Модели динамики и равновесия

УДК 51.330.115

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ СТАБИЛЬНОГО НАСЕЛЕНИЯ

А.Ж.Жафяров

Одной из основных матричных моделей математической демографии является модель Лесли [1]. Эта модель описывает динамику только женского населения и строится с помощью коэффициентов дожития женщин и рождаемости девочек. Изучение асимптотических свойств траекторий модели Лесли позволяет утверждать, что под действием постоянного режима воспроизводства женское население стабилизируется. Аналогичный результат получается в моделях Лесли для мужского населения. Если бы модели Лесли достаточно адекватно описывали динамику реального населения, то темпы роста женского и мужского населения должны были совпадать. Однако возможность несовпадения указанных темпов роста отмечена многими авторами, в частности в [2].

Для ликвидации указанного выше противоречия между мужскими и женскими мерами воспроизводства населения исследователи демографических моделей [2,3] предложили построить модель, учитывающую брачность, при этом выделяя "доминанту", т.е. пол, численность которого меньше другого. До сих пор не удалось построить модель населения, охватывающую оба пола и учитывающую фактор брачности. Математическое описание одного из способов построения модели населения, учитывающей только фактор брачности, дано в [4].

В предлагаемой работе построена нелинейная модель стабильного населения, которая учитывает оба пола и процесс формирования брачных пар с помощью эндогенного (определяемого внутри самой модели) доминирования.

I. Описание модели

Пусть:

a_θ – вероятность дожития от начала года до начала следующего года женщин возраста θ, $\rho \leq \theta \leq \alpha$ (ρ, α – соответственно начальный и последний генеративный возраст женщин);

b_τ – вероятность дожития от начала года до начала следующего года мужчин возраста τ, $q \leq \tau \leq \beta$ (q, β – соответственно начальный и последний генеративный возраст мужчин);

$x = (x_0, \ldots, x_\theta, \ldots, x_\alpha)$ – возрастная структура женского населения;

$y = (y_0, \ldots, y_\tau, \ldots, y_\beta)$ – возрастная структура мужского населения;

$w^i_{\theta\tau}$ – количество браков длительностью i лет, в которых жена находится в возрасте θ лет, муж τ лет;

$d^i_{\theta\tau}$ – вероятность того, что в браке из группы (θ, τ, i), т.е. длительностью i лет, причем возраст жены θ лет, мужа τ лет, родится в течение года девочка, которая доживет до конца года;

$\gamma \cdot d^i_{\theta\tau}$ – вероятность рождения мальчика в браке из группы (θ, τ, i).

Функционирование модели (обозначим ее через $\mathfrak{X}$) происходит следующим образом: пусть в начале некоторого года население задается вектором $u = (x, y, w)$, где $x = (x_0, \ldots, x_\theta, \ldots, x_\alpha)$, $y = (y_0, \ldots, y_\tau, \ldots, y_\beta)$, $w = (w^i_{\theta\tau}) = (w^0_{\rho q}, \ldots, w^0_{\rho\beta}; w^0_{\rho+1,q}, \ldots; w^0_{\alpha q}, \ldots, w^0_{\alpha\beta}; w^1_{\rho+1,q}, \ldots, w^1_{\alpha\beta}; \ldots, w^\nu_{\alpha\beta})$, $\nu = \min\{\alpha-\rho, \beta-q\}$.
К началу следующего года население будет описываться вектором $\tilde{u} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{w})$, причем

$$\tilde{x} = (\sum_{\theta,\tau,i} d^i_{\theta\tau}, a_1 x_0, a_2 x_1, \ldots, a_\alpha x_{\alpha-1}),$$

$$\tilde{y} = (\gamma \cdot \sum_{\theta,\tau,i} d^i_{\theta\tau}, b_1 y_0, b_2 y_1, \ldots, b_\beta y_{\beta-1}),$$

$$\tilde{w}^i_{\theta\tau} = c^{i-1}_{\theta-1,\tau-1} \; w^{i-1}_{\theta-1,\tau-1},$$

где $c^{i-1}_{\theta-1,\tau-1}$ – вероятность сохранения брака из группы $(\theta-1, \tau-1, i-1)$ на год и более, $i \geq 1$.

Образование новых пар $i=0$ будем описывать той же формулой, что и в [4], введя лишь небольшие упрощения. Координаты $\tilde{w}^{o}_{\theta\tau}$ вектора $\tilde{w}^{o}$ будем вычислять по формуле:

$$\tilde{w}^{o}_{\theta\tau} = \min\{k_{\theta\tau}(x_\theta - \sum_{\tau,i} w^{i}_{\theta\tau});\ l_{\theta\tau}(y_\tau - \sum_{\theta,i} w^{i}_{\theta\tau})\}, \qquad (1)$$

где $k_{\theta\tau}$ – вероятность того, что женщина возраста θ выйдет замуж за мужчину возраста τ, $l_{\theta\tau}$ – вероятность того, что мужчина возраста τ женится на женщине возраста θ.

2. Исследование моделей

Изучение предлагаемой модели $\mathcal{Z}$ будем проводить следующим образом. Построим две модели $\mathcal{Z}_A$, $\mathcal{Z}_B$, в некотором смысле полярные. Каждая из этих моделей описывает воспроизводство населения обоего пола и учитывает фактор брачности, но отличаются тем, что первая из этих моделей характеризует образование новых браков (а следовательно, и число родившихся девочек и мальчиков), не испытывая лимита в мужском населении, а вторая характеризует образование новых браков, не испытывая лимита в женском населении.

Иначе говоря, в первой модели доминантой является женское население, поэтому количество вновь образуемых браков $\tilde{w}^{o}_{\theta\tau}$ в этой модели определяется формулой:

$$\tilde{w}^{o}_{\theta\tau} = k_{\theta\tau}(x_\theta - \sum_{\tau,i} w^{i}_{\theta\tau}),\ \rho \leqslant \theta \leqslant \alpha,\ 1 \leqslant i \leqslant \nu,$$

где ν – наибольшая длительность брака, способного к деторождению.

