Выпуск 37(54) ОПТИМИЗАЦИЯ 1986 г.

Выпуклый анализ и полуупорядоченные пространства

УДК 517.982

Π-ДЕДЕКИНДОВЫЕ РАСШИРЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТОК

А.В.Колдунов

Достаточно часто старые нерешенные задачи какой-либо теории (и попытки ее решить) порождают новые направления в развитии этой (и не только этой) теории. Тем самым эти задачи превращаются в классические проблемы, существенные для развития всей теории.

К таким задачам теории векторных решеток относится и вопрос А.Г.Пинскера о возможности построения расширенного K-пространства счетного типа, не являющегося K^+-пространством.

В свое время автор пытался решить эту задачу. Исходная идея состояла в следующем: получить требуемый объект как расширение векторной решетки $C([0,1])$; для этого следовало построить некоторую возрастающую трансфинитную последовательность векторных решеток, причем каждый элементарный шаг (от уже полученной векторной решетки X_α к $X_{\alpha+1}$) нарушал бы те связи в X_α , которые препятствовали превращению X_α в требуемое не K^+-пространство. Конкретизация и развитие этой идеи, а также стремление к более простому и "прямому" построению привели к решению в форме [1]. (Другой пример см. в работе А.И.Векслера в этом сборнике.) Сама же идея построения K-пространств по данной векторной решетке и по заранее указанным условиям оказалась в дальнейшем весьма продуктивной. Действительно, до сих пор была хорошо известна только одна чисто порядковая конструкция, позволяющая погрузить данную векторную решетку в K-пространство, а именно конструкция Дедекинда - Макнила [2]. Но эта конструкция уже не описывает такие классические объекты, как $L^\infty([0,1])$, K-пространство всех ограниченных функций на $[0,1]$ (в качестве K-расширений исходной векторной решетки $C([0,1])$). Тем более указанная конструкция не описывает такого специального пространства, что было построено для решения проблемы А.Г.Пинскера.

Целью данной статьи и является введение весьма общей конструкции, позволяющей строить широкие классы K-расширений данной векторной решетки, в частности все указанные ранее объекты как расширения $C([0,1])$.

Все построения будут проводиться для архимедовых векторных решеток (ВР) (хотя нетрудно заметить возможность использования этих конструкций и для более широких классов объектов); все отображения предполагаются также векторно-решеточными морфизмами.

I. Порядково-плотные расширения ВР

Пусть ВР X вложена в K-пространство Y ($\pi : X \to Y$); причем выполнены следующие два условия: а) если $y \in Y$, то $\pi x_1 \leq y \leq \pi x_2$ для некоторых $x_1, x_2 \in X$; б) если $y \geq 0$, $y \neq 0$, то найдется подмножество $a \subset X_+$, для которого $0 \neq \wedge(\pi x | x \in a) \leq y$. В этом случае будем говорить, что Y является порядково-плотным расширением (ППР) данной ВР X.

Пусть $G(X)$ есть семейство порядково-ограниченных множеств в X. Положим $\Pi(\pi) = (a \in G(X) | \wedge(\pi x | x \in a) = 0)$. Заметим, что для $\Pi(\pi)$ выполнены условия: I) если $a, b \in \Pi(\pi)$, то $a + b = (x + y | x \in a, y \in b) \in \Pi(\pi)$; 2) пусть $a \in \Pi(\pi)$, $b \subset X_+$, причем для любого $x \in a$ найдутся $y_n \in b$, $\wedge(y_n | n \leq \bar{n}) \leq x$ ($\equiv b$ минорирует a), тогда $b \in \Pi(\pi)$; 3) пусть $a \subset X_+$, $u \in X_+$, причем $u \geq x \in a$, $(a - \frac{u}{n}) \vee 0 \in \Pi(\pi)$ для $n \in N$, тогда $a \in \Pi(\pi)$; 4) пусть $a \in \Pi(\pi)$, $b \subset X_+$, $b \notin \Pi(\pi)$, элемент $z \geq x \in a$, $z \geq y \in b$, тогда существуют ограниченное множество $c \subset X_+$, не принадлежащее $\Pi(\pi)$, и число $q \geq 2$, для которых c минорирует $(b - z/q)_+$ и $(x - z/q)_+ \wedge y = 0$ для некоторых $x \in a$, $y \in c$.

Следующее утверждение показывает, что ППР одной и той же векторной решетки полностью задаются множествами $\Pi(\pi)$.

