Выпуклый анализ и полуупорядоченные
пространства

УДК 517.98+515.1

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ А.Г.ПИНСКЕРА

А.И.Векслер

В 1954 г. А.Г.Пинскер поставил вопрос: верно ли, что всякое расширенное K-пространство счетного типа является K^+-пространством?

Напомним, что множество H в векторной решетке X называется (0)-аннулируемым, если для любой последовательности $\{x_n\}\subset H$ и любой последовательности положительных чисел $\lambda_n \to 0$ непременно $\lambda_n x_n \xrightarrow{(o)} 0$. K-пространство X называется K^+-пространством [1], если в нем всякое (0)-аннулируемое множество (порядково) ограничено.

Поскольку любое расширенное K-пространство счетного типа изоморфно векторной решетке $C_\infty(Q)$ всех непрерывных расширенных функций на некотором экстремально несвязном бикомпакте Q с условием Суслина (верно и обратное), задача А.Г.Пинскера должна иметь и чисто топологическую переформулировку. Таковая была найдена З.Т.Дикановой [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [3]. Последовательность $\{F_n\}$ замкнутых (з.) нигде не плотных (н.н.п.) множеств топологического пространства T называется доминирующей, если для любой другой последовательности $\{F_n'\}$ з.н.н.п. множеств такой, что $F_n'\cap F_n=\varnothing$ $(n\in\omega)$, непременно $\bigcup F_n'$ н.н.п. Пространство, имеющее доминирующую последовательность, называется узким.

Топологический эквивалент задачи А.Г.Пинскера, установленный З.Т.Дикановой, в терминологии данной заметки звучит так: верно ли, что никакой экстремально несвязный бикомпакт с условием

Суслина не является узким?

Задача А.Г.Пинскера оказалась достаточно сложной и была решена лишь через четверть века после ее постановки довольно сложным путем А.В.Колдуновым, впервые построившим узкий экстремально несвязный бикомпакт Q с условием Суслина [4,5].

K-пространство $C_\infty(Q)$ для этого Q есть расширенное K-пространство счетного типа, не являющееся K^+-пространством. Другой, непосредственный способ построения соответствующих K-пространств дается А.В.Колдуновым в статье, публикуемой в данном сборнике. Цель настоящей заметки – построить сепарабельный узкий экстремально несвязный бикомпакт.

Для построения искомого бикомпакта предварительно рассмотрим одну достаточно общую конструкцию узких пространств.

Пусть $\{S^{(k)} : k \in \omega\}$ – последовательность бикомпактов, в каждом из которых выделена неизолированная точка $s_o^{(k)}$. Пусть $s_o = (s_o^{(1)}, s_o^{(2)}, \dots)$, а S – соответствующее σ-произведение (т.е. $S = \{s = (s^{(1)}, s^{(2)}, \dots) \in \prod S^{(k)} : card\{k : s^{(k)} \neq s_o^{(k)}\} < \omega\}$) с ящичной топологией (т.е. базис открытых в S множеств состоит из всех множеств вида $G^{(1)} \times G^{(2)} \times \dots$, где $G^{(k)}$ открыто в $S^{(k)}$ и почти все $G^{(k)}$ содержат $s_o^{(k)}$).

ЛЕММА. Пространство S является узким.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $F_n = \{s \in S : s^{(k)} = s_0^{(k)}$ при $k > n\}$. Очевидно, F_n – н.н.п. и бикомпактно, т.е. з.н.н.п. Зафиксируем (пока) натуральное m и введем обозначения. Представим

$$S = (S^{(1)} \times \dots \times S^{(m)}) \times (S^{(m+1)} \times \dots) = S_m \times \bar{S}.$$

Очевидно, $Pr_{\bar{S}}$ – замкнутое отображение, так как S_m – бикомпакт. Обозначим $\bar{s} = Pr_{\bar{S}}\, s$ и (для любого $H \subset S$) $\bar{H} = Pr_{\bar{S}} H$.

Возьмем любое замкнутое $F \subset S$ такое, что $F \cap F_m = \emptyset$. Положим $\tilde{F} = \{s_o^{(1)}\} \times \dots \times \{s_o^{(m)}\} \times \bar{F}$. Очевидно, $\tilde{F}$ – з.н.н.п. Далее, $\tilde{F} \cap F_m = \emptyset$, ибо противное влекло бы $\tilde{F} \cap F_m = \{s_o\}$, откуда $F \cap F_m \neq \emptyset$, что противоречит выбору F.

Возьмем теперь з.н.н.п. F_n' такие, что $F_n' \cap F_n = o\ (n \in \omega)$, и покажем, что $\cup F_n'$ н.н.п. в S. Так как, кроме того, очевидно $\cup F_n = S$, это будет означать, что $\{F_n\}$ – доминирующая последовательность на S, что и завершит дока-

зательство леммы.