Ясно, что $\nu = \min\{r, s\}$, где $r = \alpha - \rho$, $s = \beta - q$. Для определенности будем считать, что $r \leqslant s$, т.е. $\nu = r$.

Во второй модели доминантой является мужское население и количество вновь образуемых браков $\tilde{w}^{o}_{\theta\tau}$ вычисляется по формуле:

$$\tilde{w}^{o}_{\theta\tau} = l_{\theta\tau}(y_\tau - \sum_{\theta,i} w^{i}_{\theta\tau}),\ q \leqslant \tau \leqslant \beta,\ 1 \leqslant i \leqslant \nu.$$

В реальной жизни количество вновь образовавшихся браков $\tilde{w}^{o}_{\theta\tau}$ определяется равенством (1). Поэтому ни классическая модель Лесли, ни приведенные модели не могут адекватно описать

реальную жизнь. Однако с помощью описанных выше моделей $\mathcal{Z}_A$, $\mathcal{Z}_B$ можно построить модель, в которой количество новых браков находится по формуле (I).

Пусть модели $\mathcal{Z}_A$ и $\mathcal{Z}_B$ определяются соответственно матрицами A и B. Будем считать, что размерность вектора $w = (w^0_{pq}, \dots$

$$\dots w^0_{p\beta};\ w^0_{p+1,q}, \dots, w^0_{p+1,\beta}; \dots; w^0_{\alpha q}, \dots, w^0_{\alpha\beta};\ w^1_{p+1,q+1}, \dots, w^1_{p+1,\beta}; \dots; w^\nu_{\alpha,q+\nu}, \dots$$

$\dots, w^\nu_{\alpha\beta})$ равна числу $n_1 = (r+1)(s+1) + \dots + (r+1-i)(s+1-i) + \dots + (r+1-\nu)(s+1-\nu)$. Каждая из матриц A и B является квадратной, размерности $n = n_1 + \alpha + \beta + 2$. Такие матрицы громоздкие, поэтому сначала представим их в виде блоков, а затем дадим описание наиболее существенных блоков.

Матрица A имеет следующий блочный вид:

$A =$

A_1			A_{14}	...	$A_{1,\nu+2}$	$A_{1,\nu+3}$
	A_2		A_{24}	...	$A_{2,\nu+2}$	$A_{2,\nu+3}$
A_{31}	A_{32}	A_3	A_{34}	...	$A_{3,\nu+2}$	$A_{3,\nu+3}$
		A_{43}	A_4			
					$A_{\nu+2}$	
					$A_{\nu+3,\nu+2}$	$A_{\nu+3}$

Дадим пояснение к матрице A. Здесь и впредь будем считать, что во всех незаполненных местах стоят нули.

Квадратные матрицы $A_3, A_4, \dots, A_{\nu+3}$ являются нулевыми. Каждая из матриц $A_{43}, \dots, A_{\nu+3,\nu+2}$ характеризует образование браков длительностью i, что в сущности является матричным описанием формулы

$$\tilde{x}^i_{\theta\tau} = c^{i-1}_{\theta-1,\tau-1} \cdot w^{i-1}_{\theta-1,\tau-1} \quad (1 \le i \le \nu,\ p \le \theta \le \alpha,\ q \le \tau \le \beta).$$

В общем случае матрица $A_{i+4,i+3}$, $0 \le i \le \nu-1$, задается следующим образом:

$$
w^i = (w^i_{p+1,q+1}, \ldots, w^i_{p+i,\beta-1}, w^i_{p+i,\beta}; w^i_{p+i+1,q+1}, \ldots, w^i_{\alpha-1,q+i}, \ldots, w^i_{\alpha-1,\beta-1}, \ldots, w^i_{\alpha-1,\beta}, \ldots, w^i_{\alpha\beta})
\begin{bmatrix}
c^i_{p+1,q+1} & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & \\
& & c^i_{p+i,\beta-1} & 0 & 0 & & & \\
& & & 0 & c^i_{p+i+1,q+i} & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
& & & & & c^i_{\alpha-1,q+i} & & \\
& & & & & \ddots & & \\
& & & & & c^i_{\alpha-1,\beta-1} & 0 & 0 \\
& & & & & & &
\end{bmatrix} =
$$

$$
= A_{i+4,i+3}.
$$

Опишем свойства подматриц, расположенных на первых $\alpha+1$ и на последующих $\beta+1$ строчках матрицы A. Матрицы A_1 и A_2 характеризуют, как и в матрице Лесли, смещение по возрастам женского и мужского населений соответственно. В отличие от матрицы Лесли первые строчки матриц A_1 и A_2 являются нулевыми, т.е. A_1 и A_2 не описывают рождение девочек и мальчиков.

Число вновь родившихся девочек описывают матрицы $A_{14}, \ldots, A_{1,\nu+2}, A_{1,\nu+3}$, а число родившихся мальчиков – матрицы $A_{24}, \ldots, A_{2,\nu+2}, A_{2,\nu+3}$. Ниже приведены указанные выше матрицы $A_1, A_2, A_{1,i+3}, A_{2,i+3}$, $1 \leq i \leq \nu$:

$$
A_1 = \begin{bmatrix}
0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
a_1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
& & \ddots & & & & \\
& & & & & a_\alpha & 0
\end{bmatrix}
\quad
A_2 = \begin{bmatrix}
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
b_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
& & \ddots & & \\
& & & b_\beta & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
A_{1,i+3} = \begin{bmatrix}
d^i_{p+i,q+i} & \cdots & d^i_{p+i,\beta} & \cdots & d^i_{\alpha,q+i} & \cdots & d^i_{\alpha\beta} \\
& & & 0 & & &
\end{bmatrix}
$$

Матрица $A_{2,i+3}$ получается из матрицы $A_{1,i+3}$ умножением ее первой строки на коэффициент γ.

