Выпуск 37(54) ОПТИМИЗАЦИЯ 1986 г.

Выпуклый анализ и полуупорядоченные пространства

УДК 517.51+517.987+519.21

МЕТРИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ В НЕСЕПАРАБЕЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С МЕРОЙ

Д.А.Владимиров, А.А.Самородницкий

Цель настоящей работы - распространить метрическую классификацию измеримых вещественных функций [1] на более широкий класс пространств с мерой, чем пространства Рохлина - Лебега [2]. Для рассматриваемых нами пространств не известен аналог теории измеримых разбиений, построенной В.А.Рохлиным [2] для сепарабельного случая, с помощью которой доказывается классификационная теорема [1, с.171]. Среди известных понятий и фактов напоминаем только необходимые для формулировки результатов. В остальном придерживаемся терминологии работ [1-3].

Под пространством с мерой $(M, \mathcal{F}, \mu)$ понимаем множество M, σ-алгебру $\mathcal{F}$ измеримых подмножеств M и вероятностную меру μ (в дальнейшем для краткости пишем M вместо $(M, \mathcal{F}, \mu)$). Говорим, что пространство M τ-однородно, если оно изоморфно $\mathrm{mod}\ 0$ декартовой степени $[0,1]^{\tau}$ единичного отрезка с обычной мерой Лебега или (что то же самое) произведению $\{0,1\}^{\tau}$ двоеточий с симметричной мерой Бернулли $\nu\{0\}=\nu\{1\}=\frac{1}{2}$, где τ - бесконечный кардинал. Напомним, что два пространства с мерой M_1 и M_2 изоморфны, если существует взаимно-однозначное отображение M_1 на M_2, порождающее взаимно-однозначное, сохраняющее счетные теоретико-множественные операции и меру соответствие между измеримыми подмножествами M_1 и M_2. Пространства M_1 и M_2 изоморфны $\mathrm{mod}\, 0$ [2, с.113], если они станут изоморфными после удаления из них подходящих множеств нулевой меры.

Для того чтобы классификация измеримых вещественных функций была возможна, необходимо выделить класс изоморфных $mod\,0$ пространств с мерой [I, с.I69], на которых рассматриваемые функции будут заданы. Положим $\mathcal{F}_A=\{B\cap A : B\in\mathcal{F}\}$, где $A\in\mathcal{F}$, $\mu A>0$, и $\mu_A C=\mu C\cdot[\mu A]^{-1}$ для $C\in\mathcal{F}_A$. Тогда $(A,\mathcal{F}_A,\mu_A)$ является пространством с мерой, оно называется подпространством в M [2, с.I08]. Пусть дана таблица

$$\begin{bmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \\ \beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \\ \tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots \end{bmatrix} \tag{I}$$

в которой $\alpha_n, \beta_n \geq 0$, причем $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots$ и $\sum_n \alpha_n + \sum_k \beta_k = 1$, а τ_k - бесконечные кардинальные числа, $\tau_1 < \tau_2 < \ldots$; допускаем, что при некотором k_0 может быть $\beta_{k_0}=0$. Тогда будем считать $\beta_k = 0$ и положим $\tau_k = 0$ при всех $k \geq k_0$.

Говорим, что пространство M принадлежит классу $\mathcal{R}$, задаваемому таблицей (I), если M изоморфно $mod\,0$ прямой (дизъюнктной) сумме

$$L = \bigcup_n A_n \;\cup\; \bigcup_k B_k \tag{2}$$

пространств с мерой A_n и B_k таких, что A_n - тривиальные пространства, состоящие из одной точки (атома), а $B_k=\{0,1\}^{\tau_k}$ при $\tau_k \neq 0$ - произведения двоеточий с симметричной мерой Бернулли. Причем A_n и B_k как подпространства в L с мерами ν_{A_n} и ν_{B_k} соответственно однозначно определяют σ-алгебру измеримых множеств $C \subset L$, полную относительно меры ν в L, где

$$\nu(C) = \sum_n \alpha_n \cdot \nu_{A_n}(C \cap A_n) + \sum_k \beta_k \cdot \nu_{B_k}(C \cap B_k).$$

Условия $\alpha_{n_0} = 0$ или $\beta_{k_0} = 0$ для некоторых n_0 и k_0 означают конечность числа слагаемых в соответствующих частях прямой суммы (2).

