Выпуск 36(53) ОПТИМИЗАЦИЯ 1985 г.

Численные методы

УДК 519.853

К ЗАДАЧЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ЛЕБЕГОВОЙ МЕРЫ НА ЕВКЛИДОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Ю.Н.Владимиров

В работе рассматривается один частный случай задачи Монжа - Канторовича (см. [1-6; 7, гл.8, §4]) об оптимальном перемещении массы. Изучается некоторый метод решения поставленной задачи. Приводятся результаты численных расчетов на ЭВМ.

§1. Функции Липшица в конечномерном евклидовом пространстве

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой $r(p,q)$ и класс $Lip_{1,1}(\mathbb{R}^n)$ функций $u:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих при любых p и q из $\mathbb{R}^n$ неравенству

$$u(q)-u(p)\le r(p,q). \qquad (1)$$

Каждая функция $u\in Lip_{1,1}(\mathbb{R}^n)$ порождает в $\mathbb{R}^n$ частичный порядок: $p \preccurlyeq^u q$ в том и только в том случае, когда

$$u(q)-u(p)=r(p,q). \qquad (2)$$

Заметим при этом, что если $p \preccurlyeq^u q$ и p' принадлежит замкнутому отрезку $[p,q]$, то $p \preccurlyeq^u p' \preccurlyeq^u q$. С другой стороны, если $p \preccurlyeq^u q$, $p\neq q$ и q' не принадлежит прямой, проходящей через p и q, то точка q' не сравнима ни с какой точкой открытого интервала (p,q).

Максимальные по включению линейно-упорядоченные множества, отвечающие функции $u\in Lip_{1,1}(\mathbb{R}^n)$, назовем линиями тока этой функции. Из сказанного выше следует, что каждая линия тока является подмножеством $\mathbb{R}^n$ одного из следующих типов: а) точкой; б) замкнутым отрезком; в) замкнутым лучом; г) прямой. Если две различные линии тока имеют общую точку p_0, то p_0 – либо минимальный, либо максимальный элемент для этих линий тока. Кроме того, линии тока ортогональны "поверхностям" уровня функции u: если отрезок $[p_1, p_2]$ линии тока содержит точку p_0, то

$$B(p_i, r(p_i, p_0)) \cap \{q \in \mathbb{R}^n \mid u(q) = u(p_0)\} = \emptyset, \quad i = 1, 2,$$

где $B(p, \varepsilon)$ – открытый шар с центром в точке p радиуса ε. Более подробно о свойствах линий тока см. [8–12].

Отметим теперь, что для каждой функции v, определенной на некотором множестве $M \subset \mathbb{R}^n$ и удовлетворяющей при любых p и q из M неравенству (I), найдется функция $u \in Lip_{1,1}(\mathbb{R}^n)$, сужение которой на M совпадает с v.

Опишем схему указанного продолжения функции v на все пространство $\mathbb{R}^n$. Пусть функция u определена на множестве $M_1 \supseteq M$, удовлетворяет при любых p и q из M_1 неравенству (I) и $u(p') = v(p'), p' \in M$. Тогда при любых $p, q \in M_1$ и $q' \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$u(q) - u(p) \leq r(p, q) \leq r(p, q') + r(q, q').$$

Отсюда

$$u(q) - r(q, q') \leq u(p) + r(p, q').$$

Положим

$$\alpha(q') = \sup\{u(q) - r(q, q') \mid q \in M_1\},$$

$$\beta(q') = \inf\{u(p) + r(p, q') \mid p \in M_1\}.$$

Значит, $\alpha(q') \leq \beta(q')$. Зафиксируем теперь $q' \in \mathbb{R}^n \setminus M_1$ и в качестве $u(q')$ выберем любое значение из $[\alpha(q'), \beta(q')]$. Следовательно, функция u определена на множестве $M_1 \cup \{q'\}$ и при любых p и q из этого множества удовлетворяет неравенству (I).

Описанным способом функция u, очевидно, может быть определена на всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Однако указанное продолжение, вообще говоря, не единственно.

§2. Постановка и предварительный анализ задачи перемещения массы в конечномерном евклидовом пространстве

Пусть на системе $\mathcal{B}$ борелевских множеств евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ заданы конечные меры φ_i с компактными носителями $supp\,\varphi_i, i=1,2$, причем $\varphi_1(\mathbb{R}^n)=\varphi_2(\mathbb{R}^n)>0$. Введем в рассмотрение семейство Ψ определенных на $\mathcal{B}^2=\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ неотрицательных счетно-аддитивных по каждому аргументу функций (перемещений) ψ.