ТЕОРЕМА. I. П у с т ь Y_1, Y_2 – ППР ВР X ($\pi_i : X \to Y_i$; $i = 1,2$). Е с л и $\Pi(\pi_1) = \Pi(\pi_2)$, т о с у щ е с т в у е т и з оморфизм $\sigma : \mathcal{Y}_1 \to \mathcal{Y}_2$, сохраняющий все грани, причем $\sigma \pi_1 = \pi_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A \in \mathcal{Y}_1$. Из а),б) следует, что

$$A = \wedge(\vee(\pi_1 x | x \in a) | a \in G, A \leqslant \vee(\pi_1 x | x \in a)) =$$

$$= \vee(\wedge(\pi_1 y | y \in b) | A \geqslant \wedge(\pi_1 y | y \in b)).$$

Положим $g(A) = \wedge(\vee(\pi_2 x | x \in a) | A \leqslant \vee(\pi_1 x | x \in a))$, $h(A) = \vee(\wedge(\pi_2 y | y \in b) | A \geqslant \wedge(\pi_1 x | x \in a))$. Докажем, что $g(A) = h(A)$. Пусть $\vee(\pi_1 x | x \in a) \geqslant A \geqslant \wedge(\pi_1 y | y \in b)$; тогда $(b - a) \vee 0 \in \Pi(\pi_1) = \Pi(\pi_2)$, т.е. $\vee(\pi_2 x | x \in a) \geqslant \wedge(\pi_2 y | y \in b)$.
Это доказывает, что $g(A) \geqslant h(A)$. Предположим, что $f = g(A) - h(A) \neq 0$; найдется $c \in G_+$, для которого $0 \neq \wedge(\pi_2 z | z \in c) \leqslant f$. Это означает, что $c \notin \Pi(\pi_1)$, и для некоторого $b \in G$ выполнено $\wedge(\pi_1 y | y \in b) \leqslant A$, $\wedge(\pi_1 (y+z) | y \in b, z \in c) \leqslant A$, но тогда $\wedge(\pi_1 (y+z) | y \in b, z \in c) \nleqslant \vee(\pi_1 (x) | x \in a)$ для некоторого $a \in G$, $\vee(\pi_1 x | x \in a) \geqslant A$. Таким образом, $\wedge(\pi_1 (y+z-x) | x \in a, y \in b, z \in c) \nleqslant 0$, но $\wedge(\pi_2 (y+z-x) | x \in a, y \in a, z \in c) \leqslant 0$. Противоречие доказывает $g(A) = h(A)$.
Отображение $\sigma : A \longmapsto h(A) = g(A)$ искомое.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\pi : X \to \mathcal{Y}$, $\mathcal{Y}$ является ППР X. Эквивалентны следующие утверждения: 1) π сохраняет все грани; 2) $\Pi(\pi) = (a \in G_+ | \wedge(x | x \in a) = 0)$; 3) $\mathcal{Y}$ является дедекиндовым расширением X.

Естественным образом возникает вопрос: какова связь ППР X при $\Pi(\pi_1) \subset \Pi(\pi_2)$. Для решения этого вопроса будет полезна следующая лемма топологического характера.

ЛЕММА 2. Пусть $\mu_1 : Q_1 \to T$, $\mu_2 : Q_2 \to T$ — непрерывные сюръективные отображения из экстремально несвязных бикомпактов. Пусть выполнены следующие условия: 1) если F замкнуто в T, $\operatorname{int} \mu_1^{-1}(F) = \emptyset$, то $\operatorname{int} \mu_2^{-1}(F) = \emptyset$; 2) если W — непустое открытое множество в Q_2, то найдется замкнутое $F \subset T$, для которого $\emptyset \neq \operatorname{int} \tau_2^{-1}(F) \subset W$. В этом случае существует непрерывное $\mu : Q_1 \to Q_2$, для которого $\mu_2 \mu = \mu_1$.

С помощью этой леммы докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\pi_i : X \to Y_i$, причем Y_i – ППР X, $\Pi(\pi_2) \supset \Pi(\pi_1)$. Тогда существует отображение $\pi : Y_2 \to Y_1$, для которого $\pi_2 \pi = \pi_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считаем, что Y_i реализовано каноническим образом на соответствующем бикомпакте Q_i.

