательных чисел $\beta_0^0, \beta_1^0, \dots, \beta_t^0, \dots$, для которых выполняются равенства

$$f(z_0 - \bar{y}_0) + \beta_0^0 = \alpha \cdot f(c\bar{y}_0 - y_1),$$

$$f(c\bar{y}_{t-1} - \bar{y}_t) + \beta_t^0 = \alpha f(c\bar{y}_t - \bar{y}_{t+1}),\ t = 1, 2, \dots,$$

и

$$\bar{y}_0 < y_0^*. \tag{6}$$

Рассмотрим далее систему уравнений

$$f(z_0 - \bar{y}_0) + \beta_0 = \alpha \cdot f(c\bar{y}_0 - y_1),$$

$$f(c y_{t-1} - y_t) + \beta_t = \alpha f(c y_t - y_{t+1}),\ t = 1, 2, \dots$$

Выражая последовательно y_t через $\bar{y}_0, z_0, \beta_1, \dots, \beta_{t-1}$, легко убедиться, что каждая из функций $y_t(\bar{y}_0, z_0, \beta_1, \dots, \beta_{t-1})$

убывает по любому из параметров β_i. При $\beta_t=0, t=0,1,\dots,$ функция $y_t(\bar{y}_0, z_0, \beta_1, \dots, \beta_{t-1})$ равна $y_t(\bar{y}_0, z_0)$, а при $\beta_t=\beta_t^0$ она равна $\bar{y}_t$. Следовательно, имеют место неравенства

$$\bar{y}_t \le y_t(\bar{y}_0, z_0).$$

Но в силу неравенства (6) при некотором t имеет место неравенство $y_t(\bar{y}_0, z_0)<0$, так как y_0^* - наименьшее из чисел y_0 отрезка $[0, z_0]$, для которых все $y_t(y_0, z_0)$ положительны. Это приводит к абсурдному неравенству $\bar{y}_t<0$. Следовательно, $x(y_0^*)=\{x_t(y_0^*)\}$ - оптимальная стратегия. Ее единственность доказывается аналогично (для этого надо рассмотреть первое t, для которого $\bar{y}_t < y_t(y_0^*, z_0)$).

Покажем, что построенная A-оптимальная стратегия стационарна.

ТЕОРЕМА 2. Корень уравнения

$$y_0=g(y_0, cy_{t-1}(y_0^*, z_0)$$

равен $y_t(y_0^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$y_t(y_0^*, z_0)=c\cdot y_{t-1}(y_0^*, z_0)-f^{-1}\left(\frac{f(z_0-y_0^*)}{\alpha^t}\right),$$

имеет место равенство

$$y_t(y_0^*, z_0)-g(y_t(y_0^*, z_0), cy_{t-1}(y_0^*, z_0)=$$

$$=c^t y_0^*-\sum_{k=1}^{t} c^{t-k} f^{-1}\left(\frac{f(z_0-y_0^*)}{\alpha k}\right)-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} f^{-1}\left(\frac{f(cy_{t-1}(y_0^*, z_0)-y_t(y_0^*, z_0))}{\alpha^{k+t}}\right)=$$

$$=c^t(y_0^*-g(y_0^*, z_0))=0.$$

Это доказывает теорему 2.

ПРИМЕР. Пусть $f(x)=x^{\beta}$. Тогда ряд (4) будет сходиться равномерно, если

$$\frac{\left(\frac{(z_0-y_0)^\beta}{\alpha^{t+1}}\right)^{1/\beta}\cdot c^t}{c^{t+1}\left(\frac{(z_0-y_0)^\beta}{\alpha^t}\right)^{1/\beta}}<1,$$

т.е.

$$1/c\alpha^{1/\beta}<1.$$

В случае линейной полезности это условие перепишется в виде

$$c>1/\alpha .$$

Коэффициент $1/\alpha$ можно трактовать как темп роста уровня жизни. Тогда это условие означает то, что темп производства должен быть выше темпа роста уровня жизни.