ЗАДАЧА I. В множестве допустимых перемещений

$$\Psi_{\varphi_1\varphi_2}=\{\psi\in\Psi \mid \psi(e,\mathbb{R}^n)=\varphi_1(e), \psi(\mathbb{R}^n,e)=\varphi_2(e), e\in\mathcal{B}\}$$

найти оптимальное перемещение, для которого достигает минимума величина

$$\tau(\psi)=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} r(p,q)\,\psi(de,de').$$

Заметим, что в поставленной задаче множество $\Psi_{\varphi_1\varphi_2}$ всегда не пусто. В него входит, например, функция

$$\psi(e,e')=\frac{\varphi_1(e)\,\varphi_2(e')}{\varphi_1(\mathbb{R}^n)},\quad e,e'\in\mathcal{B}.$$

Кроме того, носитель $supp\,\psi$ любого допустимого перемещения $\psi\in\Psi_{\varphi_1\varphi_2}$ содержится в произведении $supp\,\varphi_1\times supp\,\varphi_2$.

Известно (см.[2-7]), что задача I всегда разрешима. Допустимое перемещение $\psi\in\Psi_{\varphi_1\varphi_2}$ в том и только в том случае является оптимальным, когда найдется функция $u\in Lip_{1,1}(\mathbb{R}^n)$ такая, что для всех пар $(p,q)\in supp\,\psi$ выполняется равенство (2). Функцию u в данном случае принято называть потенциальной функцией перемещения ψ.

В дальнейшем нас в основном будет интересовать случай, когда в качестве исходных распределений массы принимаются функции

$$\varphi_i(e)=\mu(e\cap Q_i),\ e\in\mathcal{B},\ i=1,2, \qquad (3)$$

где μ - лебегова мера, а Q_1 и Q_2 - заданные компактные подмножества $\mathbb{R}^n$, для которых $\mu(Q_1)=\mu(Q_2)$. В этом случае (см.[8,13]) всегда существует оптимальное перемещение вида

$$\Psi_f(e,e')=\mu(f(e)\cap e'),\ e,e'\in\mathcal{B}, \tag{4}$$

где f – взаимно-однозначное отображение почти всего компакта Q_1 на почти весь компакт Q_2, удовлетворяющее равенствам

$$\mu(f(e))=\mu(e\cap Q_1),\ e\in\mathcal{B}. \tag{5}$$

Множество граничных точек линий тока соответствующей потенциальной функции u имеет нулевую лебегову меру (см.[8]). Это, в частности, означает, что справедливо следующее условие.

I°. Для любого множества $L\in\mathcal{B}$, являющегося объединением некоторого семейства линий тока функции u, выполняется равенство $\varphi_1(L)=\varphi_2(L)$.

Допустим теперь, что для фигурирующих в задаче I мер φ_1 и φ_2 имеет место неравенство $\varphi_1(\mathbb{R}^n)<\varphi_2(\mathbb{R}^n)$. В этом случае возникает следующая экстремальная задача.

ЗАДАЧА 2. Среди определенных на $\mathcal{B}$ мер φ_2', удовлетворяющих условию

$$\varphi_2'(\mathbb{R}^n)=\varphi_1(\mathbb{R}^n),\ \varphi_2'(e)\le\varphi_2(e),\ e\in\mathcal{B},$$

найти такую, для которой достигает минимума величина

$$\nu(\varphi_2')=\min\{\tau(\Psi)\mid\Psi\in\Psi_{\varphi_1\varphi_2'}\}.$$

В задаче 2 всегда существует решение φ_2' (см.[4-6]), характеризующееся наличием перемещения $\Psi\in\Psi_{\varphi_1\varphi_2'}$ и отвечающей ему потенциальной функции $u\in Lip_{1,1}(\mathbb{R}^n)$ таких, что

$$u(p)\le u(q)\ \text{, если}\ p\in supp\,\varphi_2',\ q\in supp(\varphi_2-\varphi_2').$$

§3. Оптимальные перемещения лебеговой меры на евклидовой плоскости

Пусть на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ заданы выпуклые компакты Q_1 и Q_2, для которых

$$int\,Q_1\cap int\,Q_2=\emptyset,\ \mu(Q_1)=\mu(Q_2)>0,$$

где $int\,Q_i$ – совокупность всех внутренних точек множества Q_i, а μ – лебегова мера. Рассмотрим задачу I с исходными распределениями массы (3). Пусть Ψ – оптимальное перемещение и $u\in Lip_{1,1}(\mathbb{R}^2)$ – соответствующая потенциальная функция. Тогда, очевидно, через каждую внутреннюю точку p компакта $Q=Q_1 \cup Q_2$ проходит некоторая невырожденная линия тока l функции u, пересекающая множества Q_1 и Q_2. Предположим, что выполняется следующее условие.

