Выпуск 37(54) ОПТИМИЗАЦИЯ 1986 г.
Теория векторной оптимизации

УДК 513.88+512.25

К ТЕОРЕМЕ КУНА – ТАККЕРА В РАСШИРЕННЫХ K-ПРОСТРАНСТВАХ

В.А.Гейлер

К числу основных понятий векторных решеток относится введенное А.Г.Пинскером понятие расширенного K-пространства [I]. Опираясь на него и исходя из потребностей параметрического программирования, А.Г.Пинскер построил теорию линейной оптимизации в K-пространствах [2-5]. При этом оказалось, что основные теоремы линейного программирования почти дословно переносятся на случай расширенных K-пространств. Это обстоятельство находит свое объяснение в открытой Е.И.Гордоном глубокой связи между расширенными K-пространствами и полем вещественных чисел в булевозначных моделях теории множеств [6], благодаря которой удалось получить весьма широкое обобщение принципа сохранения соотношений (теорема 5 из [7]). Из упомянутой теоремы легко вывести теоремы А.Г.Пинскера о существовании решения задачи линейного программирования в K-пространствах, однако следует оговориться, что результаты А.Г.Пинскера дают и способы явного нахождения этого решения. Здесь нелишне отметить, что принцип сохранения соотношений в векторных решетках [I] носит имя А.И.Юдина – ученика А.Г. Пинскера, а конструкция булевозначных моделей близка к конструкции расширенного K-пространства в виде степени пространства вещественных чисел [8]. Цель настоящей заметки – распространить с помощью метода булевозначных моделей на случай расширенных K-пространств одну из основных теорем выпуклой оптимизации – теорему Куна – Таккера. Упомянутая выше теорема Е.И.Гордона не может быть применена ввиду налагаемых в ее ус-

ловии огреничений на использование функциональных переменных.

Далее $\mathscr{X}$ обозначает расширенное K-пространство с фиксированной единицей $\mathbf{1}$, тем самым в $\mathscr{X}$ фиксировано и умножение, превращающее его в решеточно-упорядоченное кольцо; $\mathscr{X}^n$ ($n \in N$) будем рассматривать как упорядоченный модуль над $\mathscr{X}$. Пусть B – булева алгебра всех единичных элементов $\mathscr{X}$. Отображение $f: \mathscr{X}^n \to \mathscr{X}$ называется операторно-выпуклым, если $f(a_1x_1+a_2x_2) \leq a_1f(x_1)+a_2f(x_2)$ $(x_i \in \mathscr{X}^n, a_i \in \mathscr{X}_+, a_1+a_2=1)$, и локальным, если равенство $ex_1 = ex_2$ $(e \in B, x_i \in \mathscr{X}^n)$ влечет $ef(x_1) = ef(x_2)$. Зафиксируем операторно-выпуклые локальные отображения f и g_i $(i=1,\ldots,m)$ из $\mathscr{X}^n$ в $\mathscr{X}$ и $b \in \mathscr{X}^m$.

Обозначим через $\mathscr{P}$ задачу выпуклой оптимизации: найти $\inf f(x)$ при условии $g_i(x) \leq b_i \ \forall i$. Элемент $x^* \in \mathscr{X}^n$ называется решением задачи $\mathscr{P}$, если $f(x^*) = \inf\{f(x): x \in \mathscr{X}^n, g_i(x) \leq b_i\}$ и $g_i(x^*) \leq b_i \ \forall i$. Отображение

$$L(x,y) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i(b_i - g_i(x)) \quad (x \in \mathscr{X}^n, y \in \mathscr{X}^m)$$

называется функцией Лагранжа для $\mathscr{P}$. Наконец, говорим, что $\mathscr{P}$ удовлетворяет условию Слейтера, если для некоторого $x \in \mathscr{X}^n$ выполняется $g_i(x) \ll b_i \ \forall i$, где $a \ll b$ означает, что для всех $0 \neq e \in B$ имеем $e(b-a) > 0$.

