Выпуск 36(53) ОПТИМИЗАЦИЯ 1985 г.

Численные методы

УДК 519.853+519.632

МЕТОД РЕШЕНИЯ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ СО СЛАБО КОЭРЦИТИВНЫМ ОПЕРАТОРОМ

В.И.Кустова

1. Вариационная постановка задачи теории упругости с ограниченной зоной контакта

В работе рассматривается задача взаимодействия двух плоских упругих тел, занимающих в недеформированном состоянии области $\Omega', \Omega'' \subset R^2$ с границей контакта $\Gamma_c = \partial\Omega' \cap \partial\Omega''$. Под Ω', Ω'' будем понимать открытые, ограниченные множества с регулярными границами $\partial\Omega', \partial\Omega''$. В дальнейшем для упрощения обозначений все величины, относящиеся к первому телу, помечаются индексом "$'$", а ко второму - индексом "$''$". Предполагается, что силы трения между телами и начальные напряжения в них равны нулю. Компоненты e_{ij} тензора деформации определяются через вектор перемещений $u(x) = u(x_1, x_2) = (u_1(x_1,x_2), u_2(x_1,x_2))$ следующим образом:

$$e_{ij}(u) = 1/2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), i,j = 1,2.$$

У обоих тел каждая из компонент тензора напряжений $\sigma_{ij}^M (M = ', '')$ представляет линейную комбинацию компонент тензора деформаций:

$$\sigma_{ij}^M = \sigma_{ij}(u^M) = a_{ijkm}^M \cdot e_{km}(u^M), M = ', ''; k,m = 1,2.$$

Здесь и ниже по всем дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование в пределах их изменения. Компоненты тензора модулей упругости a_{ijkm}^M обладают обычными свойствами

симметрии[1]:

$$a^M_{ijkm} = a^M_{jikm} = a^M_{kmij} = a^M_{ijmk},\ M={}',{}'';\ i,j,k,m=1,2,$$

и предполагается существование такой положительной константы a_0, что

$$a_{ijkm}\cdot e_{ij}(u^M(x))\cdot e_{km}(u^M(x)) \geq a_0 e_{ij}(u^M(x))\, e_{ij}(u^M(x)),$$

$$\forall e_{ij}(u^M(x));\ \forall x\in \overline{\Omega'\cup\Omega''};\ i,j,k,m=1,2;\ M={}',{}''.$$

Пусть на части $\Gamma_{u'}$ своей границы $\partial\Omega'$ тело Ω' закреплено, т.е.

$$u'=0 \qquad \text{на } \Gamma u', \tag{I}$$

на другой ее части подвергается действию поверхностных сил

$$p'_i=\sigma'_{ij}\cdot n'_j\ ,\ i=1,2 \tag{2}$$

(через $n^M=(n^M_1, n^M_2)$ обозначен единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega^M$).

К части $\Gamma_{\sigma''}$ границы $\partial\Omega''$ второго тела также приложены поверхностные силы

$$p''_i=\sigma''_{ij}\cdot n''_j\ ,\ i=1,2, \tag{3}$$

а на Γ_c выполняются следующие условия:

а) для точек, вошедших в контакт,

$$u''\cdot n - u'\cdot n = 0,$$

$$\sigma^M_n = \sigma_{ij}(u^M)\cdot n_i\cdot n_j \leq 0,\ \sigma^M_\tau = 0; \tag{4}$$

б) для точек, не вступивших в контакт,

$$u''\cdot n - u'\cdot n < 0,$$

$$\sigma^M_n = 0,\ \sigma^M_\tau = 0; \tag{5}$$

причем $\sigma'_n=\sigma''_n$; $\sigma^M_\tau=\{\sigma^M_{i\tau}\}=\{\sigma^M_{ij}\cdot n_j - \sigma^M_n\cdot n_i\}$ – вектор касательного напряжения; $\sigma'_\tau=\sigma''_\tau$; $n=(n_1,n_2)$ – единичный вектор внешней нормали к $\Gamma_c\subset\partial\Omega''$; $M={}',{}''$.

---

[1] Для неоднородных тел каждая компонента тензора модулей упругости a^M_{ijkm} есть функция от x.

Будем считать, что $\partial\Omega' = \Gamma_{u'} \cup \Gamma_{\sigma'} \cup \Gamma_c$ и $\partial\Omega'' = \Gamma_{\sigma''} \cup \Gamma_c$, причем $mes\,\Gamma_{u'} > 0, mes\,\Gamma_c > 0$, и контактная зона не расширяется в процессе деформации. Силы тяжести, действующие на первое и второе тела, обозначим через F', F'' соответственно. Тогда в дифференциальной форме постановка задачи имеет вид:

в областях Ω' и Ω'' выполняются условия равновесия:

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\sigma_{ij}(u^M)\right] = F_i^M, \quad M = {}', {}''; \; i = 1,2, \tag{6}$$

а на границах $\partial\Omega'$ и $\partial\Omega''$ - условия вида (1)-(5).

При описании вариационной постановки задачи вводятся в рассмотрение пространства $\mathcal{H}^K(\Omega)$, определяемые следующим образом:

$$u \in \mathcal{H}^K(\Omega) \Longleftrightarrow u/\Omega' = u' \in [W_2^K(\Omega')]^2,$$

$$u/\Omega'' = u'' \in [W_2^K(\Omega'')]^2,$$

где $\Omega = \Omega' \cup \Omega''$, W_2^K - стандартное обозначение в теории пространств С.Л.Соболева. Скалярное произведение и норма в $\mathcal{H}^K(\Omega)$ задаются соотношениями:

$$\begin{aligned} (u,v)_{K,\Omega} &= (u',v')_{K,\Omega'} + (u'',v'')_{K,\Omega''}, \\ \|u\|^2_{K,\Omega} &= \|u'\|^2_{K,\Omega'} + \|u''\|^2_{K,\Omega''}, \end{aligned} \tag{7}$$

где $(u^M, v^M)_{K,\Omega^M}$ и $\|u^M\|_{K,\Omega^M}$ являются обыкновенными скалярным произведением и нормой в $[W_2^K(\Omega^M)]^2$. Аналогично может быть определено и пространство $\mathcal{H}^K(\partial\Omega)$, где $\partial\Omega = \partial\Omega' \cup \partial\Omega''$. В дальнейшем скалярное произведение в пространствах $\mathcal{H}^0(\Omega)$ и $\mathcal{H}^0(\partial\Omega)$ будем обозначать $(u,v)_\Omega$ и $(u,v)_{\partial\Omega}$ соответственно.