2^0. Множество $\operatorname{int} Q$ не содержит граничных точек линий тока функции u.

Тогда через каждую точку $p \in \operatorname{int} Q$ проходит единственная линия тока $l=l_p$. Условие I^0 в данном случае можно записать в следующей форме.

3^0. Для любой линии тока $l_p, p \in \operatorname{int} Q$, справедливы равенства

$$\mu(Q_1 \cap F_i^p) = \mu(Q_2 \cap F_i^p),\ i=1,2, \qquad (6)$$

где F_i^p - замкнутые полуплоскости, порожденные проходящей через l_p прямой.

С другой стороны, если для некоторой функции $u \in Lip_{1,1}(\mathbb{R}^2)$ выполнены условия 2^0 и 3^0, то можно указать оптимальное перемещение вида (4), где в качестве f выбирается удовлетворяющее (5) гомеоморфное отображение множества $\operatorname{int} Q_1$ на множество $\operatorname{int} Q_2$, для которого $f(p) \in l_p$. При этом, очевидно,

$$\tau(\psi_f) = \int_{Q_1} r(p, f(p))\, d\mu.$$

Указанное отображение f можно построить, например, следующим образом: пусть $p \in \operatorname{int} Q_1$, $[p', q''] = l_p \cap \operatorname{conv} Q$, где $\operatorname{conv} Q$ - выпуклая оболочка множества Q, $[p', p''] = l_p \cap Q_1$, $[q', q''] = l_p \cap Q_2$, $a = r(p', p'')$, $b = r(q', q'')$, $c = r(p, p'')$, $a_0 = r(p'', q')$, $h = \dfrac{a^2 + 2aa_0 + b^2}{2(b-a)}$; точке p поставим в соответствие точку $q = f(p) \in [q', q'']$, для которой справедливо равенство

$$r(q, q') = \begin{cases} h - \operatorname{sign}(h)\sqrt{h^2 - (2h + 2a_0 + c)c}, & \text{если } a \neq b, \\ c, & \text{если } a = b. \end{cases}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть через каждую точку $p \in \operatorname{int} Q$ проходит единственная прямая l_p такая, что для отвечающих ей замкнутых полуплоскостей

F_i^p, $i=1,2$, выполнено равенство (6). Тогда существует функция $u_0 \in$ $\in Lip_{1,1}(R^2)$, для которой отрезки $d_p = l_p \cap conv\, Q$ являются отрезками ее линий тока.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что точка пересечения двух различных прямых l_p и l_q, $p,q \in int\, Q$, не может принадлежать $int(conv\, Q)$. Следовательно, объединение точек отрезков $d_p, p \in int\, Q$, является выпуклым множеством; замыкание этого множества совпадает с $conv\, Q$. Таким образом, через каждую точку $p \in int\,(conv\, Q)$ проходит единственная прямая $l = l_p$, удовлетворяющая равенству (6). При этом множество прямых $l_p, p \in int\, Q$, совпадает с множеством прямых l_p, $p \in int\,(conv\, Q)$.

Пусть прямая l_0 разделяет множества Q_1 и Q_2. Тогда, очевидно, угол $\alpha = \alpha(p)$ между прямыми l_0 и l_p является непрерывной функцией, причем существует такое $\delta > 0$, что $\delta \le \alpha(p) \le \pi - \delta$, $p \in int\,(conv\, Q)$.

