Выпуск 36(53) ОПТИМИЗАЦИЯ 1985 г.

УДК 519.863

ГОРИЗОНТ ЭФФЕКТИВНОСТИ В ОДНОПРОДУКТОВОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

В.Д.Матвеенко

1. Введение. В целом ряде моделей экономической динамики с дискретным временем возникает ситуация (см., например,[1]), когда для фиксированного начального состояния S^0 бесконечная эффективная траектория с началом S^0 единственна. А всякая конечная траектория длины T с началом S^0, терминально оптимальная в смысле некоторого возрастающего функционала Υ, при достаточно большом горизонте планирования T близка к эффективной на начальном участке. Это явление используется в скользящем планировании [2]: можно на каждом шаге переходить из текущего состояния в следующее по какой-либо терминально оптимальной траектории. При достаточно большом горизонте планирования T построенный таким образом скользящий план близок к эффективной траектории. Однако, если это "достаточно большое" значение T настолько велико, что не соответствует реальным возможностям информационного обеспечения и управления, ценность подобных результатов значительно снижается.

Таким образом, возникает задача численной оценки горизонта планирования T, при котором оптимальные траектории становятся близкими к эффективной. Для такой прикидочной, грубой оценки мы используем двухфакторную однопродуктовую модель, которая достаточно известна. С иных точек зрения подобные модели исследовали А.М.Рубинов [3,4], М.И.Зеликин и С.А.Корнев [5] и др.

2. Описание модели. Модель описывается равенством

$$x^{t+1}=x^t+f(x^t)u^t, \qquad (1)$$

где $x^t \in R^2_+$, f - скалярная функция, u^t - управляющий вектор,

$$u_1^t + u_2^t = 1; \; u_1^t, u_2^t \geq 0, t = 0, 1, \ldots \qquad (2)$$

Здесь f - производственная функция, x^t - вектор производственных фондов двух типов. Управления u^t соответствуют всевозможным способам распределения выпущенного продукта $f(x^t)$.

Будем предполагать, что функция f дифференцируема, монотонно возрастает и положительно однородна степени I; $f(x_1, x_2) = 0$ при $x_1 = 0$ или $x_2 = 0$. Кроме того, будем считать, что сужение функции f на симплекс

$$S(c) = \{x : x_1 + x_2 = c; x_1, x_2 \geq 0\}, \; c > 0,$$

является строго вогнутой функцией.

Эффективной точкой множества $M \subset R^2_+$ назовем (если она существует) точку $\operatorname{eff} M$, на которой достигается $\max\limits_{x \in M} f(x)$. Из свойств функции f следует, что для симплексов $S(c)$ эффективные точки $\operatorname{eff} S(c)$ расположены на луче

$$\tilde{L} = \{x : \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x); x_1, x_2 > 0\}.$$

Луч $\tilde{L}$ называется неймановским [4].

Последовательность $\{x^t\}$ называется траекторией с началом x^0, если она удовлетворяет соотношениям (I), (2). Конечный участок $\{x^t\}_{t=0}^T$ траектории называется T-траекторией с началом x^0. Траектория $\{x^t\}$ называется стационарной с темпом роста λ, если $x^{t+1} = \lambda x^t$, $t = 0, 1, \ldots$ При сделанных предположениях стационарная траектория с наибольшим возможным темпом роста $\tilde{\lambda}$ проходит по неймановскому лучу $\tilde{L}$. Число $\tilde{\lambda}$ называется темпом роста модели.

Будем говорить, что траектория $\{\bar{x}^t\}$ опережает траекторию $\{x^t\}$ в период k, если $\bar{x}^t \geq x^t$ при всех $t = k, k+1, \ldots$ (Знак $\geq$ понимается в смысле $\neq$.) Траектория $\{\tilde{x}^t\}$ с началом x^0 называется эффективной, если не существует опережающей ее траектории с началом x^0. Пусть Ψ - возрастающая функция, тогда T-траектория $\{\bar{x}^t\}_{t=0}^T$ с началом x^0 называется Ψ-оптимальной, если

$$\Psi(\bar{x}^T)=\max_{\{x^t\}_{t=0}^T} \Psi(x^T)$$

по всем T-траекториям с началом x^0. Очевидно, Ψ -оптимальная T-траектория не опережается в периоды $1,2,\dots,T$ никакой траекторией с началом x^0.

Увидим, что при фиксированном начальном состоянии x^0 найдется такое натуральное число $T(x^0)$, что для всякой Ψ-оптимальной T-траектории $\{x^t\}_{t=0}^T$ состояние x^1 принадлежит эффективной траектории с началом x^0, независимо от вида функции Ψ, если только $T \geq T(x^0)$. Наименьшее число $T(x^0)$, обладающее этим свойством, назовем горизонтом эффективности.