Для завершения полного описания матрицы A осталось рассмотреть подматрицы, расположенные на строках с номерами $(\alpha+1+\beta+1)+1,\dots,(\alpha+1+\beta+1)+(\gamma+1)(\nu+1)$ и описывающие образование новых браков. Иначе говоря, предстоит охарактеризовать подматрицы $A_{31}, A_{32},\dots, A_{3,\nu+3}$. Для матрицы A подматрица A_{32} является нулевой, а матрица A_{31} определяется следующим образом:

$$x=(x_0,\dots,x_p,\quad x_{p+1},\dots,x_\alpha),$$

$$A_{31}=\begin{bmatrix} k_{pq} & & \\ \vdots & & \\ k_{p\beta} & & \\ & k_{p+1,q} & \\ & \vdots & \\ & k_{p+1,\beta} & \\ \dots & \dots & \dots \\ & & k_{\alpha q} \\ & & \vdots \\ & & k_{\alpha\beta} \end{bmatrix}$$

Матрицы $A_{34},\dots,A_{3,\nu+3}$ образуют подматрицу матрицы A, которую обозначим через C (см. рис. I). Матрицы A_{31} и C описывают образование новых браков в модели Z_A. Вектор $\tilde{w}^o=$
$=(\tilde{w}^o_{pq},\tilde{w}^o_{p,q+1},\dots,\tilde{w}^o_{p\beta};\tilde{w}^o_{p+1,q},\tilde{w}^o_{p+1,q+1},\dots,\tilde{w}^o_{p+1,\beta};\dots$
$\dots;\tilde{w}^o_{p+i,q},\tilde{w}^o_{p+i,q+1},\dots,\tilde{w}^o_{p+i,\beta};\dots;\tilde{w}^o_{\alpha q},\tilde{w}^o_{\alpha,q+1},\dots,\tilde{w}^o_{\alpha\beta})$

определяется равенствами

$$\tilde{w}^o_{pq}=k_{pq}\cdot x_p,$$
$$\tilde{w}^o_{p,q+1}=k_{p,q+1}\cdot x_p,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\tilde{w}^o_{p\beta}=k_{p\beta}\cdot x_p,$$
$$\tilde{w}^o_{p+1,q}=k_{p+1,q}(x_{p+1}-(w^1_{p+1,q+1}+w^1_{p+1,q+2}+\dots+w^1_{p+1,\beta})),$$
$$\tilde{w}^o_{p+1,q+1}=k_{p+1,q+1}(x_{p+1}-(w^1_{p+1,q+1}+w^1_{p+1,q+2}+\dots+w^1_{p+1,\beta})),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$
C=\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
w^1_{p+1,q+1}\dots w^1_{p+1,\beta} & w^1_{p+i,q+1}\dots w^1_{p+i,\beta} & w^1_{\alpha,q+1}\dots w^1_{\alpha\beta} & \dots & w^i_{p+i,q+1}\dots w^i_{p+i,\beta} & w^\nu_{\alpha,q+1}\dots w^\nu_{\alpha\beta}\\ \hline
0 & & & & & \\ \hline
\begin{matrix}-k_{p+1,q}&\cdots&-k_{p+1,q}\\ \vdots&&\vdots\\ -k_{p+1,\beta}&\cdots&-k_{p+1,\beta}\end{matrix} & 0 & & & & \\ \hline
\vdots & & & & & \\ \hline
0 & \begin{matrix}-k_{p+i,q}&\cdots&-k_{p+i,q}\\ \vdots&&\vdots\\ -k_{p+i,\beta}&\cdots&-k_{p+i,\beta}\end{matrix} & \begin{matrix}\cdots\\ \\ \cdots\end{matrix} & & \begin{matrix}-k_{p+i,q}&\cdots&-k_{p+i,q}\\ \vdots&&\vdots\\ -k_{p+i,\beta}&\cdots&-k_{p+i,\beta}\end{matrix} & 0\\ \hline
\vdots & & & & & \\ \hline
0 & & \begin{matrix}-k_{\alpha q}&\cdots&-k_{\alpha q}\\ \\ -k_{\alpha\beta}&\cdots&-k_{\alpha\beta}\end{matrix} & \begin{matrix}\cdots\\ \\ \cdots\end{matrix} & & \begin{matrix}-k_{\alpha q}&\cdots&-k_{\alpha q}\\ \\ -k_{\alpha\beta}&\cdots&-k_{\alpha\beta}\end{matrix}
\end{array}
$$

Рис. I

$$\tilde{w}^{0}_{p+1,\beta} = k_{p+1,\beta}(x_{p+1} - (w^{1}_{p+1,q+1} + w^{1}_{p+1,q+2} + \dots + w^{1}_{p+1,\beta}))$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\tilde{w}^{0}_{\alpha q} = k_{\alpha q}(x_{\alpha} - (w^{1}_{\alpha,q+1} + \dots + w^{1}_{\alpha\beta} + w^{2}_{\alpha,q+2} + \dots + w^{\nu}_{\alpha,q+\nu} + \dots + w^{\nu}_{\alpha\beta})),$$

$$\tilde{w}^{0}_{\alpha,q+1} = k_{\alpha,q+1}(x_{\alpha} - (w^{1}_{\alpha,q+1} + \dots + w^{1}_{\alpha\beta} + w^{2}_{\alpha,q+2} + \dots + w^{\nu}_{\alpha,q+\nu} + \dots + w^{\nu}_{\alpha\beta})),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\tilde{w}^{0}_{\alpha\beta} = k_{\alpha\beta}(x_{\alpha} - (w^{1}_{\alpha,q+1} + \dots + w^{1}_{\alpha\beta} + w^{2}_{\alpha,q+2} + \dots + w^{\nu}_{\alpha,q+\nu} + \dots + w^{\nu}_{\alpha\beta})).$$

Итак, описание матрицы A закончено. Перейдем к характеристике матрицы B. Она отличается от матрицы A только подматрицами, расположенными на строках с номерами $(\alpha+1+\beta+1)+1, \dots, (\alpha+1+\beta+1)+(\gamma+1)(\beta+1)$. Матрицу B представим в виде блоков точно так же, как и матрицу A. В матрице B блок B_{31} состоит из нулей. Подматрица B_{32} имеет вид:

$$y = (y_0, \dots, y_q, y_{q+1}, \dots, y_{q+\nu}, \dots, y_{\beta}),$$

$$B_{32} = \begin{bmatrix} l_{pq} & & & & & \\ & l_{p,q+1} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & l_{p,q+\nu} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & l_{pp} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{\alpha q} & & & & & \\ & l_{\alpha,q+1} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & l_{\alpha,q+\nu} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & l_{\alpha\beta} \end{bmatrix}$$