ТЕОРЕМА. Если $\mathscr{P}$ удовлетворяет условию Слейтера, то элемент $x^* \in \mathscr{X}^n$ тогда и только тогда является решением задачи $\mathscr{P}$, когда найдется такой $y^* \in \mathscr{X}^m_+$, что

$$L(x^*, y) \leq L(x^*, y^*) \leq L(x, y^*) \quad \forall x \in \mathscr{X}^n, y \in \mathscr{X}^m_+.$$

Для доказательства нам потребуется привести некоторые сведения о булевозначных моделях теории множеств, подробности можно найти в [6,7,9-11].

Всюду ниже $V^{(B)}$ – отделимая булевозначная модель теории множеств ZFC; если φ – формула ZFC, то $\|\varphi\|$ – ее булево значение истинности ($\|\varphi\| \in B$). Для любого $X \in V^{(B)}$ полагаем $X{\downarrow} = \{x \in V^{(B)} : \|x \in X\| = 1\}$; если $X \subset V^{(B)}$ и X – непустое множество, то $X{\uparrow} \in V^{(B)}$ определяется соотношениями $\operatorname{dom} X{\uparrow} = X$ и $\operatorname{rng} X{\uparrow} = \{1\}$. Отображение

$f: X\uparrow \to Y\uparrow$ называется экстенсиональным, если $\| x_1 = x_2 \| \leq$ $\leq \| f(x_1) = f(x_2)$ $(x_1, x_2 \in X\uparrow)$. Справедливы следующие утверждения (см., например, [9-II]).

ЛЕММА I. Если $\| \exists y\ \varphi(y) \| = 1$, то существует такое $t \in V^{(B)}$, что $\| \varphi(t) \| = 1$.

ЛЕММА 2. Пусть для некоторого $t \in V^{(B)}$ $\| \varphi(t) \| = 1$. Тогда $\| \forall x (\varphi(x) \to \psi(x)) \| = \wedge \{ \| \psi(t) \| : \| \varphi(t) \| = 1 \}$.

ЛЕММА 3. Если $g: X\uparrow \to Y\uparrow$ - экстенсиональное отображение, то $\| g\uparrow : X \to Y \| = 1$, и при этом для всех $x \in X\uparrow$ имеем $\| g\uparrow(x) = g(x) \| = 1$. (Здесь $X, Y \in V^{(B)}$, $\| X \neq \emptyset \| = \| Y \neq$ $\neq \emptyset \| = 1$.)

Приступим к доказательству теоремы. По теореме Е.И.Гордона [6,7] $\mathscr{K}$ канонически отождествляется с расширенным K-пространством $\mathcal{R}\uparrow$, где $\mathcal{R} \in V^{(B)}$ и $\| \mathcal{R}$ - поле вещественных чисел $\| = 1$. Отображения $f, g_1, \ldots, g_m$ отождествляются с отображениями из $(\mathcal{R}\uparrow)^n = \mathcal{R}^n\uparrow$ в $\mathcal{R}\uparrow$, которые в силу определения локальности оказываются экстенсиональными. Тогда из лемм 2 и 3 получаем, что $\| f\uparrow : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ - выпуклая функция $\| = \| g_i\uparrow : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ - выпуклая функция $\| = 1$ $(i = 1, \ldots, m)$. В силу определения порядка в $\mathcal{R}\uparrow$ [6] утверждения "$x \gg 0$ в $\mathcal{R}\uparrow$" и $\| x > 0$ в $\mathcal{R} \| = 1$ равносильны, поэтому из условия Слейтера для задачи $\mathcal{P}$ вытекает оценка

$$\| \exists x \in \mathcal{R}^n : g_1\uparrow(x) < b_1 \wedge \ldots \wedge g_m\uparrow(x) < b_m \| = 1.$$