Пусть $u \in X_+$. Положим

$$(\pi_i(u))^* = \begin{cases} \frac{1}{\pi_i(u)}(t), & (\pi_i(u))(t) \neq 0, +\infty, \\ 1, & t \in \operatorname{int}(\pi_i(u))^{-1}(0). \end{cases}$$

Реализуем X минимальным образом так, чтобы элементу u соответствовала характеристическая функция; считаем, что $X \cong \cong X(Tu)$. Тогда существует непрерывное сюръективное отображение $\tau_i^u : cl(\pi_i(u))^{-1}(]0,+\infty[) \to Tu$, для которого $\pi_i(u) \cdot (x \circ \tau_i^u) \equiv \pi_i(x)$ на $cl(\pi_i(u))^{-1}(]0,+\infty[)$ при условии, что $x \in X(Tu)$. Но непосредственно проверяется, что для изображений τ_1^u, τ_2^u выполнены все условия леммы 2 и потому существует $\tau^u : cl(\pi_1 u)^{-1}(]0,+\infty[) \to cl(\pi_2 u)^{-1}(]0,+\infty[)$, $\tau_2^u \tau^u = \tau_1^u$.

Теперь выберем попарно-дизъюнктные открыто-замкнутые $E_\alpha \subset \subset (\pi_1(u_\alpha))^{-1}(]0,+\infty[)$ для некоторых $u_\alpha \in X_+$, $cl \bigcup E_\alpha = Q_1$. Зададим отображение $\pi : Y_2(Q_2) \to C_\infty(Q_1)$ следующим образом: $\pi(f) \equiv \equiv \{(f(\pi_2(u_\alpha))^* \circ \tau^{u_\alpha}\} \cdot (\pi_1 u_\alpha)$ на множестве E_α. Чтобы установить, что $\pi(f) \in Y_1(Q_1)$, достаточно доказать, что $\pi \pi_2(x) = \pi_1(x)$. Пусть $x \in X(Tu_\alpha)$. Тогда $(\pi_2 u_\alpha)^* \cdot \pi_2(x) \equiv \equiv x \circ \tau_2^{u_\alpha}$ на множестве $cl(\pi_2(u_\alpha))^{-1}(]0,+\infty[)$. Поэтому $((\pi_2(u_\alpha))^* \cdot \pi_2(x))\tau^{u_\alpha} \equiv x \circ \tau_1^{u_\alpha}$, т.е. $\pi \pi_2(x) \equiv \pi_1(x)$ на E_α.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 3 не гарантирует инъективность отображения π.

2. Π-дедекиндовое расширение ВР

Сформулируем основную задачу этой статьи: пусть в ВР выделено семейство Π наборов $a \subset G_+(X)$; требуется указать каноническое построение K-пространства Y, в которое вкладывается $X(\pi : X \to Y)$; более того, Y является ППР X и $\Pi(\pi) = \Pi$. В этом случае будем говорить, что Y есть Π-дедекиндово расширение X.

Из результатов п.I следует, что всегда можно предполагать, что семейство Π удовлетворяет по крайней мере условиям 1)–3).

Введем с помощью Π в семейство $G(X)$ (всех ограниченных наборов в X) отношение $(>)$ следующим образом: $a > b \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow (\wedge\{(y_n - x_n)_+ | x_n \in a,\ y_n \in b,\ n \leq \bar{n}\}) \in \Pi$.

Если $A \subset G(X)$, то $A^u = (b \in G(X) | B > a, a \in A)$ (т.е. A^u состоит из всех верхних границ множества A относительно отношения $(>)$). Через A^l обозначим семейство всех нижних границ A (относительно $(>)$).

Обозначим через $k(X,\Pi)$ семейство всех таких $A \subset G(X)$, что $A = A^{ul}$ и существует одноэлементный набор $\{x\} \in A^u$. Элементы $k(X,\Pi)$ упорядочены естественным образом по включению. Более того, $k(X,\Pi)$ является условно полным упорядоченным множеством. Введем в $k(X,\Pi)$ операцию сложения следующим образом: $A + B = (a + b | a \in A, b \in B)^{ul}$.

Стандартным образом устанавливается, что $k(X,\Pi)$ является упорядоченной полугруппой с нулевым элементом $\{0\}^{ul}$, в которую вкладывается ВР X с помощью отображения π, где $\pi(x) = \{x\}^{ul}$. Более того, $k(X,\Pi)$ является группой. Докажем это. Пусть $A \in k(X,\Pi)$. Рассмотрим $B = (B | -b \in A^u) \in k(X,\Pi)$. Проверим, что $A + B = \pi(0)$. $A + B \subset \pi(0)$ всегда выполнено. Пусть $C \in (A+B)^u$; докажем, что $c > \{0\}$. Фиксируем $e \in A$, тогда $e_1 = e + (-c) \in A$, аналогично $e_n = e + (-c) + \ldots + (-c) \in A$. Выберем $x \in X_+$, больший, чем элементы из наборов e, c. Пусть, кроме того, $\{x\} \in A^u$, тогда $(e_n + \{-x\}) \vee 0 \in \Pi$. Набор $((-c) - \{\frac{x}{n}\}) \vee 0$ минорирует набор $(e_{4n} + \{-x\}) \vee 0 \in \Pi$. По условию 3 имеем $(-c) \in \Pi$.