Матрицы $B_{34}, \ldots, B_{3,\nu+3}$ образуют подматрицу матрицы B, которую обозначим через $\mathcal{D}$ (см. рис. 2). Матрицы B_{32} и $\mathcal{D}$ описывают образование новых браков. Как уже было отмечено в модели $\mathcal{Z}_A$, количество новых браков вычисляем, полагая, что нет лимита на женское население (в модели $\mathcal{Z}_A$ количество новых браков вычисляли, предполагая, что нет лимита на мужское население). В рассматриваемом векторе $\tilde{w}^o$ определяется равенствами:

$$\tilde{w}^o_{pq} = l_{pq} \cdot y_q,$$
$$\tilde{w}^o_{p,q+1} = l_{p,q+1}(y_{q+1} - (w^1_{p+1,q+1} + w^1_{p+2,q+2} + \ldots + w^1_{\alpha,q+1})),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\tilde{w}^o_{p\beta} = l_{p\beta}(y_\beta - (w^1_{p+1,\beta} + \ldots + w^1_{\alpha\beta} + w^2_{p+2,\beta} + \ldots + w^2_{\alpha\beta} + \ldots + w^\nu_{\alpha\beta})),$$
$$\tilde{w}^o_{p+1,q} = l_{p+1,q} \cdot y_q,$$
$$\tilde{w}^o_{p+1,q+1} = l_{p+1,q+1}(y_{q+1} - (w^1_{p+1,q+1} + w^1_{p+2,q+1} + \ldots + w^1_{\alpha,q+1})),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\tilde{w}^o_{p+1,\beta} = l_{p+1,\beta}(y_\beta - (w^1_{p+1,\beta} + \ldots + w^1_{\alpha\beta} + w^2_{p+2,\beta} + \ldots + w^2_{\alpha\beta} + \ldots + w^\nu_{\alpha\beta})),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\tilde{w}^o_{\alpha q} = l_{\alpha q} \cdot y_q,$$
$$\tilde{w}^o_{\alpha,q+1} = l_{\alpha,q+1}(y_{q+1} - (w^1_{p+1,q+1} + w^1_{p+2,q+1} + \ldots + w^1_{\alpha,q+1})),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\tilde{w}^o_{\alpha\beta} = l_{\alpha\beta}(y_\beta - (w^1_{p+1,\beta} + \ldots + w^1_{\alpha\beta} + w^2_{p+2,\beta} + \ldots + w^\nu_{\alpha\beta})).$$

Итак, модели $\mathcal{Z}_A$ и $\mathcal{Z}_B$ полностью определены. Эти модели отличаются только тем, что по-разному описывают образование новых браков: в первой модели количество вновь образовавшихся браков не зависит от мужского населения (т.е. мужское население считаем избыточным), а во второй количество вновь образовавшихся браков не зависит от женского населения (т.е. нет недостатка в женском населении). Соответственно с этими предположениями вектор $\tilde{w}^o$ в модели $\mathcal{Z}_A$ определяется с помощью матриц A_{31} и C, а в модели $\mathcal{Z}_B$ – с помощью мат-

$$\mathcal{D}=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}
w^1_{p+1,q+1}\cdots w^1_{p+1,\beta} & \cdots & w^1_{\alpha,q+1}\cdots w^1_{\alpha\beta} & w^2_{p+2,q+2}\cdots w^2_{p+2,\beta} & \cdots & w^2_{\alpha,q+2}\cdots w^2_{\alpha,\beta} & \cdots & w^v_{\alpha,q+v}\cdots w^v_{\alpha\beta} \\
\hline
\begin{matrix}0&&\\-l_{p,q+1}&&\\&\ddots&\\&&-l_{p,\beta}\end{matrix} & \cdots & \begin{matrix}0&&\\-l_{p,q+1}&&\\&\ddots&\\&&-l_{p\beta}\end{matrix} & \begin{matrix}0&&\\0&&\\-l_{p,q+2}&&\\&\ddots&\\&&-l_{p\beta}\end{matrix} & \cdots & \begin{matrix}0&&\\0&&\\-l_{p,q+2}&&\\&\ddots&\\&&-l_{p\beta}\end{matrix} & \cdots & \begin{matrix}0&&\\\vdots&&\\0&&\\-l_{p,q+v}&&\\&\ddots&\\&&-l_{p\beta}\end{matrix} \\
\hline
\begin{matrix}0&&\\-l_{p+1,q+1}&&\\&\ddots&\\&&-l_{p+1,\beta}\end{matrix} & \cdots & \begin{matrix}0&&\\-l_{p+1,q+1}&&\\&\ddots&\\&&-l_{p+1,\beta}\end{matrix} & \begin{matrix}0&&\\0&&\\-l_{p+1,q+1}&&\\&\ddots&\\&&-l_{p+1,\beta}\end{matrix} & \cdots & \begin{matrix}0&&\\0&&\\-l_{p+1,q+1}&&\\&\ddots&\\&&-l_{p+1,\beta}\end{matrix} & \cdots & \begin{matrix}0&&\\\vdots&&\\0&&\\-l_{p+1,q+v}&&\\&\ddots&\\&&-l_{p+1,\beta}\end{matrix} \\
\hline
- - - & - - - & - - - & - - - & - - - & - - - & - - - & - - - \\
\hline
\begin{matrix}0&&\\-l_{\alpha,q+1}&&\\&\ddots&\\&&-l_{\alpha\beta}\end{matrix} & \cdots & \begin{matrix}0&&\\-l_{\alpha,q+1}&&\\&\ddots&\\&&-l_{\alpha\beta}\end{matrix} & \begin{matrix}0&&\\0&&\\-l_{\alpha,q+2}&&\\&\ddots&\\&&-l_{\alpha\beta}\end{matrix} & \cdots & \begin{matrix}0&&\\0&&\\-l_{\alpha,q+2}&&\\&\ddots&\\&&-l_{\alpha\beta}\end{matrix} & \cdots & \begin{matrix}0&&\\\vdots&&\\0&&\\-l_{\alpha,q+v}&&\\&\ddots&\\&&-l_{\alpha\beta}\end{matrix} \\
\hline
\end{array}$$

Рис. 2

риц B_{32} и $\mathcal{D}$.