Например, пространство Рохлина - Лебега, аксиоматически описанное в [2], принадлежит классу, задаваемому таблицей вида

$$\begin{bmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \\ \beta_1, 0, 0, \ldots \\ \tau_1, 0, 0, \ldots \end{bmatrix} \tag{3}$$

где τ_1 – счетный кардинал. Подпространство B_1, отвечающее (3) в силу (2), есть счетное произведение двоеточий с симметричной мерой Бернулли. Оно изоморфно, в свою очередь, отрезку [0,I] с обычной мерой Лебега [2, с.I2I]. Свойство $\sum_n \alpha_n + \beta_1 = 1$ означает, что последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ полностью определяет структуру пространства Рохлина – Лебега [2, с.II8].

Зафиксируем какой-нибудь класс $\mathcal{R}$ с таблицей (I). Пусть f_1 и f_2 – измеримые вещественные функции на пространствах $M_1 \in \mathcal{R}$ и $M_2 \in \mathcal{R}$ соответственно. Будем говорить, что f_1 и f_2 принадлежат одному метрическому типу, если существует изоморфное $mod\, 0$ отображение T пространства M_1 на M_2 такое, что $f_1(x) = f_2(Tx)$ для почти всех $x \in M_1$.

Функция распределения для измеримой вещественной функции f на пространстве M задается, как обычно, формулой $F(\lambda) = \mu\{x \in M : f(x) < \lambda\}$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Функция F неубывающая, непрерывная слева и обладает свойствами

$$\lim_{\lambda \to -\infty} F(\lambda) = 0, \lim_{\lambda \to +\infty} F(\lambda) = 1. \qquad (4)$$

Заметим, что все τ-однородные пространства относятся к классу $\mathcal{R}_\tau$ с таблицей

$$\begin{bmatrix} 0,0,0,\ldots \\ 1,0,0,\ldots \\ \tau,0,0,\ldots \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Зафиксируем несчетный кардинал τ.

ТЕОРЕМА I. А) Измеримые вещественные функции f_1 и f_2, заданные на τ-однородных пространствах M_1 и M_2, принадлежат одному метрическому типу тогда и только тогда, когда их функции распределения совпадают.

Б) Для всякой вещественной функции $F(\lambda)$, определенной для всех $\lambda \in \mathbb{R}$, неубывающей, непрерывной слева и обладающей свойствами (4), существует τ-однородное пространство M с мерой μ и измеримая функция f на M, имеющая

ф у н к ц и ю   р а с п р е д е л е н и я $F(\lambda)$.

Теорема I показывает, что на τ-однородных пространствах при несчетных τ имеется взаимно-однозначное соответствие между метрическими типами измеримых вещественных функций и всевозможными функциями распределения. Такая ситуация была, вообще говоря, невозможной на пространствах Рохлина – Лебега. Классификационная теорема В.А.Рохлина [I, с.I7I] как раз и указывает на факт, что существуют измеримые вещественные функции, имеющие одинаковые функции распределения, но принадлежащие разным метрическим типам. Пример такой пары функций приведен в конце настоящей работы.

Метрической структурой пространства с мерой M называется полная булева алгебра $\mathfrak{X}$, состоящая из классов эквивалентных $\mathrm{mod}\ 0$ измеримых подмножеств M, наделенная строго положительной мерой $\bar{\mu}$, индуцированной при факторизации M по σ-идеалу множеств нулевой меры μ. Терминология и основные используемые нами факты о булевых алгебрах имеются в [3].