5. Обратимся к рассмотрению принципа оптимальности A_p для модели $M(f,\alpha,C)$ (случайная величина C). В этом случае соотношения (2), определяющие A_p-допустимую стратегию распределения $\{x_t, t=0,1,\ldots\}$, могут быть записаны в виде

$$f(x_t(\cdot))\leq\alpha f(x_{t+1}(\cdot,x_t,cy)) \quad P_C \text{ - п.н.},$$

где P_C - вероятностная мера, порождаемая на R^1_+ случайной величиной C.

ТЕОРЕМА. Пусть $\bar{C}=\operatorname{ess\,inf} C$. Тогда A_p -оптимальная стационарная стратегия распределения $x_{\bar{c}}(z)$ для детерминированной модели $M(f,\alpha,\bar{C})$ является A_p-оптимальной стратегией для стохастической модели $M(f,\alpha,C)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $x_{\bar{c}}(z)$ является A_p-допустимой стратегией. Покажем, что $x_{\bar{c}}(z)$ является максимально возможным количеством ресурсов, используемым для потребления при начальном ресурсе z. Действительно, пусть при некотором $z\in R^1_+$ для некоторой стратегии $\{x'_t, t=0,1,\ldots\}$

выполняется соотношение $x'_0(z)=x>x_{\bar{c}}(z).$

Найдется такое число $c_1>\bar{C}$, что $x_{c_1}(z)$ также меньше x , и при этом вероятность

$$P\{C<c_1\}=\delta>0.$$

С вероятностью δ^n на протяжении n шагов множитель C производственной функции будет меньше c_1. Рассмотрим детерминированную модель $M(f,\alpha,c_1)$ с начальным количеством ресурсов z. Как следует из теоремы I, любая стратегия с начальным потреблением $x_0(z)=x>x_{c_1}(z)$ не является A-допустимой для модели $M(f,\alpha,c_1)$ и для некоторого шага h выполнено соотношение $f(x_n)>\alpha f(x_{n+1})$. Тем более и для стохастической модели $M(f,\alpha,C)$ при использовании стратегии $\{x'_t,\ t=0,1,\dots\}$ с вероятностью, большей чем δ^n, будет выполнено то же неравенство, и стратегия $\{x'_t,\ t=0,1,\dots\}$ не является A_p-допустимой. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Принцип оптимальности A_p допускает существование иных A_p-оптимальных (нестационарных) стратегий, основанных на нерациональном использовании случайно возникающих избыточных ресурсов. Описанная в теореме стационарная A_p-оптимальная стратегия в некотором смысле наиболее рациональна.

6. Обратимся теперь к рассмотрению принципа оптимальности A_E для модели $M(f,\alpha,C)$. В этом случае соотношения (I), определяющие A_E-допустимую стратегию $\{x_t,\ t=0,1,\dots\}$, обращаются в соотношения $f(x_t(\cdot))\le\alpha\, E_C[f(x_{t+1}(\cdot,x_t,C\cdot y_t))]$, где E_C - математическое ожидание относительно распределения, порождаемого на R^1_+ случайной величиной C.

В дальнейшем будем предполагать, что $E_C[f(C\cdot a)]<\infty$ при любом $a\in R^1_+$ и, таким образом, множества функций $f(x(Cy))$ для любых потреблений $x<Cy$ равномерно интегрируемы.

Положим $x^*(z)=\max x_0(z)$ для всех A_E-допустимых стратегий распределения (здесь максимум достигается ввиду условия равномерной интегрируемости).