Однако в предлагаемой нами модели $\mathcal{Z}$ вектор $\tilde{w}^\circ$ вычисляется по формуле (I). Поэтому эта модель $\mathcal{Z}$ не может быть определена, подобно моделям $\mathcal{Z}_A$ и $\mathcal{Z}_B$, одной матрицей. Модель $\mathcal{Z}$ задается конечным набором $C_1, C_2, \ldots, C_m$ квадратных матриц вида A или B, причем матрицы $A, B, C_1, \ldots, C_m$ имеют одинаковые элементы во всех строчках, кроме строчек с номерами $(\alpha+1+\beta+1)+1, \ldots, (\alpha+1+\beta+1)+(\gamma+1)(\delta+1)$, описывающих образование новых браков. Строкой матрицы C_i, $1 \le i \le m$, с указанными номерами является строка с тем же номером матрицы A или B в зависимости от принадлежности вектора (x, y, w) некоторому специальному подмножеству $X_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, $k=(\gamma+1)(\delta+1)$ множества Ω. Приведем более подробное пояснение.

Пусть $\Pi = \bigcap_{1 \le i \le \nu} \Pi_{p+i}$, $Q = \bigcap_{1 \le j \le \beta-q} Q_{q+j}$, где Π_{p+i} и Q_{q+j} – полупространства, определяемые соответственно неравенствами:

$$\Pi_{p+i} = \{u \in R_n \mid x_{p+i} \ge w^1_{p+1,q+1} + \ldots + w^1_{p+i,\beta} + \ldots + w^i_{p+i,q+i} + \ldots + w^i_{p+i,\beta}\},$$

$1 \le i \le \nu$,

$$Q_{q+j} = \{u \in R_n \mid y_{q+j} \ge w^1_{p+1,q+j} + \ldots + w^1_{\alpha,p+j} + \ldots + w^2_{\alpha,p+j} + \ldots + w^f_{\alpha,q+j}\},$$

$1 \le f \le \min\{\nu, j\}$, $1 \le j \le \beta-q$.

Содержательный смысл неравенств, характеризующих множества Π_{p+i} и Q_{q+j}, очевиден. Неравенство, определяющее множество Π_{p+i} (Q_{q+j}), означает, что число всех женщин (мужчин) возраста $p+i$ (соответственно $q+j$) не меньше числа всех женщин (мужчин) этого же возраста, состоящих в браке.

Обозначим через $\bar{\Omega}$ множество $\bar{\Omega} = \Omega \cap \Pi \cap Q$, где

$$\Omega = \{(x,y,w) \in R^+_n \mid \|(x,y,w)\| = x_0 + x_1 + \ldots + x_\alpha + y_0 + \ldots + y_\beta + w^\circ_{pq} + \ldots + w^\nu_{\alpha\beta} = 1\}.$$

Ясно, что множество $\bar{\Omega}$ является не пустым выпуклым компактом. Выпуклость и компактность очевидна. Множество $\bar{\Omega} \ne \emptyset$, так как строго положительный вектор $u \in \bar{\Omega}$, где $u=(x,y,w)$,

$$x = \left(\frac{\gamma}{\alpha+1}; \ldots; \frac{\gamma}{\alpha+1}\right), \quad y = \left(\frac{\gamma}{\beta+1}, \ldots, \frac{\gamma}{\beta+1}\right), \quad w = \left(\frac{1-2\gamma}{N}; \ldots; \frac{1-2\gamma}{N}\right), \quad N = n-(\alpha+1)-(\beta+1), \quad \max\left\{\frac{\alpha+1}{1+2(\alpha+1)}; \frac{\beta+1}{1+2(\beta+1)}\right\} \le \gamma < \frac{1}{2}.$$

Разбиение множества $\bar{\Omega}$ на подмножества вида $X_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ произведем следующим образом. Рассмотрим гиперплоскость H_i.

$1 \le i \le k$, определяемую уравнением $(a_{f+i} - b_{f+i})u = 0$, где $f=(\alpha+1)+(\beta+1)$, a_{f+i}, b_{f+i} - строки матриц A и B соответственно с номером $f+i$. Каждая такая гиперплоскость разбивает множество $\bar{\Omega}$ на два подмножества X_1 и X_2 так, что для всех векторов u , принадлежащих X_1 , имеет место неравенство $a_{f+i} \cdot u \le b_{f+i} \cdot u$, а для всех векторов u подмножества X_2 справедливо неравенство $a_{f+i} \cdot u \ge b_{f+i} \cdot u$. Множество всех гиперплоскостей $H_1, H_2, \ldots, H_k$ разбивает $\bar{\Omega}$ на m ($m \le 2^k$) непустых подмножеств вида $X_{1_1 1_2 \ldots 1_k}, \ldots$ $\ldots, X_{m_1 m_2 \ldots m_k}$, причем условимся считать, что $i_j = 1$, если $a_{f+j} \cdot u \le b_{f+j} \cdot u$, и $i_j = 2$, если $a_{f+j} \cdot u \ge b_{f+j} \cdot u$, где $1 \le i \le m$, $1 \le j \le k$. Иначе говоря,

$$X_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \{u \in \bar{\Omega} / a_{f+j} \cdot u \le b_{f+j} \cdot u$$

$$\text{при } i_j = 1;\ a_{f+j} \cdot u \ge b_{f+j} \cdot u \quad \text{при } i_j = 2 \}.$$

Отметим наиболее важные свойства рассмотренных выше множеств $\bar{\Omega}$, $X_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, $1 \le i \le m$.