Рассмотрим функциональное пространство

$$V = \{v \in \mathcal{H}^1(\Omega) \,/\, v = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_{u'}\}. \tag{8}$$

Его подмножество $\mathcal{K}$ вида

$$\mathcal{K} = \{v \in V \,/\, v''\cdot n - v'\cdot n \le 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c\} \tag{9}$$

принято называть множеством допустимых перемещений. Нетрудно проверить, что $\mathcal{K}$ является выпуклым и замкнутым в V. Функционал энергии двух тел записывается в виде:

$$\mathcal{J}(v)=1/2\, a(v,v)-L(v), \tag{I0}$$

где

$$a(u,v)=\int_{\Omega'} a'_{ijkm}\cdot e_{ij}(u)\cdot e_{km}(v)d\Omega'+\int_{\Omega''} a''_{ijkm}\cdot$$

$$\cdot e_{ij}(u)\cdot e_{km}(v)d\Omega'',\ L(v)=L'(v)+L''(v),$$

$$L^M(v)=\int_{\Omega^M} F_i^M\cdot v_i\, d\Omega^M+\int_{\Gamma_{\sigma M}} P_i^M\cdot v_i\cdot dS,\ i=1,2;\ M=',''.$$

Здесь предполагается, что $F_i^M\in L_2(\Omega^M), P_i^M\in W_2^{1/2}(\Gamma_{\sigma M})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Функция $u\in\mathcal{K}$ называется [I] слабым решением задачи (9)-(I0), если $\mathcal{J}(u)\leq\mathcal{J}(v)\quad \forall v\in\mathcal{K}$.

В работах [I,2] доказано, что любое решение задачи (I)-(6) есть слабое решение задачи (9)-(I0), и если слабое решение задачи (9)-(I0) достаточно гладкое, то оно будет и решением задачи (I)-(6). Отметим, что ядром квадратичной формы $a(v,v)$ функционала $\mathcal{J}(v)$ является линейное множество

$$\mathcal{R}=\{z=(z_1^M, z_2^M) \text{ на } \Omega^M\quad z_1^M=a_1^M-b^M x_2, \tag{II}$$
$$z_2^M=a_2^M+b^M x_1,\ M=',''\},$$

где $a_i^M, b^M, i=1,2$ – произвольные постоянные. Обозначив через $\mathcal{P}_1$ линейный непрерывный проектор пространства $\mathcal{H}^K(\Omega)$ на $\mathcal{R}$, а через $\mathcal{P}_2$ – оператор $I-\mathcal{P}_1$, можно каждый элемент $v\in\mathcal{H}^K(\Omega)$ представить в виде: $v=\mathcal{P}_1 v+\mathcal{P}_2 v=z+\mathcal{P}_2 v$.

Наряду с множеством $\mathcal{R}$ рассмотрим так называемое "двустороннее" множество допустимых жестких перемещений:

$$\mathcal{R}^*=\{z\in\mathcal{R}\cap V \mid z'\cdot n-z'\cdot n=0 \text{ на } \Gamma_c\}.$$

В работе [I] показано, что при предположениях

$$L(z)\leq 0\quad \forall z\in\mathcal{K}\cap\mathcal{R},$$

$$L(z)<0\quad \forall z\in(\mathcal{K}\cap\mathcal{R})\setminus\mathcal{R}^*$$

существует слабое решение u задачи (9)-(I0), а любое другое слабое решение можно представить в виде $\hat{u}=u+z$, где $z\in\mathcal{R}\cap V$ такое, что $u+z\in\mathcal{K}, L(z)=0$.

2. Аппроксимация задачи теории упругости с ограниченной зоной контакта

Для решения исходной задачи (9)-(10) применим метод конечных элементов на последовательности сеток. Предполагая, что Γ_c - ломаная, осуществим триангуляции $\mathcal{T}'_h, \mathcal{T}''_h$ соответственно областей Ω', Ω'', руководствуясь при этом обычными правилами (см., например, [3, с. 99]). Здесь и всюду ниже символом h будем обозначать максимальную из сторон всех треугольников $T_q \in \mathcal{T}_h = \mathcal{T}'_h \cup \mathcal{T}''_h$.

В связи с тем, что общая для обеих областей Ω', Ω'' часть границы Γ_c - ломаная, представим ее в виде $\Gamma_c = \bigcup_{i=1}^{} \Gamma_{c,i}$, где $\Gamma_{c,i}$ - прямолинейный отрезок. Выберем при триангуляции на $\Gamma_{c,i}$ точки a_j^i (включая сюда концы $\Gamma_{c,i}$) так, чтобы каждый из отрезков $[a_j^i, a_{j+1}^i]$, соединяющий две соседние точки, являлся общей стороной треугольника $T_{q'} \subset \mathcal{T}'_h$ и треугольника $T_{q''} \subset \mathcal{T}''_h$.

Положим, что система триангуляций $\{\mathcal{T}_h\}, h \to +0$, регулярна [4]. Рассматривая сетку, образованную в результате триангуляции $\mathcal{T}_h$, назовем вершины треугольников ее узлами. Для каждой такой триангуляции рассмотрим конечномерное пространство $\mathring{H}_h \subset [W_2^1(\Omega)]^2$ непрерывных, заданных в Ω вектор-функций $v^h(x)$, аффинных в каждом треугольнике и покомпонентно равных нулю на Γ_u. Пусть $V_h = \mathring{H}_h$. Аппроксимируем множество $\mathcal{K}$ выпуклым замкнутым в V_h множеством $\mathcal{K}_h$:

$$\mathcal{K}_h = \left\{ v^h(x) \in V_h : n^i [v''^h(a_j^i) - v'^h(a_j^i)] \le 0, \; \begin{matrix} i = \overline{1,m} \\ j = \overline{1,m} \end{matrix} \right\}, \tag{12}$$

где n^i - нормаль к стороне $\Gamma_{c,i}$, внешняя относительно множества Ω''. Заметим, что $\mathcal{K}_h$ - конечномерная аппроксимация $\mathcal{K}$. Кроме того, верно следующее утверждение [1].

ЛЕММА 1. *При некотором $h_0 \in (0,1)$ имеет место $\mathcal{K}_h \subset \mathcal{K}$ для каждого $h < h_0$.*

Обозначим

$$\mathcal{J}_K(v) = \tfrac{1}{2} a(v,v) - L(v) + \tfrac{1}{2} \|\mathcal{P}_1 v' - \mathcal{P}_1 u'_{K-1}\|^2_{0,\Omega'} + \tfrac{1}{2} \|\mathcal{P}_1 v'' - \mathcal{P}_1 u''_{K-1}\|^2_{0,\Omega''} + \tfrac{\alpha}{2} \|\mathcal{P}_2 v' - \mathcal{P}_2 u'_{K-1}\|^2_{0,\Omega'} + \tfrac{\alpha}{2} \|\mathcal{P}_2 v'' - \mathcal{P}_2 u''_{K-1}\|^2_{0,\Omega} =$$
$$= \tfrac{1}{2} a(v,v) - L(v) + \tfrac{1}{2} \|\mathcal{P}_1 v - \mathcal{P}_1 u_{K-1}\|^2_{0,\Omega} + \tfrac{\alpha}{2} \|\mathcal{P}_2 v - \mathcal{P}_2 u_{K-1}\|^2_{0,\Omega}; \tag{13}$$

где $\alpha \geq 0$ фиксировано, а выбор u_{k-1} будет уточнен ниже. Для решения задачи (9)-(10) рассмотрим последовательность задач:

найти $u_k^* \in \mathcal{K}$ такое, что

$$\mathcal{J}_k(u_k^*) = \min_{v \in \mathcal{K}} \mathcal{J}_k(v). \qquad (14)$$

Итерационный процесс минимизации функционала $\mathcal{J}$ на множестве $\mathcal{K}$ строится следующим образом.

