Выпуск 36(53) ОПТИМИЗАЦИЯ 1985 г.

Численные методы

УДК 519.8

ЗАДАЧА СТОХАСТИЧЕСКОГО ЛИНЕЙНОГО РАСКРОЯ

Э.А.Мухачева, Н.И.Соломещ

К решению рассматриваемой здесь задачи линейного стохастического раскроя сводятся многие прикладные вопросы: проектирование листового и профильного проката, прокладка трубопроводов и кабеля, распараллеливание алгоритмов и другие. В качестве основной рассматривается следующая задача проектирования раскроя немерного материала.

ЗАДАЧА R . В условиях единичного производства некоторого изделия требуется предварительно получить m заготовок заданных длин $a_i, i=\overline{1,m}$, среди которых могут быть и заготовки одинаковых размеров. Для получения требуемого комплекта используют одномерное сырье (полосы) случайной длины $d(\text{đ} \leqslant d \leqslant \text{Đ})$ [I)]. При этом известен закон $F(d)$ распределения длины полосы. Необходимо раскроить полосы таким образом, чтобы математическое ожидание (м.о.) расхода материала оказалось минимальным.

Любой раскрой исходного материала, обеспечивающий получение требуемого набора заготовок, называют допустимым. Допустимый раскрой, для которого м.о. числа используемых полос минимально, называют оптимальным.

Согласно классификации, приведенной в [I], рассматриваемая ситуация приводит к задаче линейного стохастического раскроя. Для ее решения в [2] В.А.Залгаллером предложена сменная линейка, существование которой доказано в [3] И.В.Романовским.

I) Здесь и далее в статье предполагается, что количество поступающего материала не ограничивает получение комплекта требуемых заготовок.

В [I] приведен алгоритм расчета линейки, основанный на методах линейного программирования с генерацией столбцов на каждом шаге процесса.

Однако методы линейного программирования оказываются приемлемыми только для задач массового или серийного раскроя. В рассматриваемом случае единичного раскроя предлагается использовать сменные матрицы (таблицы), перевычисляемые для каждой новой задачи и позволяющие управлять процессом в реальном масштабе времени.

Процесс раскроя немерного материала состоит из выполнения m идентичных тактов, на каждом из которых отрезается от рабочей полосы одна заготовка с номером i из заданного набора номеров требуемых заготовок. При этом предполагается известным алгоритм W выбора номера i отрезаемой заготовки.

Перед выполнением s-такта исходной информацией являются:

- набор $K^{(s)} \subset K$ еще не полученных заготовок;
- упорядоченный по возрастанию список

$$L_s = \{\ell(0,s), \ell(1,s), \ldots, \ell(k,s)\}, \ell(0,s)=0$$

длин всевозможных комбинаций заготовок из $K^{(s)}$;

- длина $\ell(s)$ рабочей полосы.

Каждый такт s состоит из выполнения следующих процедур.

I. Проверка рабочей полосы. Возможны два случая.

I.I. Длина $\ell(s) \geq \min\limits_{i_j \in K^{(s)}} a_{i_j}$; тогда переходят к процедуре 3.

I.2. $\ell(s) < \min\limits_{i_j \in K^{(s)}} a_{i_j}$; это означает, что рабочая полоса является отходом и переходят к процедуре 2.

2. Измерение полосы. Измеряют длину ℓ рабочей полосы с точностью до наибольшей по длине комбинации заготовок; полагая $\ell(s) := \ell$, переходят к процедуре 3.

3. Отрезание заготовки. С помощью алгоритма W определяют номер $i_s \in K^{(s)}$; заготовку длиной a_{i_s} отрезают от рабочей полосы.

4. Подготовка информации к выполнению следующего такта. Полагают $K^{(s+1)} := K^{(s)} \setminus \{i_s\}, \ell := \ell - a_{i_s}$.

5. Вычисление комбинаций заготовок. Находят список L_{s+1} длин всевозможных комбинаций

заготовок из $K^{(s+1)}$ [1].

6. Переход к следующему такту. Если $K^{(s+1)} \neq \emptyset$, то, полагая $s := s+1$, переходят к процедуре 1; в противном случае процесс заканчивается.

Пусть имеется множество $\{W\}$ различных алгоритмов выбора заготовки на процедуре 3. Очевидно, что каждый из алгоритмов $W \in \{W\}$ однозначно определяет м.о. числа расходуемых полос. Поэтому при решении задачи R управление раскроем осуществляется с помощью алгоритма W. Тогда рассматриваемый вопрос об организации оптимального управления сводится к решению следующей задачи об управлении раскроем.

ЗАДАЧА UR. Из множества $\{W\}$ всех возможных алгоритмов управления резкой определить такой алгоритм W^*, при котором математическое ожидание числа используемых полос будет минимальным.