I. Имеет место равенство:

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{1 \le i \le m} X_{i_1 i_2 \ldots i_k},$$

причем каждое множество $X_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ является непустым выпуклым компактом.

2. По виду множества $X_{1_1 \ldots 1_k}, \ldots, X_{m_1 \ldots m_k}$ легко построить матрицы $C_1, \ldots, C_m$, о которых говорилось выше.

Пусть a_j, b_j, c_j^i - строки соответственно матриц A, B, C_i, $1 \le i \le m$, причем рассматриваем лишь строки с номерами $f+1 \le$ $\le j \le f+k$. Тогда будем считать, что $a_j = c_j^i$, если $a_j u \le b_j u$ и $b_j = c_j^i$, если $b_j \cdot u \le a_j \cdot u$, где $u = (x, y, w)$. Поэтому число матриц вида C_i , $1 \le i \le m$, конечно. Последнее означает, что модель $\mathcal{Z}$ задается конечным набором квадратных матриц $C_1, \ldots, C_m$, каждая из которых составляется из строк матриц A или B указанным выше способом.

3. Пусть $(\alpha_{\mathcal{Z}}, (u_{\mathcal{Z}}, v_{\mathcal{Z}}), p_{\mathcal{Z}})$ - неймановское состояние равновесия модели $\mathcal{Z}$. Существование такого равновесия следует из того, что $\mathcal{Z}$ - многогранный конус [5, с.116]. Неймановский темп роста $\alpha_{\mathcal{Z}}$ модели $\mathcal{Z}$ может быть найден по формуле:

$$\alpha_{\mathcal{Z}} = \max_{u \in \bar{\Omega}} \min_{1 \le i \le n} \frac{v_i}{u_i} .$$

где u_i, v_i – i-е координаты векторов u и v ($(u,v) \in \mathcal{Z}$) соответственно.

Очевидно, что положительное число $\alpha_{\mathcal{Z}}$ может быть определено и так:

$$\alpha_{\mathcal{Z}} = \max_{X_{i_1 \dots i_k} \subset \bar{\Omega}} \max_{u \in X_{i_1 \dots i_k}} \min_{1 \le i \le n} \frac{v_i}{u_i} . \qquad (2)$$

Особый интерес представляет вопрос о соотношении неймановских темпов роста моделей $\mathcal{Z}, \mathcal{Z}_A, \mathcal{Z}_B$. Пусть $(\alpha_A, (u_A, v_A), p_A)$ и $(\alpha_B, (u_B, v_B), p_B)$ – неймановские состояния равновесия в моделях $\mathcal{Z}_A$ и $\mathcal{Z}_B$.

ТЕОРЕМА I. Имеет место неравенство: $\alpha_{\mathcal{Z}} \le \min\{\alpha_A; \alpha_B\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (2) следует, что найдется множество $X^0_{i_1 i_2 \dots i_k} \subset \bar{\Omega}$, на котором достигается равенство, т.е.

$$\alpha_{\mathcal{Z}} = \max_{u \in X^0_{i_1 i_2 \dots i_k}} \min_{1 \le i \le n} \frac{v_i}{u_i} .$$

По множеству $X^0_{i_1 i_2 \dots i_k}$ построим матрицу C^0 указанным выше способом, т.е. строчки матрицы C^0 с номерами $1, 2, \dots, f$ и $f+k+1, \dots, n$ совпадают со строчками матриц A и B с теми же номерами, а строчки матрицы C^0 с номерами $f+1, \dots, f+k$ определяем так: если $i_j = 1$, то $C^0_{f+j} = a_{f+j}$, если $i_j = 2$, то $C^0_{f+j} = b_{f+j}$, где C^0_{f+j} – строка матрицы C^0 с номером $f+j$, $1 \le j \le k$. Исходя из определения матрицы C^0, получим

$$\alpha_{\mathcal{Z}} = \max_{u \in X^0_{i_1 i_2, \dots, i_k}} \min_{1 \le i \le n} \frac{c^0_i \cdot u}{u_i} \le \max_{u \in X^0_{i_1 \dots i_k}} \min_{1 \le i \le n} \frac{a_i u}{u_i} \le \alpha_A .$$

Тем самым доказано, что $\alpha_{\mathcal{Z}} \le \alpha_A$. Аналогично доказывается справедливость неравенства $\alpha_{\mathcal{Z}} \le \alpha_B$. Теорема доказана.

Содержательный смысл доказанного неравенства $\alpha_{\mathcal{Z}} \le \min\{\alpha_A; \alpha_B\}$ очевиден. В модели $\mathcal{Z}$ лимит наложен на население обоих полов, а в моделях $\mathcal{Z}_A$ и $\mathcal{Z}_B$ только на один пол. Поэтому $\alpha_{\mathcal{Z}} \le \alpha_A$ и $\alpha_{\mathcal{Z}} \le \alpha_B$.

Необходимый и достаточный признак того, что в одном из приведенных выше соотношений достигается равенство, сформулирован в приводимой ниже теореме.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\alpha_B \le \alpha_A$ и $u_B \in \bar{\Omega}$. Число $\alpha_{\mathcal{Z}} < \alpha_B$ тогда и только тогда, когда найдется номер $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ такой, что

$a_i \cdot u_B < \alpha_B \cdot (u_B)_i$, где a_i — i-я строка матрицы A, $(u_B)_i$ — i-я координата вектора u_B.