ЗАМЕЧАНИЕ. По-видимому, при некоторых дополнительных предположениях можно определить горизонт эффективности независимо от начального состояния x^0.

3. Структура Ψ-оптимальных T-траекторий. Пусть $x\in R^2_+$. Множество $a(x)=\{y: y=x+f(x)u,\ u_1+u_2=1; u_1,u_2\geq 0\}$ называется областью достижимости из состояния x. Очевидно, $a(x)$ представляет собой отрезок $[(x_1,x_2+f(x)),(x_1+f(x),x_2)]$. Пусть Ψ - возрастающая функция на R^2_+.

ТЕОРЕМА I. Если T-траектория $\{\bar{x}^t\}_{t=0}^T$ с началом x^0 Ψ-оптимальна и для некоторого периода k, $0<k<T$, выполняется неравенство

$$x^k \neq y = \mathrm{eff}\, a(\bar{x}^{k-1}),$$

а именно $\bar{x}^k_1 > y_1$ ($\bar{x}^k_1 < y_1$), то состояния $\bar{x}^{k+1}, \bar{x}^{k+2},\dots, \bar{x}^T$ лежат на прямой, параллельной оси координат Ox_1 (соответственно Ox_2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a(\bar{x}^{k-1})=[AB], y=\mathrm{eff}\, a(\bar{x}^{k-1})$ и для определенности точка $\bar{x}^k$ расположена правее y, т.е. $\bar{x}^k_1 < y_1$ (рис.I).

Рассмотрим область $a(\bar{x}^k)=[KM]$. Функция f монотонна на отрезке $[\bar{x}^k, y]$, поэтому для каждой точки $v\in[KM)$ можно указать такие точки $z\in[AB]$ и

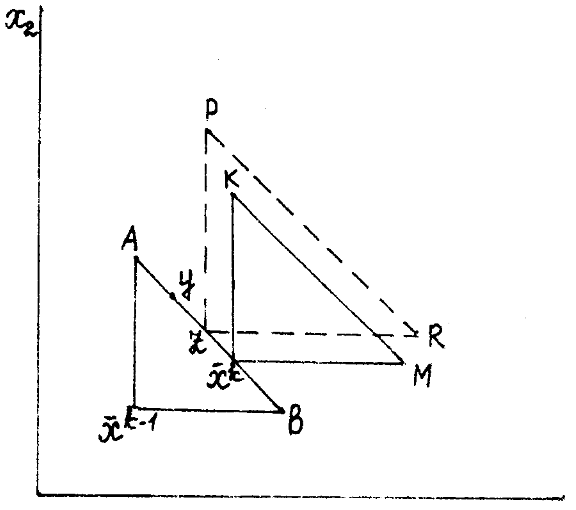

Рис. I

$v' \in a(\bar z)$, что $v' > v$. Таким образом, для всякой точки отрезка $[KM]$, за исключением разве что точки M, можно указать лучшую точку, достижимую из $\bar x^{k-1}$ за два шага. Тем самым, если T-траектория проходит в период k не через эффективную точку области $a(\bar x^{k-1})$, а в период $k+1$ не через крайнюю точку M области $a(\bar x^{k})$, то она в период $k+1$ опережается некоторой траекторией с началом x^0 и, значит, не является Ψ-оптимальной при $T \geq k+1$. Таким образом, в рассматриваемом случае $\bar x^{k+1} = M$.

Точка M, как и $\bar x^k$, расположена правее эффективной точки области достижимости, поэтому и на шаге $k+2$ выбирается правый край области достижимости, если $T \geq k+2$, и т.д. Аналогично рассматривается случай $\bar x_1^k < y_1$. Теорема доказана.

Таким образом, всякая Ψ-оптимальная T-траектория состоит из участка, на котором $x^{t+1} \in \mathrm{eff}\, a(x^t)$, одного состояния переключения: участка, параллельного координатной оси.

4. **Существование горизонта эффективности.** Теперь, когда известна структура Ψ-оптимальных T-траекторий, следует ответить на вопрос, насколько длинными могут быть Ψ-оптимальные T-траектории, отличные от эффективной.