Для измеримой вещественной функции f на M обозначим через $\tilde{\mathcal{F}}$ наименьшую порожденную ею σ-подалгебру в $\mathcal{F}$. Пусть $\tilde{\mathfrak{X}}$ – соответствующая $\tilde{\mathcal{F}}$ правильная подалгебра [3,с.I08] в метрической структуре $\mathfrak{X}$ пространства M. Напомним, что $\mathfrak{X}$ может быть представлена в виде прямой суммы

$$\mathfrak{X} = \bigoplus_n \mathfrak{X}_{u_n} \oplus \bigoplus_k \mathfrak{X}_{v_k} \tag{6}$$

$\tilde{\mathfrak{X}}$-однородных компонент [3, с.257], в которой: I) $\bar{\mu}(u_1) \geq \geq \bar{\mu}(u_2) \geq \ldots$; 2) компоненты $\mathfrak{X}_{u_n}$ насыщаются подалгеброй $\tilde{\mathfrak{X}}$, т.е. $\mathfrak{X}_{u_n} = [\tilde{\mathfrak{X}}]_{u_n} = \{x \wedge u_n : x \in \tilde{\mathfrak{X}}\}$, где $[\tilde{\mathfrak{X}}]_{u_n}$ называется следом подалгебры $\tilde{\mathfrak{X}}$ в компоненте $\mathfrak{X}_{u_n}$; 3) компоненты $\mathfrak{X}_{v_k}$ не насыщаются подалгеброй $\tilde{\mathfrak{X}}$ и имеют степени ненасыщения $\sigma(\tilde{\mathfrak{X}}, v_k)$, являющиеся бесконечными кардинальными числами [3, с.257]; 4) $\sigma(\tilde{\mathfrak{X}}, v_1) < \sigma(\tilde{\mathfrak{X}}, v_2) < \ldots$; 5) если компонента $\mathfrak{X}_w$ насыщается подалгеброй $\tilde{\mathfrak{X}}$ и $w \leq \bigvee_{k \geq n} u_k$, то $\bar{\mu}(w) \leq \bar{\mu}(u_n)$.

Существование разложения (6) обсуждалось в различных вариантах в [I–6].

Если τ – бесконечный кардинал, то метрической структурой τ-однородного пространства M будет однородная булева алгебра $\mathfrak{X}$ веса τ [3, с.262], которая совпадает с замыканием в O-топологии некоторой свободной подалгебры E^{τ} [3, с.99] мощности τ. Если $\tilde{\mathfrak{X}}$ – правильная подалгебра в $\mathfrak{X}$, порож -

денная некоторым счетным набором элементов, но при несчетном весе τ однородной булевой алгебры $\mathfrak{X}$ правильная подалгебра $\tilde{\mathfrak{X}}$ не может насыщать ни одной ненулевой компоненты в $\mathfrak{X}$, поэтому разложение (6) в таком случае будет вырожденным: $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}_{\vartheta_1}$, где $\vartheta_1 = 1$ и $\mathfrak{S}(\tilde{\mathfrak{X}},\vartheta_1)=\tau$. Этот факт и лежит в основе достаточности первого утверждения теоремы I. В общем же случае надо рассматривать функции распределения на каждой из компонент разложения пространства M, соответствующего разложению его метрической структуры.

Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение, представляющее, однако, самостоятельный интерес.