Необходимость. Пусть $\alpha_\chi < \alpha_B$. Доказательство существования номера $i \in \{1,2,\dots,n\}$, для которого выполняется неравенство $a_i \cdot u_B < \alpha_B \cdot (u_B)_i$, проведем методом от противного. Будем считать, что для любого $i \in \{1,2,\dots,n\}$ имеет место неравенство $a_i \cdot u_B \geqslant \alpha_B (u_B)_i$. Вектор u_B принадлежит одному из подмножеств $X_{j_1 j_2 \dots j_k}$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Пусть для определенности $u_B \in X_{1_1 1_2 \dots 1_k}$. Положим $J = \{i \in \{f+1,\dots,f+k\} \mid 1_i = 1\}$, $CJ = \{1,2,\dots,n\} \setminus J$. Из определения числа α_χ следует, что

$$\alpha_\chi = \max_{u \in \bar{\Omega}} \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{v_i}{u_i} \geqslant \max_{u \in X_{1_1 \dots 1_k}} \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{v_i}{u_i} \geqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{(C_{1_1 \dots 1_k} \cdot u_B)_i}{(u_B)_i} =$$

$$= \min \left\{ \min_{i \in J} \frac{a_i \cdot u_B}{(u_B)_i} ; \min_{i \in CJ} \frac{b_i \cdot u_B}{(u_B)_i} \right\},$$

где $(C_{1_1 \dots 1_k} \cdot u_B)_i$ — i-я координата вектора $C_{1_1 \dots 1_k} \cdot u_B$. По предположению для всех номеров $i \in \{1,2,\dots,n\}$ имеет место неравенство $\frac{a_i \cdot u_B}{(u_B)_i} \geqslant \alpha_B$. Поэтому $\min_{i \in J} \frac{a_i \cdot u_B}{(u_B)_i} \geqslant \alpha_B$. Так как $\alpha_B = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{(B u_B)_i}{(u_B)_i}$, то $\min_{i \in CJ} \frac{b_i \cdot u_B}{(u_B)_i} \geqslant \alpha_B$. Отсюда следует, что

$$\alpha_\chi \geqslant \min \left\{ \min_{i \in J} \frac{a_i u_B}{(u_B)_i} ; \min_{i \in CJ} \frac{b_i \cdot u_B}{(u_B)_i} \right\} \geqslant \alpha_B .$$

Следовательно, $\alpha_\chi \geqslant \alpha_B$, что противоречит условию $\alpha_\chi < \alpha_B$. Полученное противоречие показывает необходимость указанных в теореме условий.

Достаточность. Доказательство этой части теоремы также проведем методом от противного, т.е. пусть $\alpha_\chi \geqslant \alpha_B$. Тогда имеет место равенство $\alpha_\chi = \alpha_B$. Из определения числа α_χ следует, что

$$\alpha_\chi = \max_{u \in \bar{\Omega}} \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{v_i}{u_i} = \min \left\{ \min_{i \in J} \frac{a_i \cdot u_B}{(u_B)_i} ; \min_{i \in CJ} \frac{b_i \cdot u_B}{(u_B)_i} \right\}.$$

По условию существует номер $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ такой, что $\frac{a_{i_0} \cdot u_B}{(u_B)_{i_0}} < \alpha_B$. Если этот номер $i_0 \in J$, то $\min\limits_{i \in J} \frac{a_i \cdot u_B}{(u_B)_i} < \alpha_B$. Если же $i \in CJ$, то $\min\limits_{i \in CJ} \frac{b_i \cdot u_B}{(u_B)_i} \leqslant$ $\leqslant \frac{b_{i_0} \cdot u_B}{(u_B)_{i_0}} \leqslant \frac{a_{i_0} \cdot u_B}{(u_B)_{i_0}} < \alpha_B$. Иначе говоря, в обоих случаях $\alpha_{\mathfrak{X}} = \min\left\{\min\limits_{i \in J} \frac{a_i \cdot u_B}{(u_B)_i}; \min\limits_{i \in CJ} \frac{b_i \cdot u_B}{(u_B)_i}\right\}$ меньше α_B. Последнее противоречит равенству $\alpha_{\mathfrak{X}} = \alpha_B$. Теорема доказана полностью.

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотрим содержательную сторону условия для данной теоремы. Предварительно отметим, что из предыдущей теоремы следует: равенство $\alpha_{\mathfrak{X}} = \alpha_B$ $(\alpha_B \leqslant \alpha_A)$ достигается тогда и только тогда, когда для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ имеет место равенство $a_i \cdot u_B \geqslant \alpha_B (u_B)_i$, т.е. $A u_B \geqslant \alpha_B \cdot u_B$. Последнее означает, что при $\alpha_A \geqslant \alpha_B$ равенство $\alpha_{\mathfrak{X}} = \alpha_B$ достижимо тогда и только тогда, когда в модели $\mathfrak{X}_A$ за рассматриваемый промежуток времени (например, год) численность населения, описываемого равновесным вектором u_B, увеличивается по всем возрастам не менее чем в α_B раз, причем численность браков должна расти таким же образом, т.е. увеличиваться не менее чем в α_B раз.

3. Асимптотика траекторий модели

Рассмотрим основной вопрос работы, касающийся стабильности населения, описываемого моделью $\mathfrak{X}$. Для этого предварительно укажем алгоритм построения некоторой матрицы C, по которой в дальнейшем будем определять асимптотические свойства траекторий модели $\mathfrak{X}$.

Пусть $(\alpha, (\bar{u}, \bar{v}), \bar{p})$ – неймановское состояние равновесия многогранной модели $\mathfrak{X}$. По вектору $\bar{u}$ построим матрицу C со строчками $c_1, \ldots, c_n$ следующим образом. Будем считать, что

$$c_i = \begin{cases} a_i, & \text{если } a_i \cdot \bar{u} \leqslant b_i \cdot \bar{u}, \\ b_i, & \text{если } b_i \cdot \bar{u} \leqslant a_i \cdot \bar{u}. \end{cases}$$

Очевидно, что матрица C совпадает с одной из указанных выше матриц $C_1, \ldots, C_m$ и, кроме того, $\alpha \bar{u} \leqslant C \bar{u}$. На множестве $X_{i_1 \ldots i_k}$, содержащем $\bar{u}$, отображение a, определяемое конусом $\mathfrak{X}$, есть не что иное, как линейный оператор,

характеризуемый матрицей C . Так как α - неймановский темп роста a , то в соответствии с теоремой [5, с.110] имеет место равенство $\alpha \bar{u} = C\bar{u}$. Теперь ясно, что асимптотика траекторий модели $\mathfrak{X}$ определяется при некоторых дополнительных ограничениях матрицей C .