Зафиксируем $q_0 \in int\,(conv\, Q)$, и пусть $d_{q_0} = [q_1, q_2]$, где $q_1 \in Q_1$, $q_2 \in Q_2$. Через точку q_0 проходит некоторая простая гладкая кривая γ, ортогональная пересекающим ее отрезкам d_p и такая, что ее граничные точки принадлежат границе множества $conv\, Q$. Кривая γ разбивает множество $conv\, Q$ на две замкнутые компоненты Γ_1 и Γ_2, $q_1 \in \Gamma_1$, $q_2 \in \Gamma_2$. Рассмотрим множество $\mathcal{D}_\gamma$, являющееся объединением точек отрезков d_p, $p \in \gamma \cap int(conv\, Q)$, и его замыкание $\bar{\mathcal{D}}_\gamma$. Положим

$$u_0(p) = \begin{cases} -r(p,\gamma), & p \in \bar{\mathcal{D}}_\gamma \cap \Gamma_1, \\ r(p,\gamma), & p \in \bar{\mathcal{D}}_\gamma \cap \Gamma_2. \end{cases}$$

Функция u_0 тем самым определена на множестве $\bar{\mathcal{D}}_\gamma$, которое, вообще говоря, не совпадает с $conv\, Q$. Схема продолжения функции u_0 на множество $conv\, Q$ следующая.

Пусть функция u_0 определена на замкнутом выпуклом подмножестве $F \subset conv\, Q$, которое вместе с каждой точкой $p \in F \cap$ $\cap\, int\, Q$ содержит весь отрезок d_p. Выберем точку $q_0' \in int(conv\, Q)$, которая является граничной для F. Через эту точку проходит единственный отрезок $d_{q_0'} = [q_1', q_2']$, где $q_1 \in Q_1$, $q_2' \in Q_2$, и некоторая простая гладкая кривая γ', ортогональная пересекающим ее отрезкам d_p и такая, что ее граничные точки принадлежат границе множества $conv\, Q$. Обозначим через F_0 порожденную прямой $\ell_{q_0'}$ замкнутую полуплоскость, которая не содержит F. Кривая γ' разбивает множество $(conv\, Q) \cap F_0$ на две замкнутые компоненты Γ_1' и Γ_2', $q_1' \in \Gamma_1'$, $q_2' \in \Gamma_2'$. Рассмотрим множество $\mathcal{D}_{\gamma'}$, являющееся объединением точек отрезков d_p, $p \in \gamma' \cap int\,(conv\, Q) \cap F_0$, и его замыкание $\bar{\mathcal{D}}_{\gamma'}$. Положим

$$u_0(p) = \begin{cases} u_0(q_0') - r(p, \gamma'), & p \in \bar{\mathcal{D}}_{\gamma'} \cap \Gamma_1', \\ u_0(q_0') + r(p, \gamma'), & p \in \bar{\mathcal{D}}_{\gamma'} \cap \Gamma_2'. \end{cases}$$

Этим способом u_0 может быть продолжена на множество $conv\, Q$.

Построенная функция $u_0 : conv\, Q \longrightarrow \mathbb{R}$, очевидно, удовлетворяет при всех p и q из $conv\, Q$ условию (I), причем отрезки d_p являются отрезками ее линий тока. Схема продолжения функции u_0 на всю плоскость $\mathbb{R}^2$ описана в §I. Утверждение доказано.

Заметим, что условие предложения I не всегда выполняется даже для множеств Q, рассматриваемых в этом параграфе. Чтобы в этом убедиться, достаточно взять

$$Q_1 = \{p = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \le \tfrac{1}{2}, -1 \le y \le 0\},$$

$$Q_2 = \{p = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \le \tfrac{1}{2H}, 0 \le y \le H\}.$$

Если $\sqrt{2} - 1 \le H \le \sqrt{2} + 1$, то условие предложения I выполняется, если же $0 < H < \sqrt{2} - 1$ или $H > \sqrt{2} + 1$, то это условие не выполняется. Заметим, однако, что в данном случае указанное условие справедливо для симметричных относительно оси OY множеств

$$Q^+ = \{p = (x, y) \in Q \mid x \ge 0\}, \quad Q^- = \{p = (x, y) \in Q \mid x \le 0\}.$$

Это позволяет построить функцию $u_0 \in Lip_{1,1}(\mathbb{R}^2)$, для которой соответствующие отрезки d_p, $p \in int\, Q^+ \cup int\, Q^-$, являются отрезками ее линий тока. При этом, например, в случае $0 < H < \sqrt{2} - 1$ любая линия тока, пересекающая отрезок $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ оси OX, начинается в точке $P = \left(0, -\frac{H}{\sqrt{2}-1}\right)$, а из каждой точки промежутка $[-1, -\frac{H}{\sqrt{2}\cdot 1})$ оси OY выходят две симметричные относительно этой оси линии тока.