ЛЕММА. *Пусть $\mathfrak{X}$ – однородная булева алгебра веса τ, $\tilde{\mathfrak{X}}$ – правильная подалгебра в $\mathfrak{X}$, порожденная некоторым счетным набором элементов $\{y_1, y_2, \ldots\}\subset\mathfrak{X}$. Тогда существует правильная подалгебра $\mathcal{Y}$ в $\mathfrak{X}$, которая удовлетворяет условиям:* I) $\mathcal{Y}$ – однородная булева алгебра веса τ_0 (τ_0 – счетный кардинал); 2) $\tilde{\mathfrak{X}}$ является правильной подалгеброй в $\mathcal{Y}$; 3) если $\mathfrak{X}$ представлена в виде произведения $\Pi_{t\in\tau} E_t$ $\bar{\mu}$-независимого класса $\bar{\mu}$-простейших подалгебр $E_t=\{\emptyset, w_t, c_{w_t}, 1\}$ [3, с.240, 241, 256], то существует счетный набор индексов $t_1, t_2, \ldots$ такой, что $\mathcal{Y}=\Pi_{n=1}^{\infty} E_{t_n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{X}=\Pi_{t\in\tau} E_t$, где $\{E_t\}$ – класс $\bar{\mu}$-независимых $\bar{\mu}$-простейших подалгебр, и пусть E^{τ} – свободная булева алгебра, порожденная этим классом. E^{τ} имеет достаточно простое строение, а именно, она содержит всевозможные элементарные полиномы [3, с.70]:

$$z=\bigvee_{k=1}^{n(z)}\left[\left(\bigwedge_{u\in\Delta_k} u\right)\wedge\left(\bigwedge_{v\in\Delta'_k} c_v\right)\right], \tag{7}$$

где $n(z)$ – натуральное число, Δ_k и Δ'_k – некоторые конечные подмножества множества $\{w_t\}_{t\in\tau}$ образующих E^{τ}. Кроме того, для всякого $x\in\mathfrak{X}$ существует последовательность $z_1, z_2, \ldots$ элементарных полиномов $z_n\in E^{\tau}$, для которой $z_n\xrightarrow{o} x$ [3, с.124], в частности,

$$x = \bigwedge_{k=1}^{\infty} \bigvee_{n=k}^{\infty} z_n .$$

Нетрудно видеть теперь, что всякий элемент $x \in \mathcal{X}$ образован отвечающей ему не более чем счетной совокупностью элементов $\bar{\mu}$ -простейших подалгебр E_t . Обозначим для $y_n \in \mathcal{X}$ через $\mathcal{Z}_n$ совокупность тех простейших подалгебр E_t семейства $\{E_t\}_{t\in\mathcal{T}}$, элементы которых участвуют в образовании y_n. Пусть

$$\mathcal{Z} = \bigcup_n \mathcal{Z}_n .$$

Пусть, далее, $\mathcal{Z} = \{E_{t_1}, E_{t_2}, \dots\}$ – некоторая нумерация подалгебр в этой совокупности. Тогда

$$\mathcal{Y} = \prod_{n=1}^{\infty} E_{t_n}$$

– искомая правильная подалгебра в $\mathcal{X}$. Действительно, всякий элемент $x \in \widetilde{\mathcal{X}}$ получается применением некоторого не более чем счетного набора булевских операций к элементам $y_1, y_2, \dots$, следовательно, сам принадлежит $\mathcal{Y}$. Факт, что $\widetilde{\mathcal{X}}$ – правильная подалгебра в $\mathcal{Y}$, вытекает из правильности $\mathcal{Y}$ в $\mathcal{X}$ и $\widetilde{\mathcal{X}}$ в $\mathcal{X}$. Лемма доказана.

Если f – измеримая вещественная функция на пространстве M , то семейство множеств $\{U_\lambda\}_{\lambda\in R}$,

$$U_\lambda = \{x \in M : f(x) < \lambda\}$$

называем спектральным семейством функции f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы I. А) Необходимость. Пусть f_1 и f_2 принадлежат одному метрическому типу, т.е. существует изоморфное $mod\ 0$ отображение $T: M_1 \to M_2$, для которого

$$f_1(x) = f_2(Tx)$$

для всех $mod\ 0$ точек пространства M_1 . Тогда, очевидно, T взаимно-однозначно отображает (по $mod\ 0$) спектральное семейство $\{U_\lambda^1\}$ функции f_1 на спектральное семейство $\{U_\lambda^2\}$ функции f_2 , причем

$$TU_\lambda^1 = U_\lambda^2 , \quad \lambda \in R .$$

Теперь совпадение функций распределения вытекает из сохранения

автоморфизмом T меры.