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\alpha > 0$ - неймановский темп роста модели $\mathfrak{X}$ - является простым характеристическим числом матрицы C , превосходит модули остальных собственных чисел матрицы C и α достигается на единственном строго положительном векторе $\bar{u} \in \bar{Q}$. Тогда для всех траекторий $\varphi = (\alpha^{-t} u_t)$ модели $\mathfrak{X}$ выполняется соотношение

$$\lim_{t \to \infty} \alpha^{-t} u_t \to \xi \bar{u}, \quad \xi \geq 0,$$

причем $\xi > 0$ для траекторий, растущих средним темпом α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим нормальную жорданову форму [7, с.380] матрицы C . Так как α - простой корень матрицы C , то эта нормальная форма будет иметь вид:

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \boxed{\mathcal{J}_2} & 0 \\ & 0 & \ddots \quad \boxed{\mathcal{J}_s} \end{bmatrix} \tag{3}$$

где $\mathcal{J}_2, \ldots, \mathcal{J}_s$ - жордановы клетки.

Пусть $u_0 \in \bar{Q}$ - произвольный вектор, описывающий состояние населения и браков в модели $\mathfrak{X}$ в некоторый начальный момент исследования.

Обозначим через $(e_1, \ldots, e_n)$ базис, в котором матрица C имеет нормальную жорданову форму (3). Ясно, что $e_1 = \bar{u}$, $(e_2, \ldots, e_n)$ - базис подпространства размерности $n-1$, не содержащего $\bar{u}$. Для вектора u имеет место разложение:

$$u = \xi \bar{u} + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n . \tag{4}$$

Пусть $\varphi = (u_t)_{t=0}^{\infty}$ - траектория модели $\mathfrak{X}$, исходящая из состояния u , т.е. считаем, что $u_0 = u$. Если траекто-

рия φ не растет со средним темпом роста α [5, с.226], то последовательность $(\alpha^{-t} u_t)_{t=0}^{\infty}$ сходится к нулю, следовательно, $\lim_{t\to\infty} \alpha^{-t} u_t = \xi \bar{u}$, $\xi = 0$. Иначе говоря, в этом случае теорема верна. Пусть теперь траектория $\varphi = (u_t)_{t=0}^{\infty}$ имеет средний темп роста α. Тогда в образовании этой траектории бесконечно много раз участвует матрица C. Поэтому найдется натуральное число t_0, начиная с которого будем иметь равенство: $u_{t+1} = C u_t$, $t \geq t_0$. Отсюда следует, что последовательность $(\alpha^{-t} u_t)$ сходится в точке $\xi \bar{u}$, т.е. $\lim_{t\to\infty} (\alpha^{-t} u_t) = \xi \bar{u}$. Коэффициент ξ легко вычислить, зная разложение (4). Очевидно, что $\xi = \bar{p} u / \bar{p} \cdot \bar{u}$, где $\bar{u}, \bar{p}$ – соответственно правый и левый собственные векторы матрицы C, соответствующие α. Теорема доказана.

Сделаем несколько важных следствий из доказанной теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 1. Теорема эргодичности в слабой форме (сходимость по угловому расстоянию) имеет место в модели $\mathcal{Z}$ для любых начальных состояний населения.

СЛЕДСТВИЕ 2. Теорема эргодичности в сильной форме (сходимость к одной и той же точке $\xi \bar{u}$ луча $(\lambda \bar{u})_{\lambda > 0}$) имеет место только для таких начальных состояний $u \in \mathcal{Q}$, которые принадлежат одной и той же гиперплоскости $H = \{u \in R_n / \bar{p} \cdot u - \xi \bar{p} \cdot \bar{u} = 0, \ \xi > 0\}$.

Заметим, что придавая различные положительные значения параметру ξ, получаем различные гиперплоскости – поверхности уровня для начальных состояний. Для всех точек одной и той же указанной поверхности уровня имеет место теорема эргодичности в сильной форме, причем по параметру ξ знаем точку сходимости $\xi \bar{u}$, а по точке сходимости $\xi \bar{u}$ легко указать множество всех начальных состояний, траектории из которых сходятся к точке $\xi \bar{u}$. Очевидно, что таким множеством является пересечение $\mathcal{Q} \cap H$, $H = \{u \in R_n / \bar{p} u - \xi \bar{p} \cdot \bar{u} = 0\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В начале пункта по неймановскому состоянию равновесия определили матрицу C, совпадающую с одной из указанных в п.3 матриц $C_1, C_2, \ldots, C_m$. Но можно действовать и обратно, а именно, зная перроновы числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ матриц $C_1, \ldots, C_m$,

найти темп роста модели $\mathcal{X}$. Для этого достаточно положить

$$\alpha = \max_{1 \le i \le m} \alpha_i .$$

Пусть номер $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ такой, что $\alpha_{i_0} = \alpha$. Тогда за матрицу C_{i_0} возьмем матрицу $\bar{u} C_{i_0}$, а за векторы $\bar{u}$ и $\bar{p}$ – соответственно правый и левый собственные векторы матрицы C_{i_0} , определяемые числом α_{i_0} .

ЛИТЕРАТУРА

I. LESLIE P.H. On the use of the matrices in certain population mathematics. – Biometrica, I945, p.I83-2I2.

2. KEYFITZ N. Population mathematics. – International Population conference. London, I969. Vol. I, Liege, I97I.

3. СТАРОВЕРОВ О.В. Воспроизводство структуры населения и браков. – Экономика и мат. методы, I977, т.I3, № I, с.72-82.

4. РУБИНОВ А.М. Суперлинейные многозначные отображения и их приложения к экономико-математическим задачам. – Л.: Наука, I980.

5. МАКАРОВ В.Л., РУБИНОВ А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. – М.: Наука, I973.

6. ТИМОХОВ А.В. Некоторые теоремы о неподвижной точке. – В сб.: Методы функционального анализа в математической экономике. М.: Наука, I978, с.98-II0.

7. КУРОШ А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, I968.

Поступила в ред.-изд. отдел
27.08.I985 г.