Выделим теперь некоторый класс компактов Q, для которых условие предложения I всегда выполняется.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если исходное множество Q является выпуклым, то через каждую точку $p \in \operatorname{int} Q$ проходит единственная прямая ℓ_p такая, что для отвечающих ей замкнутых полуплоскостей F_i^p, $i=1,2$, выполняется равенство (6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через ℓ_0 прямую, разделяющую множества Q_1 и Q_2. Пусть $[p_1, p_2]$ – замкнутый отрезок, являющийся пересечением прямой ℓ_0 и множества Q. Заметим, что если для точки $p \in \operatorname{int} Q$ некоторая прямая ℓ_p удовлетворяет равенству (6), то эта прямая пересекает интервал (p_1, p_2). Далее, через каждую точку p интервала (p_1, p_2) проходит, очевидно, единственная прямая ℓ_p, для которой выполняется равенство (6). Нетрудно видеть, что для соответствующих отрезков $d_p = [p', p'']$ справедливы следующие неравенства:

$$\sqrt{2} - 1 \leq \frac{r(p, p')}{r(p, p'')} \leq \sqrt{2} + 1,$$

причем каждое из равенств возможно в том и только в том случае, когда Q является треугольником, одна сторона которого параллельна прямой ℓ_0.

Предположим теперь, что для некоторых $p, q \in (p_1, p_2)$ точка p_0 пересечения прямых ℓ_p и ℓ_q принадлежит $\operatorname{int} Q$. Пусть для определенности $p_0 \in \operatorname{int} Q_1$; $p_i \in F_i^p$, $p_i \in F_i^q$, $i=1,2$;

$q \in (p, p_2)$; $d_p = [p', p'']$; $d_q = [q', q'']$; $p', q' \in Q_1$; $p'', q'' \in Q_2$.

Тогда

$$\frac{r(p, p'')}{r(p, p_0)} > \frac{r(p, p'')}{r(p, p')} \geq \sqrt{2} - 1, \quad \frac{r(q, q'')}{r(q, p_0)} > \frac{r(q, q'')}{r(q, q')} \geq \sqrt{2} - 1.$$

Следовательно, площадь треугольника с вершинами в точках p, q, p_0 строго меньше площади четырехугольника с вершинами в точках p, q, p'', q''. Отсюда

$$\mu(F_2^p \cap F_1^q \cap Q_1) < \mu(F_2^p \cap F_1^q \cap Q_2). \qquad (7)$$

Кроме того, по определению прямой ℓ_p

$$\mu(F_2^p \cap Q_1) = \mu(F_2^p \cap Q_2). \qquad (8)$$

Из соотношений (7) и (8) вытекает неравенство

$$\mu(F_1^q \cap Q_1) < \mu(F_1^q \cap Q_2),$$

которое противоречит определению прямой ℓ_q.

Таким образом, точка пересечения прямых ℓ_p и ℓ_q не может принадлежать $int\, Q$. Утверждение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Непосредственно из приведенного доказательства вытекает, что если точка p_0 пересечения двух различных прямых ℓ_p и ℓ_q, $p,q \in int\, Q$, принадлежит границе множества Q, то и любая другая прямая $\ell_{p'}$, $p' \in int\, Q$, проходит через p_0, т.е. Q является треугольником, одна сторона которого параллельна соответствующей прямой ℓ_0.

В табл. I приведены результаты численных расчетов на ЭВМ для конкретных примеров.

Перейдем теперь к случаю, когда $0 < \mu(Q_1) < \mu(Q_2)$, и рассмотрим задачу 2 с исходными распределениями массы (3).

Пусть $\gamma' \subset (conv\, Q) \setminus int\, Q_1$ – простая кривая, граничные точки которой принадлежат границе множества $conv\, Q$. Тогда γ' разбивает $conv\, Q$ на два замкнутых односвязных подмножества. Подмножество, содержащее Q_1, обозначим через Q'. Положим $\gamma = \gamma' \cap Q_2$, $Q^\gamma = Q \cap Q'$, $Q_2^\gamma = Q_2 \cap Q'$, $\varphi_\gamma(e) = \mu(e \cap Q_2^\gamma)$, где $e \in \mathcal{B}$. Непосредственно из приведенного в §I критерия оптимальности для задачи 2 вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Мера φ_γ, удовлетворяющая условию $\varphi_\gamma(Q) = \varphi_1(Q')$, доставляет минимум функции ν в задаче 2 в том и только в том случае, когда для некоторого $\psi \in \Psi_{\varphi_1 \varphi_\gamma}$ найдется соответствующая потенциальная функция $u \in Lip_{1,1}(\mathbb{R}^2)$, для которой кривая γ является линией уровня.