Спишем рекуррентные соотношения, определяющие оптимальный алгоритм W^*.

Предварительно введем следующие обозначения:

$L=\{\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_N\}$, $\ell_0=0$, $\ell_N \leqslant \mathcal{D}$, – упорядоченный по возрастанию список длин всевозможных комбинаций из m заготовок;

$M_\ell(i_1, \dots, i_s)$ – м.о. числа используемых полос для набора $K^{(s)}$ при алгоритме W^* и длине рабочей полосы ℓ;

$M_\ell(i_j / i_1, \dots, i_s)$ – м.о. числа используемых полос, если резка начинается с заготовки i_j, а далее ведется по алгоритму W^*;

$M(i_1, \dots, i_s)$ – минимум м.о. числа используемых полос для получения набора $K^{(s)}$ при условии, что от первой рабочей полосы еще не было отрезано ни одной заготовки;

$i_1, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_s$ – набор номеров $K^{(s)} \setminus \{i_j\}$.

Как указано выше, относительно длины ℓ рабочей полосы возможны два случая.

1) $\ell \geqslant \min\{a_{i_1}, \dots, a_{i_s}\}$. Тогда

$$M_\ell(i_1, \dots, i_s) = \min_{j \in \{j : a_{i_j} \leqslant \ell\}} M_\ell(i_j / i_1, \dots, i_s) = M_\ell(i_j / i_1, \dots, i_s). \quad (1)$$

---

[1] Процедуру 5 можно опустить, если на каждом такте в качестве L_{s+1} брать наибольший из возможных наборов – L_m.

Причем

$$M_\ell(i_j/i_1,\dots,i_s)=M_{\ell-a_{i_j}}(i_1,\dots,\hat{i}_j,\dots,i_s),\ i_j:a_{i_j}\le\ell. \quad (2)$$

В этом случае всегда можно указать номер i_{j_0} первой отрезаемой заготовки из набора $i_1,\dots,i_s$.

2) $\ell<\min\{a_{i_1},\dots,a_{i_s}\}$, т.е. $\ell=\ell_0=0$ и длина новой рабочей полосы пока неизвестна. Тогда

$$M_\ell(i_1,\dots,i_s)=M_0(i_1,\dots,i_s)=1+\sum_{i=i_*}^{N-1}[F(\ell_{i+1})-F(\ell_i)]\cdot M_{\ell_i}(i_1,\dots,i_s), \quad (3)$$

где

$$i_*=\min_{i=\overline{0,N}}\{i:\ell_i\ge d^*\}.$$

Номер i_{j_0} первой отрезаемой заготовки в этом случае указать нельзя, так как он зависит от длины рабочей полосы.

Заметим, что

$$M(i_1,\dots,i_s)=M_0(i_1,\dots,i_s)-1. \quad (4)$$

Таким образом, во всех возможных случаях относительно длины ℓ рабочей полосы значение $M_\ell(i_1,\dots,i_s)$ выражено рекуррентно через аналогичные величины. В первом случае это м.о. числа полос, необходимых при нарезке комплекта с меньшим количеством заготовок (см. (I),(2)). Во-втором – м.о. числа полос при нарезке того же самого комплекта, но такой длине рабочей полосы, для которой это значение к моменту вычисления $M_\ell(i_1,\dots,i_s)$ может быть уже найдено (см. (3)).

Итак, вычисление $M_\ell(i_1,\dots,i_s)$ следует последовательно выполнять, начиная с $M_\ell(i), i=\overline{1,m}$, до $M_\ell(1,\dots,m)$. Причем для каждого конкретного набора $i_1,\dots,i_s$ вычисления $M_\ell(i_1,\dots,i_s)$ проводятся, начиная с ℓ_N, до ℓ_0.

Результаты вычислений удобно занести в матрицу, строки которой соответствуют $\ell_r, r=\overline{0,N}$, а столбцы – всевозможным наборам, которые можно сформировать из m заготовок. Столбцы удобно представить в виде m групп. В s группу $(s=\overline{1,m})$ входят столбцы, соответствующие всевозможным s-элементным наборам $i_1,\dots,i_s$ $(i=1, C_m^s)$.

В клетке $(r;i_1,\dots,i_s)$ на пересечении строки ℓ_r и столбца $i_1,\dots,i_s$ указывается значение $M_{\ell_r}(i_1,\dots,i_s)$,

а если $l_{r} \geq \min\{a_{i_1},\dots,a_{i_s}\}$, то и номер заготовки k_s, с которой следует начать резку набора $i_1,\dots,i_s$ при длине l_r рабочей полосы.

Теперь мы можем описать процесс решения задачи R. Он состоит из двух этапов.