Достаточность. Не ограничивая общности, можно считать, что

$$M = M_1 = M_2 = \{0,1\}^{\tau}$$

с мерой μ, порожденной прямым произведением симметричных мер Бернулли на двоеточиях. Рассмотрим семейство образующих

$$\{w_t\}_{t\in\tau}, \ \bar{\mu}(w_t) = \frac{1}{2},$$

метрической структуры $\mathfrak{X}$ пространства M, соответствующих цилиндрическим множествам

$$W_t = \{x = \{x_s\}_{s\in\tau} \in M : x_t = 0\}.$$

Пусть $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ - σ-подалгебры в $\mathcal{F}$, порожденные функциями f_1 и f_2, а $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ - соответствующие им правильные подалгебры в метрической структуре $\mathfrak{X}$. Далее, спектральным семействам $\{U^1_\lambda\}$ и $\{U^2_\lambda\}$ функций f_1 и f_2 отвечают в $\mathfrak{X}$ спектральные функции [3, с.189] $\{u^1_\lambda\}$ и $\{u^2_\lambda\}$. Тогда подалгебры $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ порождаются счетными наборами элементов $\{u^1_\lambda\}_{\lambda\in Q}$ и $\{u^2_\lambda\}_{\lambda\in Q}$, где $Q \subset R$ - множество всех рациональных чисел. Согласно лемме, найдутся лишь счетные наборы образующих $\{w^1_{t_n}\}$ и $\{w^2_{t_n}\}$ в семействе $\{w_t\}_{t\in\tau}$ всех образующих E^{τ}, причем $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ являются соответственно правильными подалгебрами порожденных этими наборами однородных подалгебр $\tilde{\mathfrak{X}}_1$ и $\tilde{\mathfrak{X}}_2$. Подалгебрам $\tilde{\mathfrak{X}}_1$ и $\tilde{\mathfrak{X}}_2$ в $M = \{0,1\}^{\tau}$ соответствуют счетные произведения двоеточий M'_1 и M'_2, и можно записать

$$M = M'_i \times \{0,1\}^{\tau}, \quad i = 1,2,$$

так как τ несчетно. Тогда применение леммы в нашей ситуации можно истолковать так. Функции f_1 и f_2 "зависят" лишь от счетного множества координат переменной $x = \{x_t\}_{t\in\tau}$ по $\mathrm{mod}\ 0$, другими словами, $f_i(x) = f_i(x_1)$ для $x = (x_1, x_2) \in M, x_1 \in M'_i$, $x_2 \in \{0,1\}^{\tau}$. Действительно, U^i_λ является $\mathrm{mod}\ 0$ подмножеством в M'_i для всех $\lambda \in Q$, $i = 1,2$. Рассмотрим пространства с мерой

$$\tilde{M}_i = M'_i \times \{0,1\}^{\tau_0},$$

τ_0 - счетный кардинал. Функции f_i продолжаются на $\tilde{M}_i$, если для $x = (x_1, x_2) \in \tilde{M}_i, x_1 \in M'_i, x_2 \in \{0,1\}^{\tau_0}$, положить $f_i(x) = f_i(x_1)$, $i = 1,2$.

Пусть $\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_2$ – правильные подалгебры в $\mathcal{X}$, соответствующие пространствам $\tilde{M}_1$ и $\tilde{M}_2$. Тогда $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ не насыщают в $\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_2$ ни одной ненулевой компоненты. В терминологии работ [I,2] это означает, что условные меры на всех $\bmod 0$ элементах измеримого разбиения ξ_i пространства $\tilde{M}_i$ (которое, как нетрудно заметить, является пространством Рохлина – Лебега) чисто непрерывны. По классификационной теореме В.А. Рохлина [I, с.I7I] существует изоморфное $\bmod 0$ отображение $\tilde{M}_1$ на $\tilde{M}_2$, переводящее f_1 в f_2. Продолжение полученного изоморфизма до автоморфизма пространства M тривиально.