I ЭТАП. Выберем начальное приближение u_0 и шаг $h_0 \in (0,1)$.

II ЭТАП. Используя метод конечных элементов, аппроксимируем k-ю задачу вида (14) вспомогательной задачей:

найти $u_{h_k}^* \in \mathcal{K}_{h_k}$ такое, что

$$\mathcal{J}_k(u_{h_k}^*) = \min_{v \in \mathcal{K}_{h_k}} \mathcal{J}_k(v), \qquad (15)$$

где h_k – шаг сетки на k-й итерации; $h_k \to 0$ при $k \to \infty$. При этом строим приближенное решение задачи (15) u_{h_k} таким образом, чтобы $\| u_{h_k} - u_{h_k}^* \|_{1,\Omega} \leq c \cdot h_k^{1/2}$, где c не зависит от k и h_k.

III ЭТАП. Полагаем $u_k = u_{h_k}$ (u_k используется при построении функционала $\mathcal{J}_k$).

IУ ЭТАП. Выбираем новый шаг $h_{k+1} \leq h_k$[1] так, чтобы прежние узлы вошли в число узлов новой сетки; присваиваем $k := k+1$ и переходим к этапу II.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Полученные ниже результаты нетрудно модифицировать на случай, когда вместо функционала $\mathcal{J}_k(v)$ взят функционал вида

$$\mathcal{J}_k'(v) = \tfrac{1}{2} a(v,v) - L(v) + \tfrac{1}{2} \| \mathcal{P}_1 v - \mathcal{P}_1 u_{k-1} \|_{1,\Omega}^2 + \tfrac{\alpha}{2} \| \mathcal{P}_2 v - \mathcal{P}_2 u_{k-1} \|_{0,\Omega}^2 .$$

Рассмотрение такого функционала представляет интерес, как правило, ввиду лучшей обусловленности вспомогательных задач, решаемых на этапе II описанного выше метода.

Сопоставим вариационной задаче (14) следующую краевую задачу:

в областях Ω' и Ω'' выполняются дифференциальные уравнения вида

---

[1] Каким образом выбирать шаг h_k, укажем позднее.

$$Lu^{M}_{K,i}=-\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\sigma_{ij}(u^{M}_{K})\right]+P_1^{*}P_1 u^{M}_{K,i}+\alpha P_2^{*}P_2\, u^{M}_{K,i}=$$
$$=F^{M}_{i}+P_1^{*}P_1 u^{M}_{K-1,i}+\alpha P_2^{*}P_2 u^{M}_{K-1,i} \tag{16}$$
(P_1^{*}, P_2^{*} – операторы, сопряженные к P_1, P_2 соответственно)

– при граничных условиях:

$$u'_K=0 \quad \text{на } \Gamma_{u'}, \tag{1'}$$
$$\sigma_{ij}(u'_K)\cdot n'_j=P'_i \quad \text{на } \Gamma_{\sigma'}, \tag{2'}$$
$$\sigma_{ij}(u''_K)\cdot n''_j=P''_i \quad \text{на } \Gamma_{\sigma''}, \tag{3'}$$

– на Γ_c для точек, вошедших в контакт:

$$u''_K\cdot n-u'_K\cdot n=0, \tag{4'}$$
$$\sigma_n(u'_K)=\sigma_n(u''_K)=0,\ \sigma_T(u'_K)=\sigma_T(u''_K)=0.$$

– и для разомкнувшихся точек:

$$u''_K\cdot n-u'_K\cdot n<0,$$
$$\sigma_n(u'_K)=\sigma_n(u''_K)=0,\ \sigma_T(u'_K)=\sigma_T(u''_K)=0. \tag{5'}$$

Введем обозначения

$$\tilde a(u,v)=a(u,v)+\int_{\Omega'}P_1u'_i\cdot P_1v'_i\,d\Omega'+\int_{\Omega''}P_1u''_i\cdot P_1v''_i\,d\Omega''+$$
$$+\alpha\int_{\Omega'}P_2\cdot u'_i\cdot P_2v'_i\,d\Omega'+\alpha\int_{\Omega''}P_2u''_i\cdot P_2v''_i\,d\Omega'';$$
$$L_K(v)=L(v)+\int_{\Omega'}P_1u'_{K-1,i}\cdot P_1v'_i\,d\Omega'+\int_{\Omega''}P_1u''_{K-1,i}\cdot P_1v''\,d\Omega''+$$
$$+\alpha\int_{\Omega'}P_2u'_{K-1,i}\cdot P_2v'_i\,d\Omega'+\alpha\int_{\Omega''}P_2u''_{K-1,i}\cdot P_2v''_i\,d\Omega''.$$

Преобразуя задачу (I′)–(5′),(I6) таким образом, как это указано в работе [I], можно получить вариационное неравенство

$$\tilde a(u_K, v-u_K)-L_K(v-u_K)\geq 0 \ \text{для всех } v\in\mathcal{K}, \tag{17}$$

а функционал $\mathcal{J}_K(v)$ представить в виде

$$\mathcal{J}_K(v)=\tfrac{1}{2}\,\tilde a(v,v)-L_K(v)+const,$$

где

$$const=\tfrac{1}{2}\int_{\Omega'}P_1u'_{K-1,i}\cdot P_1u'_{K-1,i}\,d\Omega'+\tfrac{1}{2}\int_{\Omega''}P_1u''_{K-1,i}\cdot P_1u''_{K-1,i}\,d\Omega''+$$

$$+\alpha/2\int_{\Omega'} P_2 u'_{k-1,i}\cdot P_2 u'_{k-1,i}\,d\Omega' + \alpha/2\int_{\Omega''} P_2 u''_{k-1,i}\cdot P_2 u''_{k-1,i}\,d\Omega''.$$

В дальнейшем при доказательстве различных утверждений нами будут использоваться следующие известные результаты.