Рассмотрим изученную в [14,15] задачу перемещения массы прямоугольника

$$Q_1 = \{p = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq \tfrac{1}{2},\ -a \leq y \leq 0\}$$

в верхнюю полуплоскость

$$Q_2=\{P=(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\geq 0\}.$$

В этой задаче искомое множество Q_2^{γ} является выпуклым и симметричным относительно оси OY. Более того, существует такое $a_1>0$, что при $0<a\leqslant a_1$ через каждую точку $P\in \in \mathrm{int}\, Q^{\gamma}$ проходит единственная прямая ℓ_P, для которой

$$\mu(Q_1\cap F_i^P)=\mu(Q_2^{\gamma}\cap F_i^P),\ i=1,2, \quad (9)$$

а при $a>a_1$ это условие не выполняется. Однако при $a>a_1$ соответствующее множество Q^{γ} разбивается осью OY и при некотором $b=b(a)>0$ лучами $\{P_\lambda=(\pm\frac{1}{2}\lambda;\ b(\lambda-1))\in\mathbb{R}^2 \mid \lambda\geq 0\}$ на подмножества, для каждого из которых указанное условие выполняется. Это и позволяет, используя предложения I и 3, составить дифференциальное уравнение кривой γ.

Рассмотрим множества Q_1 и Q_2 из примера 2.I (см. табл.2). В данном случае кривая γ, определяющая искомую меру φ_γ, является графиком четной вогнутой функции $y=y(x)$, $x\in[-1,1]$, т.е. множество Q^{γ} выпукло. Используя предложения I–3, нетрудно вывести дифференциальное уравнение и соответствующие граничные условия для функции $y=y(x)$ при $x\in[0,1]$:

$$y''=\frac{2(1+y'^2)(x+y+2yy'-1)(1+y')}{(y-x+1)^2-2y^2(1+y')^2},\ y'(0)=0,\ \int_0^1 y(x)\,dx=0{,}5.$$

Функция $y=y(x)$, удовлетворяющая поставленным условиям, единственна. Ее значения приведены в табл.3, а оптимальное значение функции ν – в табл.2.

Рассмотрим множества Q_1 и Q_2 из примера 2.2 (см. табл.2). В данном случае кривая γ, определяющая искомую меру φ_γ, является графиком четной выпуклой функции $y=y(x)$, $x\in[0,a]$, т.е. множество Q^{γ} не выпукло. Однако и в этом случае через каждую точку $P\in \mathrm{int}\, Q^{\gamma}$ проходит единственная прямая ℓ_P, удовлетворяющая равенству (9). Дифференциальное уравнение и соответствующие граничные условия для функции $y=y(x)$ при $x\in[0,a]$ имеют вид:

$$y''=\frac{(2y-1)(1+y'^2)}{-y^2+y+0{,}25},\ y'(0)=0,\ \int_0^a y(x)\,dx+(1-a)=0{,}5.$$

Функция $y=y(x)$ и параметр a, удовлетворяющие поставленным условиям, единственны. Их значения приведены в табл. 4, а оптимальное значение функции γ - в табл. 2.

При численном решении полученных дифференциальных уравнений на ЭВМ ЕС-1033 была использована подпрограмма DRKGS (метод Рунге - Кутта четвертого порядка с модификацией Гилла) пакета научных подпрограмм SSP (см.[16, с.195-207]).

Автор выражает глубокую благодарность профессору Г.Ш.Рубинштейну за внимание к работе и полезные обсуждения.

Таблица 1

Оптимальные значения функции $\tau(\Psi)$ в конкретных примерах

	Q_1	Q_2	$\min \tau(\Psi)$
1.1	$-1\le x\le 1, -0,5\le y\le 0$	$-1\le x\le 1, 0\le y\le 0,5$	0,500000
1.2	$-1\le x\le 1, -0,5\le y\le 0$	$2x+y\le 2, -2x+y\le 2$ $0\le y\le 2-\sqrt{2}$	0,532106
1.3	$x-y\le 1, -x-y\le 1, y\le 0$	$-1\le x\le 1, 0\le y\le 0,5$	0,613090
1.4	$x-y\le 1, -x-y\le 1, y\le 0$	$x-y\le 1, -x-y\le 1,$ $0\le y\le \sqrt{2}-1$	0,633902
1.5	$x-y\le 1, -x-y\le 1, y\le 0$	$x+y\le 1, -x+y\le 1, y\ge 0$	0,666667