Всякое непустое базисное открытое множество в S имеет вид

$$G = G^{(1)}\times\ldots\times G^{(r)}\times \mathcal{U}^{(r+1)}\times \mathcal{U}^{(r+2)}\times\ldots,$$

где все сомножители непусты, открыты и $s_0^{(k)}\in \mathcal{U}^{(k)}$.

Из установленного выше следует, что $\tilde{F}_m \cap F_m = \emptyset$ $(m\in\omega)$. А это позволяет считать, без уменьшения общности, что $\tilde{F}'_m \subset F'_m$, т.е. если $s\in F'_m$, то и $(s_0^{(1)},\ldots,s_0^{(m)},\bar{s})\in F'_m$. Так как $s_0\in F_m$, то $s_0\notin \tilde{F}'_m$. Поэтому найдется открытое в S множество $G'_m\ni s_0$, $G'_m\cap F'_m=\emptyset$. Пусть $G'_m=\mathcal{U}_m^{(1)}\times\mathcal{U}_m^{(2)}\times\ldots$, где $s_0^{(k)}\in\mathcal{U}_m^{(k)}$. Положим

$$G_m = S^{(1)}\times\ldots\times S^{(m)}\times\mathcal{U}_m^{(m+1)}\times\mathcal{U}_m^{(m+2)}\times\ldots$$

Тогда $G_m\supset G'_m$ и $G_m\cap F'_m=\emptyset$. Действительно, из противного и условия $\tilde{F}'_m\subset F'_m$ вытекало бы

$$F'_m\cap(\{s_0^{(1)}\}\times\ldots\times\{s_0^{(m)}\}\times\mathcal{U}_m^{(m+1)}\times\mathcal{U}_m^{(m+2)}\times\ldots)\neq\emptyset,$$

т.е. $F'_m\cap G'_m\neq\emptyset$, что противоречит выбору G'_m. Ясно, что можно дополнительно считать $\mathcal{U}^{(m+1)}\supset\mathcal{U}_m^{(m+1)}\supset\mathcal{U}_{m+1}^{(m+1)}\supset\ldots$

Теперь положим $G_0=G^{(1)}\times\ldots\times G^{(2)}\times\mathcal{U}_r^{(r+1)}\times\mathcal{U}_r^{(r+2)}\times\ldots$ Тогда $\emptyset = G_0\subset G$ и $G_m\supset G_0$ при всех $m\geqslant r$. Значит, $G_0\cap(\bigcup\{F'_n : n\geqslant r\})=\emptyset$. Но это и означает, что $\bigcup F_n$ н.н.п. Лемма доказана.

После этого уже нетрудно указать сепарабельный узкий экстремально несвязный бикомпакт. Возьмем в качестве $S^{(k)}$ один и тот же бикомпакт $\{1/n : n\in\omega\}\cup\{0\}$ в обычной топологии и положим $s_0^{(k)}=0$. Тогда соответствующее пространство S из леммы счетно и является узким; на это обратил внимание автора П.Симон. В силу теоремы 8.В из [6] любая бикомпактификация bS узкого пространства S – тоже узкое пространство, очевидно сепарабельное. Но в этом случае абсолют Q пространства bS тоже узкое пространство по следствию к предложению 2 из [6]. Это пространство и есть искомый бикомпакт.

Заметим, что в [7] В.И.Малыхин также построил счетное узкое пространство, не пользуясь гипотезой континуума. С помощью его пространства также можно построить сепарабельный узкий бикомпакт.

ЛИТЕРАТУРА

1. КАНТОРОВИЧ Л.В., ВУЛИХ Б.З., ПИНСКЕР А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. - М.: Гостехиздат, 1950.
2. ДИКАНОВА З.Т. Об условиях ограниченности множеств в расширенном К-пространстве. - Сиб. мат. журн., 1968, т.9, № 4, с.804-815.
3. ВЕКСЛЕР А.И. Доминирующие последовательности и узкие топологические пространства. - В кн.: Топологические пространства и их отображения. Рига, 1981, с.159-174.
4. ВЕКСЛЕР А.И., КОЛДУНОВ А.В. Решение одной топологической задачи. - Тезисы. докл. IУ Тираспольского симпозиума по общей топологии и ее приложениям. Кишинев, 1979, с.22-23.
5. КОЛДУНОВ А.В. Решение одной старой задачи из теории полуупорядоченных пространств. - Изв. вузов. Математика, 1982, № 2, с.24-27.
6. ВЕКСЛЕР А.И. О доминирующих последовательностях и узких пространствах. - В кн.: Топологические пространства и их отображения. Рига, 1985.
7. МАЛЫХИН В.И. Об узких пространствах. - В кн.: Топологические пространства и их отображения. Рига, 1983, с. 70-76.

Поступила в ред.-изд. отдел
10.10.1985 г.