УТВЕРЖДЕНИЕ I [5, с.II0]. Пусть Ω – открытое ограниченное множество с регулярной границей. Существует константа $C_0>0$ (не зависящая от Ω) такая, что

$$\int_{\Omega} e_{ij}(v)\cdot e_{ij}(v)\,d\Omega+\int_{\Omega} v_i\cdot v_i\,d\Omega\geq C_0\|v\|^2_{1,\Omega}\,. \quad \forall v\in\mathcal{H}^1(\Omega). \tag{I8}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2 [5,6]. В условиях утверждения I имеем $a(v,v)=a(P_2v,P_2v)\geq\beta\|P_2v\|^2_{1,\Omega},\ \beta>0$.

Кроме того, на протяжении всей работы будем предполагать, что операторы $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ обладают следующим свойством:

$$\|P_1v\|^2_{1,\Omega}+\|P_2v\|^2_{1,\Omega}\geq\beta_0\|v\|^2_{1,\Omega}\quad\forall v\in\mathcal{H}^1(\Omega),\ (\beta_0>0). \tag{I9}$$

Учитывая определение множества $\mathcal{R}$, утверждения I и 2, а также неравенство (I9), выводим

$$\tilde{a}(v,v)=a(P_2v,P_2v)+\|P_1v\|^2_{0,\Omega}+\alpha\|P_2v\|^2_{0,\Omega}\geq$$

$$\geq\alpha_1\|P_2v\|^2_{1,\Omega}+C_0\|P_1v\|^2_{1,\Omega}\geq\beta_1\|v\|^2_{1,\Omega},\ \beta_1>0. \tag{20}$$

Отсюда следует существование единственной функции [6] $u^*_k\in\mathcal{K}$, минимизирующей функционал вида (I3) или, что эквивалентно, удовлетворяющей вариационному неравенству (I7), а также краевой задаче (I6) с граничными условиями (I')-(5').

3. Гладкость решения вспомогательных задач

Обозначим:

$$B'_{k,i}=F'_i+P_1^*P_1u'_{k-1,i}+\alpha P_2^*P_2u'_{k-1,i};$$

$$B''_{k,i}=F''_i+P_1^*P_1u''_{k-1,i}+\alpha P_2^*P_2u''_{k-1,i};$$

$$\Gamma_\sigma=\Gamma_{\sigma'}\cup\Gamma_{\sigma''};$$

$$\varphi'_{\varepsilon,k}(u_K^\varepsilon)= 1/\varepsilon \max[0, u_K^{\varepsilon''}\cdot n - u_K^{\varepsilon'}\cdot n]\cdot(-n);$$
$$\varphi''_{\varepsilon,K}(u_K^\varepsilon)= 1/\varepsilon \max[0, u_K^{\varepsilon''}\cdot n - u_K^{\varepsilon'}\cdot n]\cdot n.$$

Теперь для изучения гладкости решения u_K^* вариационного неравенства (I7) применим метод штрафа [7]. Этот метод заключается в замене вариационного неравенства (I7) семейством аппроксимирующих уравнений

$$\widetilde{a}(u_K^\varepsilon, v) + (\varphi_{\varepsilon,K}(u_K^\varepsilon), v)_{\Gamma_c} = (B_K, v)_\Omega + (P, v)_{\Gamma_\sigma} \quad \forall v \in V \tag{2I}$$

и в последующем доказательстве того, что их решения u_K^ε сходятся к решению этого вариационного неравенства u_K^*. В уравнении (2I) $(\varphi_{\varepsilon,K}(u_K^\varepsilon), v)_{\Gamma_c} = 1/\varepsilon \int_{\Gamma_c} \max[0, u_K^{\varepsilon''}\cdot n - u_K^{\varepsilon'}\cdot n](v''\cdot n - v'\cdot n)\,dS$.
Покажем, что $\varphi_{\varepsilon,K}(u_K^\varepsilon)$ равномерно ограничена по ε на Γ_c.
Для этого определим $L_{\varepsilon,K}(v)$ соотношением

$$(L_{\varepsilon,K}(v), w) = \widetilde{a}(v,w) + (\varphi_{\varepsilon,K}(v), w)_{\Gamma_c} - (B_K, w)_\Omega - (P,w)_{\Gamma_\sigma} \quad \forall w \in V$$

и рассмотрим функционал

$$J_{\varepsilon,K}(v) = 1/2\,\widetilde{a}(v,v) + 1/2\varepsilon \int_{\Gamma_c} \max^2[0, v''\cdot n - v'\cdot n]\,dS - (B_K, v)_\Omega - (P,v)_{\Gamma_\sigma}$$

Замечаем, что

$$(\operatorname{grad} J_{\varepsilon,K}(v), w) = \frac{d}{d\lambda} J_{\varepsilon,K}(v+\lambda w)\Big|_{\lambda=0} = \widetilde{a}(v,w) +$$
$$+ 1/\varepsilon \int_{\Gamma_c} \max[0, v''\cdot n - v'\cdot n](w''\cdot n - w'\cdot n)\,dS - (B_K, w)_\Omega -$$
$$-(P,w)_{\Gamma_\sigma} = \widetilde{a}(v,w) + (\varphi_{\varepsilon,K}(v), w)_{\Gamma_c} - (B_K, w)_\Omega - (P,w)_{\Gamma_\sigma} = (L_{\varepsilon,K}(v), w).$$

Однако функция $(L_{\varepsilon,K}(t v), w)$ непрерывна по t на $[0,1]$ при всех $v \in V$, а $L_{\varepsilon,K}(v)$ – строго монотонный оператор, т.е.

$$(L_{\varepsilon,K}(v) - L_{\varepsilon,K}(w), v-w) = \widetilde{a}(v-w, v-w) +$$
$$+ 1/\varepsilon \int_{\Gamma_c} \{\max[0, v''\cdot n - v'\cdot n] - \max[0, w''\cdot n - w'\cdot n]\}\cdot$$
$$\cdot\{(v''\cdot n - v'\cdot n) - (w''\cdot n - w'\cdot n)\}\,dS \geq \widetilde{a}(v-w, v-w) \geq$$
$$\geq \beta_1 \|v-w\|^2_{1,\Omega} \quad \forall v, w \in V.$$

Отсюда, используя теорему 9.6 из [8], выводим, что точка u_K^ε – единственное решение задачи минимизации функционала $J_{\varepsilon,K}(v)$ на множестве V, и кроме того, $(\operatorname{grad} J_{\varepsilon,K}(u_K^\varepsilon), v) =$