На первом этапе в результате m последовательных шагов согласно условию (I) и рекуррентным соотношениям (2) и (3) формируется управляющая матрица. На s-шаге для каждого s-элементного набора заготовок заполняется соответствующий столбец s-й группы.

На последнем m-шаге получаем группу матриц, состоящую из одного столбца (набор заготовок $1, 2, \dots, m$). На этом формирование матрицы заканчивается.

На каждом такте второго этапа решается задача UR. С этой целью используется информация (матрица), полученная на первом этапе. Оптимальный алгоритм W^*, определяющий номера $k_1,\dots,k_m$ заготовок, которые следует отрезать на очередном такте резки, заключается в следующем.

Пусть l_{r_1} – длина первой рабочей полосы. Полагаем $l := l_{r_1}$, тогда в клетке $(l; 1,\dots,m)$ m-й группы столбцов матрицы находим номер k_2 заготовки, с которой следует начать резку полного комплекта.

Пусть длина рабочей полосы после отрезания k_1 есть l_{r_2}. Положим $l := l_{r_2}$. Тогда, если в клетке $(l; 1,\dots,\hat{k}_1,\dots,m)$ указан номер k_2, то от рабочей полосы отрезается заготовка k_2 и определяется ее длина $l := l_{r_3}$.

Если же в этой клетке номер не указан, то в качестве рабочей берется вновь поступившая полоса. Пусть ее длина l'_{r_2}; положим $l := l'_{r_2}$. Теперь номер второй отрезаемой заготовки находится в клетке $(l; 1,\dots,\hat{k}_1,\dots,m)$.

После отрезания заготовки k_2 определяется длина рабочей полосы l_{r_3}, $l := l_{r_3}$. Номер k_3 третьей отрезаемой заготовки определяется аналогично номеру k_2 и т.д., пока не будет получен весь комплект заготовок. Для пояснения вышеизложенного приведем чисто иллюстративный пример.

Пусть комплект деталей состоит из трех заготовок:

i	I	2	3
a_i	2	5	7

длина полосы распределена равномерно в интервале [8; I5]. Используя (I) и рекуррентные соотношения (2) и (3), заполним таблицу I, с помощью которой реализуется оптимальный алгоритм управления резкой, учитывая, что $L = \{0,2,5,7,9,12,14\}$. Из таблицы I и формулы (4) следует, что математическое ожидание числа используемых полос при оптимальной процедуре выбора равно $1\frac{6}{7}$.

Таблица I

	I гр.			II гр.			III гр.
	I	2	3	I,2	I,3	2,3	I,2,3
I4	I,I	I,2	I,3	I,2	I,3	I,3	I,3
I2	I,I	I,2	I,3	I,2	I,3	I,3	2,3
9	I,I	I,2	I,3	I,2	I,3	2,3	2,3
7	I,I	I,2	I,3	I,2	2,3	2,3	2,3
5	I,I	I,2	2,3	2,2	2,I	2,2	$2\frac{1}{7}$,2
2	I,I	2,2	2,3	2,I	2,I	$2\frac{4}{7}$	$2\frac{4}{7}$,I
0	2,I	2,2	2,3	2	$2\frac{1}{7}$	$2\frac{4}{7}$	$2\frac{6}{7}$

Рассмотрим конкретную реализацию оптимального алгоритма. Пусть действительная длина первой рабочей полосы 8 ед. Тогда с точностью до комбинаций длина ее равна 7 ед. По клетке (7; I,2,3) таблицы определяем номер первой отрезаемой заготовки $k_1 = 3$. Отрезаем заготовку длины 7 ед. и длина остатка равна 0. В клетке (0; I,2) номер k_2 второй отрезаемой заготовки не указан, т.е. рабочую полосу следует направить в отходы, а оставшиеся заготовки отрезать от новой рабочей полосы. Пусть длина новой рабочей полосы - 9 ед. Тогда $k_2 = 2$ (клетка (9; I,2) и $k_3 = 1$.

При данной реализации расходуется 2 полосы на комплект заготовок.

ЛИТЕРАТУРА

1. МУХАЧЕВА Э.А. Рациональный раскрой промышленных материалов. Применение АСУ. – М.: Машиностроение, 1984.
2. КАНТОРОВИЧ Л.В., ЗАЛГАЛЛЕР В.А. Рациональный раскрой промышленных материалов. – Новосибирск; Наука, 1971.
3. РОМАНОВСКИЙ И.В. Оптимальный раскрой одномерного сырья случайной длины. – В кн.: Исследование операций и статистическое моделирование. Л.: Изд-во ЛГУ, 1974, вып.2, с.97–102.

Поступила в ред.-изд. отдел
21.09.1985 г.