ТЕОРЕМА 2. Для любого начального

состояния x^0 существует такое целое число $T(x^0)$, что если T-траектория $\{x^t\}_{t=0}^{T}, T>T(x^0)$, при $t\geq 1$ проходит параллельно координатной оси (Ox_1 или Ox_2), то она при некотором $k\leq T(x^0)$ опережается траекторией с началом x^0 и, следовательно, не является ψ-оптимальной T-траекторией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть траектория $\tau=\{x^t\}_{t=1}^{\infty}$ с началом x^1 параллельна оси Ox_1; $y=\mathrm{eff}\, a(x^0)$. Рассмотрим две траектории с началом y : стационарную траекторию $\tilde{\tau}=\{\tilde{x}^t\}$, $\tilde{x}^t=\lambda^t y$, $\lambda=1+\dfrac{f(y)}{y_1+y_2}$, и траекторию $\bar{\tau}=\{\bar{x}^t\}$, параллельную оси Ox_1. Из монотонности функции f следует, что $x_1^t<\bar{x}_1^t+c$ при всех $t=1,2,\dots,T$, где $c=y_2-x_2^0$ (рис. 2).

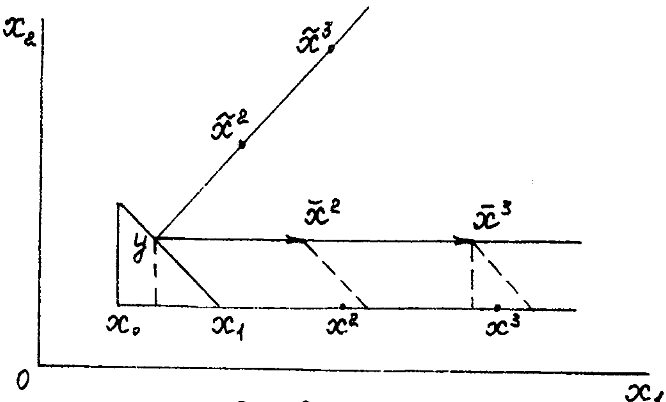

Рис. 2

С другой стороны, легко показать, что для любой постоянной $c>0$ найдется такой номер $T_c(x^0)$, что $\tilde{x}_1^t>\bar{x}_1^t+c$ при всех $t\geq T_c(x^0)$. Это означает, что траектория $\{x^t\}_{t=1}^{\infty}$ опережается траекторией $\{\tilde{x}^t\}$ в некоторый период $T(x^0)$. Аналогично рассматривается случай, когда T-траектория параллельна оси Ox_2. Теорема доказана.

5. Эффективные траектории. Для понимания структуры Ψ-оптимальных T-траекторий существен следующий факт.

ТЕОРЕМА 3. Траектория $\{\tilde{x}^t\}$ с началом x^0, для которой $\tilde{x}^{t+1} = \mathrm{eff}\, a(\tilde{x}^t)$, $t=0,1,\dots$, эффективна и других эффективных траекторий с началом x^0 нет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что траектория $\{\tilde{x}^t\}$ не эффективна, т.е. $x^q \geqslant \tilde{x}^q$ для некоторой траектории $\{x^t\}$ с началом x^0 и некоторого натурального q. Тогда для каждой траектории, совпадающей с $\{\tilde{x}^t\}$ при всех $t \le q$, можно указать опережающую ее траекторию, проходящую через точку x^q. Следовательно, T-траектория, совпадающая с $\{\tilde{x}^t\}$ при $t \le q$, не является Ψ-оптимальной ни при каких $\Psi, T \ge q$.

Пусть $T(x^0), T(\tilde{x}^1), \dots, T(\tilde{x}^q)$ - числа, определенные по теореме 2. Положим

$$\tilde{T} = \max\{T(x^0), T(\tilde{x}^1)+1, \dots, T(\tilde{x}^q)+q\}.$$

Тогда для произвольной Ψ-оптимальной $\tilde{T}$-траектории $\{x^t\}_{t=0}^{\tilde{T}}$ найдется s ($0 \le s \le q$) такое, что $x^{s-1} = \tilde{x}^{s-1}$, $x^s \ne \tilde{x}^s$. По теореме I траектория $\{x^t\}_{t=s+1}^{\tilde{T}}$ параллельна одной из осей. Так как $\tilde{T} - s \geqslant T(x^s)$, то по теореме 2 она не может быть Ψ-оптимальной. Получено противоречие. Таким образом, траектория $\{x^t\}$ эффективна.

Предположим, что помимо $\{\tilde{x}^t\}$ существует другая эффективная траектория $\{\bar{x}^t\}$ с началом x^0. Тогда $\bar{x}^k \ne \mathrm{eff}\, a(x^{k-1})$ для некоторого k. В таком случае траектория $\{\bar{x}^t\}$ в периоды $k+1, k+2, \dots$ проходит параллельно координатной оси (иначе она опережается согласно доказательству теоремы I). Но параллельная оси траектория также опережается (теорема 2), т.е. не эффективна. Теорема доказана.