$= (L_{\varepsilon,K}(u_K^\varepsilon), v) = 0$. Таким образом, u_K^ε является единственным решением и уравнения (21), а также решением задачи вида (16) с краевыми условиями $(1')-(3')$ и условиями

$$\left(\frac{\partial u_K^{\varepsilon'}}{\partial N}\right)_i + \left(\varphi'_{\varepsilon,K}(u_K^\varepsilon)\right)_i = 0 \quad \text{на } \Gamma_c,\ i=1,2, \qquad (22)$$

$$\left(\frac{\partial u_K^{\varepsilon''}}{\partial N}\right)_i + \left(\varphi''_{\varepsilon,K}(u_K^\varepsilon)\right)_i = 0 \quad \text{на } \Gamma_c,\ i=1,2. \qquad (23)$$

Введем функцию

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} (0,0) & \text{, если } x\in\Gamma_c, u_K^{\varepsilon''}(x)\cdot n - u_K^{\varepsilon'}(x)\cdot n \le 0, \\ (1/\varepsilon\, n_1^2, 1/\varepsilon\, n_2^2) & \text{, если } x\in\Gamma_c, u_K^{\varepsilon''}(x)\cdot n - u_K^{\varepsilon'}(x)\cdot n > 0. \end{cases}$$

Учитывая вид функций $\varphi^M(u_K^\varepsilon)$ $(M = {}', {}'')$, краевые условия (22)-(23) можно переписать в такой форме:

$$\left(\frac{\partial u_K^{\varepsilon'}}{\partial N}\right)_i + \left(\delta_\varepsilon\cdot u_K^{\varepsilon'}\right)_i = \left(\delta_\varepsilon\cdot u_K^{\varepsilon''}\right)_i \quad \text{на } \Gamma_c,\ i=1,2, \qquad (24)$$

$$\left(\frac{\partial u_K^{\varepsilon''}}{\partial N}\right)_i + \left(\delta_\varepsilon\cdot u_K^{\varepsilon''}\right)_i = \left(\delta_\varepsilon\cdot u_K^{\varepsilon'}\right)_i \quad \text{на } \Gamma_c,\ i=1,2, \qquad (25)$$

и расчленить краевую задачу $(1')-(3')$,(16),(22), (23) на две краевые задачи с неизвестными функциями в правой части условий (24),(25). Именно, в области Ω' выполняется дифференциальное уравнение вида

$$L u_{K,i}^{\varepsilon'} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\sigma_{ij}(u_K^{\varepsilon'})\right] + \rho_1^* \rho_1 u_{K,i}^{\varepsilon'} + \alpha \rho_2^* \rho_2 u_{K,i}^{\varepsilon'} =$$

$$= F_i' + \rho_1^* \rho_1 u_{K-1,i}^{\varepsilon'} + \alpha \rho_2^* \rho_2 u_{K-1,i}^{\varepsilon'}, \quad i=1,2, \qquad (16')$$

а на границе $\partial\Omega'$ – условия вида $(1')-(2')$,(24); в области Ω'' выполняется дифференциальное уравнение вида

$$L u_{K,i}^{\varepsilon''} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\sigma_{ij}(u_K^{\varepsilon''})\right] + \rho_1^* \rho_1 u_{K,i}^{\varepsilon''} + \alpha \rho_2^* \rho_2 u_{K,i}^{\varepsilon''} =$$

$$= F_i'' + \rho_1^* \rho_1 u_{K-1,i}^{\varepsilon''} + \alpha \rho_2^* \rho_2 u_{K-1,i}^{\varepsilon''}, \quad i=1,2, \qquad (16'')$$

а на границе $\partial\Omega''$ – условия вида $(3')$,(25). Так как u_K^ε принадлежит пространству $\mathcal{H}^1(\Omega)$, то нетрудно показать, что $\delta_\varepsilon u_K^\varepsilon$ будет принадлежать пространству $\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma_c)$. Из уравнения (21) получаем

$$|(\Psi_{\varepsilon,K}(u_K^\varepsilon),\vartheta)_{\Gamma_\sigma}|\le|-\tilde a(u_K^\varepsilon,\vartheta)|+|(B_K,\vartheta)_\Omega|+|(P,\vartheta)_{\Gamma_\sigma}|\le$$

$$\le M_1\|u_K^\varepsilon\|_{1,\Omega}\cdot\|\vartheta\|_{1,\Omega}+\|B_K\|_{0,\Omega}\cdot\|\vartheta\|_{1,\Omega}+\|P\|_{0,\Gamma_\sigma}\cdot\|\vartheta\|_{0,\Gamma_\sigma},$$

где M_1 – положительная константа такая, что $|\tilde a(u,\vartheta)|\le M_1\|u\|_{1,\Omega}\cdot\|\vartheta\|_{1,\Omega}$ для всех $u,\vartheta\in V$. Используя известное неравенство [3]

$$\int\psi^2 dS\le\gamma_0\,\|\psi\|_{1,\Omega}^2\quad\forall\psi\in\mathcal{H}^1(\Omega), \qquad (26)$$

где $\gamma_0^{\partial\Omega}$ – константа, зависящая от Ω и $\partial\Omega$ и не зависящая от ψ, запишем

$$|(\Psi_{\varepsilon,K}(u_K^\varepsilon),\vartheta)_{\Gamma_\sigma}|\le(M_1\|u_K^\varepsilon\|_{1,\Omega}+\|B_K\|_{0,\Omega}+\tilde\gamma\|P\|_{0,\Gamma_\sigma})\|\vartheta\|_{1,\Omega}. \qquad (27)$$

Далее замечаем, что $\mathcal{J}_K(u_K^\varepsilon)\le\mathcal{J}_{\varepsilon,K}(u_K^\varepsilon)$. Но так как u_K^ε – решение задачи минимизации функционала $\mathcal{J}_{\varepsilon,K}(\vartheta)$ на множестве V, следовательно,

$$\mathcal{J}_K(u_K^\varepsilon)\le\mathcal{J}_{\varepsilon,K}(u_K^\varepsilon)\le\inf_{\vartheta\in\mathcal{K}}\mathcal{J}_{\varepsilon,K}(\vartheta)=\inf_{\vartheta\in\mathcal{K}}\mathcal{J}_K(\vartheta)=$$

$$=\mathcal{J}_K(\tilde u_K)\ \text{для всех}\ \varepsilon>0.$$

Из последних соотношений вытекает ограниченность u_K^ε в V, т.е.

$$\|u_K^\varepsilon\|_{1,\Omega}\le C_1\quad\forall\varepsilon>0, \qquad (28)$$

где C_1 – константа, не зависящая от ε и K. Так как $B_{K,i}^M=F_i^M+P_1^*P_1u_{K-1,i}^{\varepsilon M}+\alpha P_2^*P_2u_{K-1,i}^{\varepsilon M}$, $M=','$, то с учетом соотношения норм (7), свойств нормы в пространстве $\mathcal{H}^0(\Omega)$, а также неравенства $|a\cdot b|\le\xi\cdot a^2+1/4\,\xi\cdot b^2(\xi=1/2)$ можно получить, что

$$\|B_K\|_{0,\Omega}\le C_2(\|F\|_{0,\Omega}+\|P_1^*P_1u_{K-1}^\varepsilon\|_{0,\Omega}+\alpha\|P_2^*P_2u_{K-1}^\varepsilon\|_{0,\Omega}), \qquad (29)$$