ЛЕММА. Имеет место соотношение

$$\begin{gathered} f(x^*(z))=\alpha\, E_C[f(x^*(cy^*(z)))]; \\ y^*(z)=z-x^*(z). \end{gathered} \tag{7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть при некотором $z\in R^1_+$

$$f(x^*(z_0))>\alpha\, E_C[f(x^*(cy^*(z)))]$$

и пусть

$$\{x^*(z_0), x_1(z_0, x^*(z), cy^*(z_0)), \ldots\}$$

- A_E -допустимая стратегия. Но $x_1(z_0), x^*(z_0), Cy^*(z_0)) \le$ $\le x^*(Cy(z_0))$ по определению и, следовательно,

$$f(x^*(z_0)) > \alpha E_C[f(x_1(z_0, x^*(z_0), Cy(z_0)))],$$

что противоречит A_E-допустимости этой стратегии.

Следовательно,

$$f(x^*(z)) \le \alpha E_C[f(x^*(Cy^*(z)))].$$

Если в этом соотношении при некотором $z_0 \in R^1_+$ неравенство строгое, то найдется $z_0 > x'(z_0) > x^*(z_0)$, для которого

$$f(x'(z_0)) = \alpha E_C[f(x^*(Cy(z)))].$$

Рассмотрим функция $x'(z)$, равную $x^*(z)$ при $z \ne z_0$ и равную $x'(z_0)$ при $z = z_0$. Эта функция удовлетворяет соотношениям $0 \le x'(z) \le z$ и

$$f(x'(z)) \le \alpha E_C[f(x'(C \cdot y'(z)))].$$

Следовательно, $x'(z)$ определяет стационарную A_E-допустимую стратегию, для которой $x'(z_0) > x^*(z_0)$. Это противоречит определению $x^*(z)$. Лемма доказана.

Ввиду соотношения (7) функция $x^*(z)$ определяет стационарную A_E-допустимую стратегию.

ТЕОРЕМА. *Функция $x^*(z)$ является максимальным решением уравнения*

$$f(x(z)) = \alpha E_C[f(x(C \cdot y(z)))], \quad x(z) + y(z) = z, \qquad (8)$$

удовлетворяющим условию $0 < x(z) < z$ и определяющим стационарную A_E-оптимальную стратегию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. A_E-оптимальность стратегии $x^*(z)$ следует из ее определения. Пусть существует другое решение уравнения (8), удовлетворяющее условию $0 < x(z) < z$, для которого, при некотором $z_0 \in R^1_+$, $x(z_0) > x^*(z_0)$. Тогда стратегия $x(z)$ является A_E-допустимой стратегией, и последнее неравенство противоречит определению x^*. Теорема доказана.

В качестве примера использования принципа A_E рассмотрим

модель распределения ресурса $M(f, \alpha, C)$, для которой

$$f(x)=x^p.$$

Будем искать решение уравнения (8) в форме линейной функции от z, $x(z)=az$. Тогда уравнение (8) запишется как

$$(az)^p=\alpha E_C[(aC(1-a)z)^p],$$

откуда

$$1-a=\frac{1}{\alpha^{1/p}(E[C^p])^{1/p}}.$$

Таким образом, уравнение (8) имеет решением линейную функцию az в том и только в том случае, если

$$\alpha E[C^p]>1.$$

Это условие аналогично условию, полученному для детерминированного случая. Используя конструкции, аналогичные рассматривавшимся при анализе детерминированной модели, можно показать, что

а) при $\alpha E[C^p]>1$ функция

$$x(z)=\left(1-\frac{1}{\alpha^{1/p}(E[C^p])^{1/p}}\right)\cdot z$$

задает стационарную A_ε-оптимальную стратегию;

б) при $\alpha E[C^p]\leq 1$ единственной A_ε-допустимой стратегией будет тривиальная стратегия $x(z)=0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. ФЕДОРЕНКО Н.П. Вопросы оптимального функционирования экономики. - М.: Наука, 1980.
2. РУБИНОВ А.М. Математические модели расширенного воспроизводства. - Л.: Наука, 1983.

Поступила в ред.-изд. отдел
12.09.1984 г.