Б) Пусть $M_1=\{0,1\}^{\tau}$, $M_2=[0,1]$ с обычной мерой Лебега. Пусть

$$U_\lambda=[0,F(\lambda)]\ ,\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

M_2 изоморфно $M_3=\{0,1\}^{\tau_0}$, τ_0 – счетный кардинал. Множествам $U_\lambda\subset M_2$ при этом изоморфизме соответствуют $U'_\lambda\subset M_3$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Пусть

$$M=M_1\times M_3,$$

причем для $x=(x_1,x_2), x_1\in M_1, x_2\in M_2$ положим $f(x)=G(x_2)$, где $G(x_2)=\lambda$ для $x_2\in[F(\lambda),F(\lambda+0)]$ и

$$F(\lambda+0)=\lim_{\lambda'\to\lambda+0} F(\lambda').$$

Поскольку множества $[F(\lambda), F(\lambda+0)]$ являются элементами измеримого разбиения $[0,1]$, то f построена. Она, очевидно, измерима и имеет функцию распределения $F(\lambda)$. Теорема доказана.

Переходим к общему случаю. Пусть класс $\mathcal{R}$ пространств с мерой задается таблицей (I). Если f – измеримая вещественная функция на $M\in\mathcal{R}$ (не ограничивая общности, можно считать, что $M=L$, см. (2)), то можно рассмотреть ее сужения на подпространства, входящие в прямую сумму (2). Если τ_1 в (I) – счетный кардинал, то пусть

$$A=\bigcup_n A_n\cup B_1.$$

Если τ_1 – несчетный кардинал, то пусть $A=\bigcup_n A_n$. Рассматривая функции f_A (сужение на множество A), можем определить их метрический тип по классификационной теореме В.А.Рохлина [I, с.I7I]. Для несчетных τ_k f_{B_k} классифицируются

теоремой I. Можно объединить эти результаты.

Пусть $M \in \mathcal{R}$ с таблицей (I). $\tilde{\mathcal{F}}$ – наименьшая σ-подалгебра $\mathcal{F}$, порожденная измеримой вещественной функцией f. По аналогии с разложением (6) метрической структуры, пространство M раскладывается в прямую сумму $\tilde{\mathcal{F}}$-канонических подпространств

$$M = \bigcup_n M_n^1 \cup \bigcup_k M_k^2, \tag{8}$$

где под $\tilde{\mathcal{F}}$-каноничностью понимаем, что при переходе к метрической структура разложению (8) соответствует разложение (6), удовлетворяющее перечисленным выше для него свойствам I)–5). Паспортом функции f в M называем таблицу

$$\begin{bmatrix} F_1, F_2, \dots \\ G_1, G_2, \dots \\ \sigma_1, \sigma_2, \dots \end{bmatrix} \tag{9}$$

где

$$F_n(\lambda) = \mu(\{x \in M : f(x) < \lambda\} \cap M_n^1),$$

$$G_k(\lambda) = \mu(\{x \in M : f(x) < \lambda\} \cap M_k^2),$$

а σ_k – бесконечные кардинальные числа, совпадающие со степенями ненасыщения компонент x_{ϑ_k} соответствующего разложения (6). Если какие-то из строк в (9) конечны, то условимся формально дополнять их нулями.

ТЕОРЕМА 2. А) Две измеримые вещественные функции f_1 и f_2, заданные на пространствах $M_1 \in \mathcal{R}$ и $M_2 \in \mathcal{R}$ некоторого фиксированного класса $\mathcal{R}$ с таблицей (I), принадлежат одному метрическому типу, если и только если их паспорта совпадают.