ТЕОРЕМА 4. $k(X,\Pi)$ является условно полной l-группой с делением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A \in k(X,\Pi)$. Рассмотрим $B = (\frac{1}{2}a | a \in A)^{ul}$, где $\frac{1}{2}a = (\frac{1}{2}x | x \in a)$. Докажем, что $B + B = A$. Для этого установим, что $(B+B)^u = A^u$. Пусть $g \in A^u; f, h \in \mathcal{B}$; имеем $g/2 \in (\frac{a}{2} | a \in A)^u$. Поэтому $\frac{g}{2} > f, h$. Пусть $x \in X_+$ $\{x\}$ и больше любого элемента из наборов f, h, g. Тогда $(f + h - g - \frac{\{x\}}{n}) \vee 0$ минорирует сумму, состоящую из $10n$ слагаемых вида $((f - \frac{g}{2})_+ + (h - \frac{g}{2})_+ \in \Pi$; по 3) $f + h < g$. Пусть $B \in (B+B)^u, a \in A$. Докажем, что $b > a$. Опять выберем $x \in X_+$, больший, чем элементы из a, b. Тогда $(a - b - \frac{\{x\}}{n}) \vee 0$ минорирует суммы $10n$ слагаемых вида

$(\frac{a}{2}-b)_+ + (\frac{a}{2}-b)_+ \in \Pi.$

ЗАМЕЧАНИЕ I. Теорема 4 позволяет ввести в $k(X,\Pi)$ умножение на число и получить K-пространство $k(X,\Pi)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как показывают примеры, K-пространство $k(X,\Pi)$ не обязано быть ШПР X, так как условие б) может быть невыполненным.

ТЕОРЕМА 5. Эквивалентны следующие утверждения: a) $k(X,\Pi)$ является Π-дедекиндовым расширением X; b) для Π выполнено условие 4; c) для $a \in G$ выполнено $a^{ul} = \Lambda(\tilde{\pi} x / x \in a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидны импликации $c) \to a) \to b)$. Для доказательства $b) \to c)$ достаточно получить, что если $a \in \Pi$, то $\Lambda(\tilde{\pi} x / x \in a) = 0$. Пусть $a \in \Pi$; найдется $u \geqslant x \in a$. Реализуем $X(u) = X(T)$, $k(X,\Pi)(\tilde{\pi} u) = C(Q)$; каноническое вложение задается отображением $\tau : Q \to T$. Остается установить, что $P_s = \operatorname{int} \tau^{-1}(\bigcap x^{-1}[\frac{1}{s}, 1] / x \in a) = \emptyset$. Предположим противное. Тогда пусть a_1 состоит из всех элементов $X_+(T)$, тождественно равных единице на $\bigcap(x^{-1}[\frac{1}{s}, 1] / x \in a)$. Тогда $a_1 \in \Pi$. Найдется $b \notin \Pi$, для которого $\{0\}^{ul} \subseteq b^{ul} \subseteq x_{P_s}$. Выберем $c \notin \Pi, q \geqslant 2$ из 4). При этом можно считать, что $u \geqslant z \in c$. Рассмотрим $x \in a_1$, $y \in c$. Тогда $\tilde{\pi}(y) = 0$ на P_s. Но, с другой стороны, $\{0\}^{ul} \not\subseteq c^{ul} \subseteq \tilde{\pi}(y) \cap b^{ul} \subseteq x_{P_s} \cap \tilde{\pi}(y) = \{0\}^{ul}$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\Pi_0 = (a \in G_+(X) / \Lambda(x / x \in a) = 0)$. Тогда $k(X,\Pi_0)$ совпадает с дедекиндовым расширением X.

Этот факт оправдывает термин "Π-дедекиндовое расширение" ВР.

3. Решение проблемы

Построим по индукции возрастающую последовательность $\{\mathcal{D}_n\}$ замкнутых нигде не плотных множеств в $I = [0,1]$ следующим образом: $\mathcal{D}_n = I \setminus \bigcup(\Delta_k^n / k \in N)$, где $\{\Delta_k^n\}$ - непересекающиеся интервалы, причем $\mu \bigcup_{k=1}^{n} (\Delta_k^n) = \frac{1}{4^n}$. Если $\mathcal{D}_n$ построен, то в каждом Δ_k^n выберем непересекающиеся интервалы $E(n,k,l)$, у которых $\mu \bigcup_{l=1} E(n,k,l) = \frac{\mu \Delta_k^n}{4}$. Тогда $\mathcal{D}_{n+1} = I \setminus \bigcup_{k,l} E(n,k,l)$.