где C_2 – константа, не зависящая от ε и K. Далее, используя свойства операторов P_1 и P_2 (т.е. их линейность и непрерывность, а значит, и ограниченность) и выведенную оценку (28), перепишем неравенство (29) в следующей форме:

$$\|B_K\|_{0,\Omega}\le C_2(\|F\|_{0,\Omega}+\|P_1^*P_1\|_{0,\Omega}\cdot\|u_{K-1}^\varepsilon\|_{1,\Omega}+$$

$$+\alpha\|P_2^*P_2\|_{0,\Omega}\cdot\|u_{K-1}^\varepsilon\|_{1,\Omega})\le C_3\cdot\|F\|_{0,\Omega}. \qquad (30)$$

Здесь C_3 – константа, не зависящая от ε и K.

Отсюда с помощью неравенств (27),(28),(30) окончательно выводим

$$|(\varphi_{\varepsilon,K}(u_K^\varepsilon), v)_{\Gamma_c}| \le \tilde{C}_1(F,P)\cdot\|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v\in V, \tag{31}$$

т.е. $\varphi_{\varepsilon,K}(u_K^\varepsilon)$ равномерно ограничена по ε на Γ_c. Принимая во внимание тот факт, что обе задачи (1')-(2'),(16'), (24) и (3'),(16''),(25) – краевые задачи с граничными условиями смешанного типа, часть из которых является однородными, проведем обоснование гладкости решения u_K^* при некоторых дополнительных условиях относительно исходной задачи. Сначала введем следующие предположения:

а) будем рассматривать изотропный случай, т.е. случай, когда коэффициенты упругости a_{ijkm}^M имеют вид:

$$a_{ijkm}^M = \lambda^M \delta_{ij}\cdot\delta_{km} + \mu^M(\delta_{ik}\cdot\delta_{jm} + \delta_{im}\cdot\delta_{jk}),$$

где λ^M, μ^M – коэффициенты Ламэ ($M = {}',{}''$), δ_{ij} – символ Кронекера;

б) Γ_c – отрезок;

в) части границ $\partial\Omega'\setminus\Gamma_c, \partial\Omega''\setminus\Gamma_c$ являются кривыми класса C^{∞}[1];

г) поверхностные силы P', P'' распределены на частях $\Gamma_{\sigma'}, \Gamma_{\sigma''}$ так, что вблизи точек стыка $\Gamma_{\sigma'}$ и Γ_c, а также $\Gamma_{\sigma''}$ и Γ_c они равны нулю;

д) границы в окрестности каждой угловой точки (вершины углов областей Ω', Ω'') образованы прямыми линиями, а попадающие в эти окрестности точки границы $\Gamma_c = \partial\Omega'\cap\partial\Omega''$ не размыкаются в процессе деформации;

е) части границ $\partial\Omega'\setminus\Gamma_c, \partial\Omega''\setminus\Gamma_c$ образуют с Γ_c углы, которые не порождают особенности у решения u_K^ε (о величине этих углов см. в замечании 2).

Тогда, основываясь на результатах, полученных в работах [9-11], можно вывести, что решение u_K^ε уравнения (21) принадлежит $\mathcal{H}^2(\Omega)$, и для него верна оценка [12]:

$$\|u_K^{\varepsilon M}\|_{2,\Omega^M} \le C_1^M[\|F^M\|_{0,\Omega^M} + \|P^M\|_{0,\Gamma_{\sigma^M}} + \|u_K^{\varepsilon M}\|_{1,\Omega^M}],$$

где константа $C_1^M (M = {}',{}'')$ не зависит от $\varepsilon, K, u_K^\varepsilon$ ввиду равно-

---

1) Можно ослабить данное предположение, считая, что части границ обеих областей $\partial\Omega'\setminus\Gamma_c, \partial\Omega''\setminus\Gamma_c$ состоят из конечного числа гладких дуг.

мерной ограниченности $\varphi_{\varepsilon,K}$ по ε на Γ_c и равенства

$$\left(\frac{\partial u_K^{\varepsilon'}}{\partial N}\right)_i + \left(\frac{\partial u_K^{\varepsilon''}}{\partial N}\right)_i = 0 \quad \text{на } \Gamma_c ,$$

полученного из условий (24) и (25). Поэтому с помощью соотношения норм (7), а также неравенства $|a\cdot b| \leq \xi\cdot a^2 + 1/4\xi\cdot b^2 (\xi = 1/2)$ получаем $\|u_K^\varepsilon\|_{2,\Omega} \leq C_4(\|F\|_{0,\Omega} + \|P\|_{0,\Gamma_\sigma} + \|u_K^\varepsilon\|_{1,\Omega})$.
Поскольку

$$\tilde{a}(u_K^\varepsilon, u_K^\varepsilon) + (\varphi_{\varepsilon,K}(u_K^\varepsilon), u_K^\varepsilon)_{\Gamma_c} \geq \beta_1 \|u_K^\varepsilon\|^2_{1,\Omega} ,$$

то из уравнения (21) следует

$$\beta_1 \|u_K^\varepsilon\|^2_{1,\Omega} \leq \|B_K\|_{0,\Omega} \cdot \|u_K^\varepsilon\|_{1,\Omega} + \tilde{\gamma}\|P\|_{0,\Gamma_\sigma} \cdot \|u_K^\varepsilon\|_{1,\Omega}$$

или

$$\|u_K^\varepsilon\|_{2,\Omega} \leq C_5(\|F\|_{0,\Omega} + \|P\|_{0,\Gamma_\sigma}), \tag{32}$$

где C_5 – константа, не зависящая от ε, K и u_K^ε. Полученная оценка (32), а также доказанная равномерная ограниченность $\varphi_{\varepsilon,K}$ по ε на Γ_c позволяют провести по схеме, подобной принятой в работе [7, с.101-192], доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть u_K^* – решение вариационного неравенства (17), а $u_K^\varepsilon, 0<\varepsilon\leq 1,$ – решение уравнения (21). Тогда $u_K^\varepsilon \to u_K^*$ слабо в $\mathcal{H}^2(\Omega)$, при этом

$$\|u_K^*\|_{2,\Omega} \leq C_5(\|F\|_{0,\Omega} + \|P\|_{0,\Gamma_\sigma}). \tag{33}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Установим характер особенностей решения u_k^ε уравнения (21) в окрестностях угловых точек. При введенных ранее предположениях (в том числе и с учетом сноски на с.42) верно следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ[11,13]. Если области Ω', Ω'' содержат угловые точки, то любое обобщенное решение задач (1')-(2'), (16'), (24) и (3'), (16"), (25) при $B_K \in \mathcal{H}^0(\Omega)$ представимо в виде

$$u_K^{\varepsilon^H} = (u_{K,1}^\varepsilon, u_{K,2}^{\varepsilon^H}) = (\sum_{iH} \gamma_{iH}^H \psi_{iH,1}^H + w_{K,1}^{\varepsilon^H},$$

$$\sum_{iH} \gamma_{iH}^H \psi_{iH,2}^H + w_{K,2}^{\varepsilon^H}) = \sum_{iH} \gamma_{iH}^H \psi_{iH}^H + w_K^{\varepsilon^H}.$$