Б) Для всякой таблицы (9), в которой F_n и G_k непрерывные слева, неубывающие функции, заданные на $\mathbb{R}$ и удовлетворяющие условиям:

I) $\alpha_1' \geq \alpha_2' \geq \dots$;

2) $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} F_n(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to -\infty} G_k(\lambda) = 0$ при всех n и k;

3) $\sum_n \alpha'_n + \sum_k \beta'_k = 1$, где $\alpha'_n = \lim_{\lambda \to +\infty} F_n(\lambda)$, $\beta'_k = \lim_{\lambda \to +\infty} G_k(\lambda)$,

а σ_k – бесконечные кардинальные числа, $\sigma_1 < \sigma_2 < \ldots$, существуют пространство M класса $\mathcal{R}$ с таблицей (I), в которой $\alpha_n \geq 0$, $\beta_k \geq 0$ и $\tau_k = \sigma_k$ – только что упомянутые величины, и измеримая вещественная функция f на M, имеющая паспортом таблицу (9).

Приведем простой пример, основная идея которого уже высказана при доказательстве теоремы 1.

Пусть $M_1 = [0,1]$ с обычной мерой Лебега,

$$f_k(x) = \sin\left(\frac{x}{k\pi} + \frac{1}{2k}\right), \quad k = 1,2.$$

Тогда f_1 и f_2 имеют одинаковые функции распределения

$$F(\lambda) = \frac{1}{\pi} \arcsin \lambda + \frac{1}{2},$$

но принадлежат разным метрическим типам, имея, соответственно, различные паспорта

$$\begin{bmatrix} F(\lambda), & 0, & 0, & \ldots \\ 0 & ,0, & 0, & \ldots \\ 0 & ,0, & 0, & \ldots \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} F_1(\lambda), & F_2(\lambda), & 0, & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots \end{bmatrix}$$

где

$$F_1(\lambda) = F_2(\lambda) = \frac{1}{2} F(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Пусть τ – бесконечный кардинал, $M_2 = \{0,1\}^{\tau}$, $M = M_1 \times M_2$; для $x = (x_1, x_2) \in M$, $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$, положим

$$g_i(x) = f_i(x_1), \quad i = 1,2.$$

g_1 и g_2 имеют ту же функцию распределения $F(\lambda)$, но их паспорта в M уже совпадают:

$$\begin{bmatrix} 0, & 0, & 0, & \ldots \\ F(\lambda), & 0, & 0, & \ldots \\ \tau, & 0, & 0, & \ldots \end{bmatrix}$$

т.е. g_1 и g_2 принадлежат одному метрическому типу. Если τ - счетный кардинал, то M изоморфно $[0,1]^2$, а линии уровня функций g_1 и g_2 образуют координатные разбиения квадрата, скажем, на горизонтальные линии.

ЛИТЕРАТУРА

1. РОХЛИН В.А. Метрическая классификация измеримых функций.- Усп. мат. наук, т.12, вып.2, 1957, с.169-174.
2. РОХЛИН В.А. Об основных понятиях теории меры. - Мат. сб., т.25, №1, 1949, с.107-150.
3. ВЛАДИМИРОВ Д.А. Булевы алгебры. - М.: Наука, 1969.
4. MAHARAM D. Decompositions of measure algebras and spaces.- Trans. Amer. Math. Soc.,1950, v.69, N 1, p.142-160.
5. MAHARAM D. On homogeneous measure algebras. - Proc. Nat., Acad. Sci., 1942, v.28, N3, p.108-11.
6. КОЛМОГОРОВ А.Н. Строение полных метрических алгебр Буля. - Усп. мат. наук, т.3, вып.1, 1948.
7. ВИНОКУРОВ В.Г. О бесконечных произведениях пространств Лебега. - Докл. АН СССР, т.158, №6, 1964, с.1247-1249.
8. ВИНОКУРОВ В.Г. Обобщенные пространства Лебега. - Докл. АН СССР, т.129, №1, с.9-11.

Поступила в ред.-изд. отдел
10.10.1985 г.