Обозначим через $\mathcal{P}\uparrow_{(B)}$ задачу "обычного" выпуклого программирования внутри $V^{(B)}$: $\min f\uparrow(x)$ при условии $g_i\uparrow(x) \leq b_i$ $(i = 1, \ldots, m)$. Пусть $x^* \in \mathcal{R}^n\downarrow$, $y^* \in \mathcal{R}^m_+\downarrow$; обозначим через $\varphi(x^*)$ формулу языка ZFC : "x^* есть решение задачи $\mathcal{P}\uparrow$"; а через $\psi(x^*, y^*)$ формулу

$$\forall x \in \mathcal{R}^n\ \forall y \in \mathcal{R}^m_+\quad L\uparrow(x^*, y) \leq L\uparrow(x^*, y^*) \leq L\uparrow(x, y^*).$$

Тогда $\varphi(x^*) \leftrightarrow (\exists y^* \in \mathcal{R}^m_+) \psi(x^*, y^*)$ есть теорема ZFC (теорема Куна - Таккера), поэтому $\| (\exists y^* \in \mathcal{R}^m_+) \psi(x^*, y^*) \| =$ $= \| \varphi(x^*) \|$. Если x^* - решение $\mathcal{P}$, то из леммы 2 получаем, что $\| \varphi(x^*) \| = 1$, поэтому по лемме I найдется элемент

$y^* \in \mathcal{R}^m_+$, для которого $\|\Psi(x^*, y^*)\| = 1$. Последнее соотношение, с учетом леммы 3, дает неравенства для функции Лагранжа в теореме. Обратно, если выполнены эти неравенства, то по лемме 2 $\|\Psi(x^*, y^*)\| = 1$, откуда и $\|\varphi(x^*)\| = 1$. Воспользовавшись снова леммами 2 и 3, сразу получаем, что x^* – решение задачи $\mathcal{P}$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Применяя результаты §.5 из [9] (см. также [10]), теорему настоящей заметки легко распространить на случай, когда f и g_i заданы не всюду в $\mathcal{X}^n$, а лишь на некоторых операторно-выпуклых подмножествах $\mathcal{X}^n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. КАНТОРОВИЧ Л.В., ВУЛИХ Б.З., ПИНСКЕР А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. – М.–Л.: Гостехиздат, 1950.
2. ПИНСКЕР А.Г. Линейная оптимизация в упорядоченных пространствах. – Докл. АН СССР, 1978, т.242, № 5, с.1012-1015.
3. ПИНСКЕР А.Г. Общая задача линейного программирования в упорядоченных пространствах. – Усп. мат. наук, 1979, т.34, № 5, с.219-220.
4. ПИНСКЕР А.Г. Общая задача линейной оптимизации в K-пространствах. – Оптимизация, 1979, вып. 23(40), с.9-16.
5. ПИНСКЕР А.Г. Динамическая транспортная задача. – Экономика и мат. методы, 1983, т.19, № 2, с.363-367.
6. ГОРДОН Е.И. Вещественные числа в булевозначных моделях теории множеств и K-пространства. – Докл. АН СССР, т.237, № 4, с.773-775.
7. ГОРДОН Е.И. К теоремам о сохранении соотношений в K-пространствах. – Сиб. мат. журн., 1982, т.23, № 3, с.55-65.
8. ПИНСКЕР А.Г. Пространства, порожденные вещественными функциями в частично упорядоченных множествах. – В кн.: Некоторые классы полуупорядоченных пространств. Л.: Изд-во ЛГУ, 1966, с.5-12.
9. КУСРАЕВ А.Г. Некоторые применения теории булевозначных моделей в функциональном анализе. – Новосибирск, 1982.– 42 с. (Препринт ИМ СО АН СССР, № 5).

IO. КУСРАЕВ А.Г. Булевозначный анализ двойственности расширенных модулей. - Докл. АН СССР, I982, т.267, № 5, с.I049-I052.
II. ЙЕХ Т. Теория множеств и метод форсинга. - М.: Мир, I973.

Поступила в ред.-изд. отдел
IO.II.I985 г.