Таблица 2

Оптимальные значения функции $\gamma(\varphi_2')$ в конкретных примерах

	Q_1	Q_2	$\min \gamma(\varphi_2')$
2.1	$x-y\le 1, -x-y\le 1, y\le 0$	$-1\le x\le 1, y\ge 0$	0,607490
2.2	$-1\le x\le 1, -0,5\le y\le 0$	$2x+y\le 2, -2x+y\le 2, y\ge 0$	0,531654

Т а б л и ц а 3

Значения функции $y=y(x)$ в примере 2.I (табл. 2)

x	y	x	y
0,00	0,578657	0,05	0,578081
0,I0	0,576356	0,I5	0,573488
0,20	0,569478	0,25	0,564323
0,30	0,5580I7	0,35	0,55055I
0,40	0,54I9II	0,45	0,532079
0,50	0,52I032	0,55	0,508744
0,60	0,495I83	0,65	0,4803I2
0,70	0,464088	0,75	0,446466
0,80	0,427396	0,85	0,406836
0,90	0,384763	0,95	0,36I226
I,00	0,336524		

Т а б л и ц а 4

Значение функции $y=y(x)$ в примере 2.2 (табл. 2)

x	y	x	y
0,00	0,562893	0,05	0,5632I0
0,I0	0,564I65	0,I5	0,565768
0,20	0,568037	0,25	0,570994
0,30	0,574672	0,35	0,579III
0,40	0,584360	0,45	0,590476
0,50	0,597529	0,55	0,605600
0,60	0,6I4785	0,65	0,625I95
a = 0,684		$y(a)$ = 0,633040	

ЛИТЕРАТУРА

I. MONGE G. Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais.- Histoire de l'Academie des sciences de Paris, avec les Mémoires de mathematique et de phisique pour la méme année, I78I, p. 666-704.

2. Канторович Л.В. О перемещении масс. - Докл. АН СССР, I942, т.37, № 7-8, с.227-229.

3. Канторович Л.В. Об одной проблеме Монжа. - Успехи мат. наук, I948, т.3, вып.2, с.225-226.

4. Канторович Л.В., Рубинштейн Г.Ш. Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах. - Докл. АН СССР, I957, т.II5, № 6, с.I058-I06I.

5. Канторович Л.В., Рубинштейн Г.Ш. Об одном пространстве вполне аддитивных функций. - Вестник ЛГУ, I958, № 7, с.52-59.

6. Рубинштейн Г.Ш. Двойственность в математическом программировании и некоторые вопросы выпуклого анализа. - Успехи мат. наук, I970, т.25, с.I7I-20I.

7. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. - М.: Наука, I977.

8. Ехлаков Н.П. Существование оптимальных перевозок меры Лебега с плотностями. - Оптимизация, I974, вып. I5(32), с. 90-II4.

9. Владимиров Ю.Н. Об одном классе функций Липшица в конечномерном евклидовом пространстве. - Оптимизация, I980, вып. 24(4I), с.60-69.

I0. Владимиров Ю.Н. Добавление к статье. - Оптимизация, I98I, вып. 26(43), с.I4I-I42.

II. Владимиров Ю.Н. О квазивыпуклых функциях и функциях Липшица, связанных с бесконечномерной задачей перемещения массы в евклидовом пространстве: Автореф. дис. на соиск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук. - Новосибирск: Б.и., I983.

I2. Владимиров Ю.Н. О наилучших приближениях нормального распределения в метрике Канторовича - Рубинштейна. - Оптимизация, I984, вып. 34(5I), с.I3-23.

I3. Судаков В.Н. Геометрические проблемы теории бесконечномерных вероятностных распределений. - Труды Мат. ин-та АН СССР. Л.: Наука, I976.

14. Рвачев М.А. К задаче о перемещении масс. - Оптимизация, 1973, вып. 9(26), с.203-208.
15. Рвачев М.А. О решении некоторых задач монжевского типа. - Докл. АН СССР, 1974, т.219, №1, с.46-48.
16. Математическое обеспечение ЕС ЭВМ. - Минск, 1973, вып. 2.

Поступила в ред.-изд. отдел
26.06.1985 г.