Кроме того, справедлива оценка

$$\sum_i |\gamma_i| + \|w_K^\varepsilon\|_{2,\Omega} \le C_6 (\|F\|_{0,\Omega} + \|P\|_{0,\Gamma_\sigma}).$$

Здесь $w_K^\varepsilon \in \mathcal{H}^2(\Omega)$; γ_{iM}^M $(M = ', '')$ – постоянные; $\sum_i |\gamma_i| = \sum_{i'} |\gamma_{i'}'| + \sum_{i''} |\gamma_{i''}''|$; Ψ_i – функции из $\mathcal{H}(\Omega)$, общие для всех $B_K \in \mathcal{H}^0(\Omega)$, причем $L\Psi_i \in \mathcal{H}^0(\Omega)$ [11,13]; C_6 – константа, не зависящая от $\varepsilon, K, F, P, w_K^\varepsilon$.

Вид так называемых функций особенности Ψ_{iM}^M определяется величиной углов и характером краевых условий в окрестностях угловых точек. В [11] показано, что в случае, когда на одной стороне угла заданы перемещения, а на другой – внешние усилия, и величина этого угла меньше 63°, или когда на обеих сторонах угла, величина которого меньше π, заданы либо перемещения, либо внешние усилия, то особенности решения не возникают. В общем же случае решение уравнения (21) $u_K^\varepsilon = \sum_i \gamma_i \Psi_i^* + w_K^\varepsilon$, $0 < \varepsilon \le 1$, а решение вариационного неравенства (17) представимо в виде $u_K^* = \sum_i \gamma_i \Psi_i^* + w_K^*$, где функции особенности $\Psi_i^* \in \mathcal{H}^1(\Omega)$, $L\Psi_i^* \in \mathcal{H}^0(\Omega)$, $w_K^* \in \mathcal{H}^2(\Omega)$. При этом $w_K^\varepsilon \to w_K^*$ слабо в $\mathcal{H}^2(\Omega)$.

4. Вывод оценки сходимости

Применяя схему доказательства, предложенную Р.Фалком [4], к рассматриваемой здесь задаче, можно вывести оценку вида:

$$\beta_1 \|u_K^* - u_{h_K}^*\|_{1,\Omega}^2 \le \tilde{a}(u_K^*, v - u_{h_K}^*) - L_K(v - u_{h_K}^*) + \tilde{a}(u_K^*, v_{h_K} - u_K^*) -$$

$$- L_K(v_{h_K} - u_K^*) + \tilde{a}(u_{h_K}^* - u_K^*, v_{h_K} - u_K^*) \quad \forall v \in \mathcal{K}, \forall v_{h_K} \in \mathcal{K}_{h_K},$$

где $u_{h_K}^*$ – точное решение K-й задачи (15). Из леммы 1 следует, что $\mathcal{K}_{h_K} \subset \mathcal{K}$, поэтому вместо v можно выбрать решение $u_{h_K}^*$. Тогда

$$\beta_1 \|u_K^* - u_{h_K}^*\|_{1,\Omega}^2 \le \tilde{a}(u_K^*, v_{h_K} - u_K^*) - L_K(v_{h_K} - u_K^*) +$$

$$+ \tilde{a}(u_{h_K}^* - u_K^*, v_{h_K} - u_K^*) = \int_{\Gamma_c} \frac{\partial u_K^*}{\partial N}(v_{h_K} - u_K^*)\, dS +$$

$$+ \tilde{a}(u_{h_K}^* - u_K^*, v_{h_K} - u_K^*) \quad \forall v_{h_K} \in \mathcal{K}_{h_K}.$$

Можно проверить [14, гл.2], что

$$\frac{\partial u_K^*}{\partial N} \in \mathcal{H}^{1/2}(\partial\Omega) \subset \mathcal{H}^0(\partial\Omega).$$

Отсюда, используя неравенство (26) и неравенство $|a\cdot b| \le$ $\le \xi\cdot a^2 + 1/4\xi \cdot b^2 \left(\xi = \frac{\beta_1}{2M_1}\right)$, получаем

$$\beta_1 \| u_K^* - u_{h_K}^* \|_{1,\Omega}^2 \le \left\| \frac{\partial u_K^*}{\partial N} \right\|_{0,\Gamma_c} \| v_{h_K} - u_K^* \|_{0,\Gamma_c} +$$

$$+ M_1 \| u_{h_K}^* - u_K^* \|_{1,\Omega}^2 \| v_{h_K} - u_K^* \|_{1,\Omega} \le \tilde{\gamma}_1 \left\| \frac{\partial u_K^*}{\partial N} \right\|_{0,\Gamma_c} \| v_{h_K} - u_K^* \|_{1,\Omega} +$$

$$+ 1/2 \left(\beta_1 \| u_K^* - u_{h_K}^* \|_{1,\Omega}^2 + \frac{M_1^2}{\beta_1} \| v_{h_K} - u_K^* \|_{1,\Omega}^2 \right.$$

или

$$\| u_K^* - u_{h_K}^* \|_{1,\Omega}^2 \le \tilde{\gamma}_2 \left(\left\| \frac{\partial u_K^*}{\partial N} \right\|_{0,\Gamma_c} \| v_{h_K} - u_K^* \|_{1,\Omega} + \| v_{h_K} - u_K^* \|_{1,\Omega}^2 \right).$$

Выберем в качестве v_{h_K} кусочно-линейное восполнение u_K^* и воспользуемся известной оценкой аппроксимации восполнений функций класса $\mathcal{H}^2(\Omega)$ [3]:

$$\| u_K^* - v_{h_K} \|_{1,\Omega} \le C_7 \cdot h_K \| u_K^* \|_{2,\Omega},$$

где C_7 – положительная константа, не зависящая от K и h_K. Тогда

$$\| u_K^* - u_{h_K}^* \|_{1,\Omega}^2 \le \gamma_3 \cdot h_K \left(\left\| \frac{\partial u_K^*}{\partial N} \right\|_{0,\Gamma_c} \| u_K^* \|_{2,\Omega} + h_K \| u_K^* \|_{2,\Omega}^2 \right). \quad (34)$$