Пусть K состоит из всевозможных замкнутых $F \subset I$ таких, что $F = [\alpha, \beta] \setminus \bigcup(\Delta_k^n / k \leq k(n), n \in N)$. Через P обозначим все замкнутые $H \subset I$, для каждого из которых существует набор $\{F_n\} \subset K$ такой, что $\mu(F_n \cap H) = 0$, $\mu(F_{n_1} \cap F_{n_2}) = 0$, и если $F \in K$, $\mu(F_n \cap F) = 0$, то $\mu(F) = 0$. Тогда P является идеалом замкнутых множеств, содержащим все множества меры нуль и все $\mathcal{D}_n$. Кроме того, если H замкнуто в I, $H \notin P$, $F \in P$, то найдется замкнутое $H_1 \subset H \setminus F$, $H_1 \notin P$.

Введем в $C(I)$ семейство Π, состоящее из $a \in G_+(C(I))$, у которых $\bigcap(x^{-1}[\frac{1}{s}, 1] / x \in a) \in P$ для любого натурального s. Тогда Π удовлетворяет условиям I)–4). В полученное K-пространство $k(C(I), \Pi) = C(Q)$ исходное $C(I)$ вкладывается с помощью $\tau: Q \to I$. Если W открыто в Q, то найдется замкнутое $H \subset I$, для которого $\emptyset \neq \operatorname{int} \tau^{-1}(H) \subset W$. Тогда $H \notin P$; в этом случае $H = I \setminus \bigcup]\alpha_n, \beta_n[$, где $\{]\alpha_n, \beta_n[\}$ попарно не пересекаются; найдется $F \in K$, $\mu F \neq 0$, $\mu(F \cap]\alpha_n, \beta_n[) = 0$. Получаем $F \notin P$, $\emptyset \neq \operatorname{int} \tau^{-1}(F) \subseteq W$. Из этого следует, что Q счетного типа.

Пусть $h_k^n = n$, $t \in \operatorname{cl} \tau^{-1} \Delta_k^n$, $h_k^n = 0$, $t \in Q \setminus \operatorname{cl} \tau^{-1} \Delta_k^n$. Тогда $\{h_k^n\}$ не ограничена в $C_\infty(Q)$. Занумеруем последовательность $\{h_k^n\} = \{g\varphi(n,k)\} = \{g(m)\}$.

Пусть $z_m \downarrow 0$. Докажем, что $\{z_m g(m)\}$ ограничена в $C_\infty(Q)$. Предположим противное. Найдется $F \in K$, для которого $\mu F > \frac{1}{p}$ и $\sup(z_m g(m))(t) = +\infty$ для $t \in \operatorname{int} \tau^{-1}(F)$. Каждое множество $T_n = \{k \in N / z(\varphi(n,k)) = z_m \geq \frac{1}{n}\}$ конечно, поэтому найдется $k(n) > k \in T_n$. По построению $\mu(\bigcup_{n > p}(\Delta_k^n / k \in N)) \leq \frac{1}{2^p}$, поэтому $\Phi = F \setminus \bigcup_{n > p}(\Delta_k^n / k \leq k(n)) \in K$ и не принадлежит P.

На непустом $\operatorname{int} \tau^{-1}(\Phi) \subseteq \operatorname{int} \tau^{-1}(F)$ выполнено $\sup(z_m g(m))(t) = +\infty$. Но, с другой стороны, $\{z_m(g(m)\}$ ограничено на $\operatorname{int} \tau^{-1}(\Phi)$. Действительно, пусть $m = \varphi(n,k)$. Если $n \leq p$, то $z_m g(m) \leq z_1 p$. Пусть теперь $n > p$. Если $k \geq k(n)$, то $z_m g(m) \leq 1$, а если $k < k(n)$, то $g(m) = h_k^n \equiv 0$ на $\operatorname{int} \tau^{-1}(\Phi)$. Противоречие доказывает, что $\{z_m g(m)\}$ – ограниченная в $C_\infty(Q)$.

Таким образом, $C_\infty(Q)$ – расширенное K-пространство счетного типа, но не K^+-пространство.

I. КОЛДУНОВ А.В. Решение одной старой задачи из теории полуупорядоченных пространств. – Изв. вузов. Математика, 1982, № 2(237), с.24-27.

2. ВУЛИХ Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. – М.: Наука, 1961.

Поступила 10.10.1985 г.