6. Оценка горизонта эффективности. Пусть $f(x) = \gamma x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$, $\gamma > 0, 0 < \alpha < 1$ (функция Кобба - Дугласа). Рассмотрим случай, когда $x^0 \in L$. Этот случай представляет интерес, поскольку всякая эффективная траектория (а значит, и достаточно длинные Ψ-оптимальные T-траектории) выходит на неймановский луч.

Тогда горизонт эффективности – это наименьшее $\tilde{T}$, при котором всякая Ψ-оптимальная $\tilde{T}$-траектория с началом $x^0 \in \tilde{L}$ в период $t=1$ остается на неймановском луче. Как следует из доказательства теоремы 2, для получения оценки сверху для горизонта эффективности достаточно сравнить три траектории с началом x^0 ($\{\hat{x}^t\}$ – стационарную, $\{x^t\}$ – параллельную оси $0x_1$, $\{\bar{x}^t\}$ – параллельную оси $0x_2$) и найти натуральное T, для которого выполняются неравенства

$$\hat{x}_i^T > x_i^T + (\tilde{\lambda}-1)x_j^0;\ i,j=1,2;\ i \neq j,$$

где $\tilde{\lambda} = 1+\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}$ – темп роста модели.

Расчеты проводились на ЭВМ БЭСМ-6. В результате получены, в частности, следующие значения T для различных γ при $\alpha \in [0,1,\ 0,9]$. В таблице приводятся также значения темпа роста модели $\tilde{\lambda}$, соответствующие указанным значениям γ, α.

γ	T для α=0,I и α=0,9	$\tilde{\lambda}$ для α=0,5	$\tilde{\lambda}$ для α=0,I и α=0,9
0,05	II5	I,03	I,03
0,07	83	I,04	I,05
0,08	73	I,04	I,06
0,I	59	I,05	I,07
0,2	3I	I,I0	I,I4
0,3	22	I,I5	I,22
0,4	I7	I,20	I,29
0,5	I4	I,25	I,36
0,6	I2	I,30	I,43
0,7	II	I,35	I,5I
0,8	I0	I,40	I,58
0,9	9	I,45	I,65
I,0	9	I,50	I,72
I,4	7	I,70	2,0I

Найденная таким образом величина T с ростом γ монотонно убывает при фиксированном α. При фиксированном γ наименьшее значение T достигается при $\alpha=1-\alpha=0,5$; величина T (а также темп роста $\tilde{\lambda}$) растет по мере увеличения числа $|\alpha-(1-\alpha)|$.

При сравнении полученных оценок горизонта эффективности и темпов роста модели с реальными величинами горизонта планирования и темпа роста (например, темпа роста национального дохода) следует учитывать, что реальный темп роста может значительно отличаться от теоретического, предельно возможного темпа роста модели. Таким образом, при определенных параметрах полученные оценки горизонта эффективности вполне согласуются с практически используемыми величинами горизонта планирования [6]: долгосрочного на 10 лет, прогнозирования на 15-20 лет. Вместе с тем, следует отметить, что снижение темпа роста модели ведет к увеличению горизонта эффективности (а значит, к необходимости повышения качества долгосрочного планирования).

ЛИТЕРАТУРА

1. МАТВЕЕНКО В.Д. Эффективные траектории как ранние магистрали в моделях экономической динамики. - Тез. сообщений Всесоюзного симпозиума по современным проблемам математической экономики. - Вильнюс, 1984, с.39-40.
2. КАГАНОВИЧ М.И. Математические модели скользящего планирования. - Таллин: Валгус, 1983.
3. РУБИНОВ А.М. Об одной макроэкономической модели. - Оптимизация, 1978, вып. 21(38), с. 139-152.
4. РУБИНОВ А.М. Суперлинейные многозначные отображения и их приложения к экономико-математическим задачам. - Л.: Наука, 1980.
5. ЗЕЛИКИН М.И., КОРНЕВ С.А. Синтез оптимальных траекторий для одной n-мерной многошаговой задачи оптимального управления. - Оптимальное управление. Математические вопросы управления производством. М.: Изд-во МГУ, 1977, вып. 7, с.4-52.
6. КОБРИНСКИЙ Н.Е., МАЙМИНАС Е.З., СМИРНОВ А.Д. Экономическая кибернетика. - М.: Экономика, 1982.

Поступила в ред.-изд. отдел
10.12.1984 г.