Замечаем, что $\left(\frac{\partial u_K^*}{\partial N}\right)_i = \sigma_{ij}(u_K^*) \cdot n_j$. Так как $u_K^* \in$ $\in \mathcal{H}^2(\Omega)$, то $\sigma_{ij}(u_K^*) = a_{ijkm} \cdot e_{km}(u_K^*) \in \mathcal{H}(\Omega)$. Кроме того, с помощью неравенств (28) и (33) нетрудно доказать, что $\sigma_{ij}(u_K^*)$ ограничены в $\mathcal{H}^1(\Omega)$, т.е. $\| \sigma_{ij}(u_K^*) \|_{1,\Omega} \le C_8(F,P)$, где $C_8(F,P)$ – константа, не зависящая от K и u_K^*. Учитывая эту оценку, а также неравенство (26), выводим

$$\left\| \frac{\partial u_K^*}{\partial N} \right\|_{0,\Gamma_c} \le \gamma_4 \| \sigma_{ij}(u_K^*) \|_{1,\Omega} \le \gamma_5(F,P), \quad (35)$$

где $\gamma_5(F,P)$ – константа, зависящая от Ω и Γ_c и не зависящая от K и u_K^*. Комбинируя неравенства (33), (34), (35), запишем

$$\| u_K^* - u_{h_K}^* \|_{1,\Omega} \le \gamma_6(F,P) \cdot h_K^{1/2}.$$

Так как на втором этапе предложенного метода приближенное решение задачи (I5) строилось таким образом, чтобы $\|u_{h_K} - u^*_{h_K}\|_{1,\Omega} \leq c \cdot h_K^{1/2}$, то будет верно следующее неравенство:

$$\|u^*_K - u_{h_K}\|_{1,\Omega} \leq \|u^*_K - u^*_{h_K}\|_{1,\Omega} + \|u^*_{h_K} - u_{h_K}\|_{1,\Omega} \leq \gamma_7(F,P) \cdot h_K^{1/2}. \qquad (36)$$

Теперь можно сформулировать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть решение задачи (I4) $u^*_K \in \mathcal{H}^2(\Omega)$. Тогда существует не зависящая от h_K и K константа $\gamma_7(F,P)$ такая, что для всякого регулярного семейства триангуляции

$$\|u^*_K - u_{h_K}\|_{1,\Omega} \leq \gamma_7(F,P) \cdot h_K^{1/2}.$$

А.А.Капланом исследована сходимость подобного процесса с регуляризацией в более общей ситуации. Из его результатов применительно к данной задаче, обозначая z_K за приближенное решение задачи (I5), имеем, что $|z_K - u^*|_{(\gamma)} \xrightarrow[K\to\infty]{} 0$, где последовательность $\{z_K\}$ определена соотношением:

$$\|z_K - u^*_K\|_{1,\Omega} \leq \varepsilon_K; \qquad (37)$$

$\{\varepsilon_K\}$ – последовательность неотрицательных чисел, удовлетворяющих $\sum_{K=1}^{\infty} \varepsilon_K < \infty$; u^* – решение задачи минимизации (9)-(10); $|u|^2_{(\gamma)} = \|P_1 u\|^2_{1,\Omega} + (\gamma+\alpha)\|P_2 u\|^2_{1,\Omega}$; γ – некоторая постоянная, $\gamma > 0$. Сравнивая полученную оценку сходимости (36) с соотношением (37), заключаем, что если выбор h_K удовлетворяет условию $\sum_K h_K^{1/2} < \infty$ (например, $h_K = h_0 (2)^{-K}$), то $|u^* - u_{h_K}|_{(\gamma)} \xrightarrow[K\to\infty]{} 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В случае наличия особенностей решения u^*_K представляем его в виде $u^*_K = \sum_i \gamma_i \psi^*_i + w^*_K$, где $\psi^*_i \in \mathcal{H}^1(\Omega)$, $w^*_K \in \mathcal{H}^2(\Omega)$. Затем представляем v_{h_K} в виде линейной комбинации функций ψ^*_i и базисных функций кусочно-линейного восполнения функции w^*_K [3]. Тогда $\|u^*_K - v_{h_K}\|_{1,\Omega} \leq \gamma_8 \|w^*_K - w_{h_K}\|_{1,\Omega}$, где γ_8 – положительная константа, не зависящая от K и h_K, и верна следующая

ТЕОРЕМА 3. Пусть решение задачи (I4) представимо в виде $u^*_K = \sum_i \gamma_i \psi^*_i + w^*_K$,

где функции особенности $\psi_i^* \in \mathcal{H}^1(\Omega)$, $L\psi_i^* \in \mathcal{H}^0(\Omega)$, $w_k^* \in \mathcal{H}^2(\Omega)$. Тогда существует не зависящая от h_k и K константа $\gamma_g(F,P)$ такая, что для всякого регулярного семейства триангуляции

$$\|u_k^* - u_{h_k}\|_{1,\Omega} \le \gamma_g(F,P) \cdot h_k^{1/2}.$$

Кроме того, верна оценка сходимости $\|u^* - u_{h_k}\|_{(\Gamma)} \xrightarrow[K\to\infty]{} 0.$

Теорема 3 доказывается так же , как и теорема 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. HASLINGER J., HLAVACEK I. Contact between elastic bodies. I-II. Aplikace mat., 1980, 4-5, N25-26.
2. КРАВЧУК А.С. Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования. - Прикл. математика и механика, 1977, т.41, вып.2, с.329-337.
3. ОГАНЕСЯН Л.А., РУХОВЕЦ Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. - Ереван, 1979.
4. СЬЯРЛЕ Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач.- М.: Мир, 1980.
5. ДЮВО Г., ЛИОНС Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. - М.: Наука, 1980.
6. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. - М.: Мир, 1974.
7. КИНДЕРЛЕРЕР Д., СТАМПАККЬЯ Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. - М.: Мир, 1983.
8. ВАЙНБЕРГ М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. - М.: Наука, 1972.
9. КОНДРАТЬЕВ В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками. - Тр. Москов. мат. общества, 1967, т.16, с.209-293.
10. SHAMIR E. Regularization of mixed second-order elliptic problems. - Israel J. Math., 1968, v.6, N 2, p.150-169.
11. WILLIAMS M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. - J. Appl. Mechanics, 1952, v.19, N 4, p.526-528.

12. ЛАДЫЖЕНСКАЯ О.А., УРАЛЬЦЕВА Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973.
13. ВОРОВИЧ И.И., АЛЕКСАНДРОВ В.М., БАБЕШКО В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. – М.: Наука, 1974.
14. ЛИОНС Ж.Л., МАДЖЕНЕС Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971.

Поступила в ред.-изд. отдел
22.05.1985 г.