Выпуск 37(54) ОПТИМИЗАЦИЯ 1986 г.
Численные методы

УДК 519.95

СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ ДЕКОМПОЗИЦИИ ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОТРАСЛЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

А.В.Кулинич

Основным недостатком использования декомпозиционного алгоритма Данцига - Вулфа при решении некоторых задач перспективного отраслевого планирования является необходимость выделения большого объема оперативной памяти для координирующей задачи, причем объем необходимой оперативной памяти заранее не предусмотрен. Поэтому при больших размерностях задач применение метода Данцига - Вулфа может стать в силу этого вообще невозможным.

В данной работе для решения возникающей координирующей задачи предлагается специальный алгоритм, который позволяет избавиться от указанного недостатка.

Рассмотрим задачу перспективного отраслевого планирования вида:

$$\sum_{\ell=1}^{L} \omega_\ell' z_\ell \to max, \tag{1}$$

$$\sum_{\ell=1}^{L} B_\ell z_\ell \leq b, \tag{2}$$

$$A_\ell z_\ell \leq p_\ell, \quad z_\ell \geq 0, \quad \ell = \overline{1,L}. \tag{3}$$

Здесь и далее прописными буквами обозначаются матрицы, строчными - векторы. A_ℓ - варианты модели отраслевого планирования, p_ℓ - соответствующие вариантам ресурсы и задания на производство продукции.

Соотношение (2) соответствует общим условиям, которые для рассматриваемой отраслевой задачи имеют вид:

$$B_1 = \begin{pmatrix} E_n \\ \vdots \\ \vdots \\ E_n \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ L-1 \end{matrix} \qquad B_p = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ E_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ p-1 \\ p \\ p+1 \\ \vdots \\ L-1 \end{matrix} \tag{4}$$

где E_n - единичная матрица, соответствующая по размерности вектору x_ℓ.

Не входя в детальное описание, рассмотрим алгоритм Данцига - Вулфа [I-3] для задачи (I)-(3).

Пусть x_ℓ^ν, $\nu = \overline{1, t_\ell}$, - вершины многогранных множеств $\mathcal{X}_\ell = \{x_\ell \geq 0, A_\ell x_\ell \leq a_\ell\}$, отвечающих локальным ограничениям подсистем (3), а x_ℓ^μ, $\mu = \overline{t_\ell + 1, s_\ell}$, - представители крайних лучей соответствующего конуса $K_{\ell} = \{x_\ell \geq 0, A_\ell x_\ell \leq 0\}$. Любая точка x_ℓ многогранного множества $\mathcal{X}_\ell$ представляется тогда в виде:

$$x_\ell = \sum_{k=1}^{s_\ell} u_\ell^k x_\ell^k, \quad \sum_{k=1}^{t_\ell} u_\ell^k = 1, \quad u_\ell^k \geq 0, \quad k = \overline{1, s_\ell}. \tag{5}$$

Координирующая задача сводится формально к вычислению таких линейных комбинаций базисных планов x_ℓ^k, которые удовлетворяют ограничениям (2) и оптимизируют целевой функционал (I).

В соответствии с (5) координирующая задача записывается в виде:

$$\sum_{\ell=1}^{L} \sum_{k=1}^{s_\ell} u_\ell^k (\omega_\ell' x_\ell^k) \to max, \tag{6}$$

$$\sum_{\ell=1}^{L} \sum_{k=1}^{s_\ell} u_\ell^k (B_\ell x_\ell^k) \leq b, \tag{7}$$

$$\sum_{k=1}^{s_\ell} d_\ell^k u_\ell^k = 1, \quad \ell = \overline{1, L}, \tag{8}$$

$$u_\ell^k \geq 0, \quad \ell = \overline{1, L}, \quad k = \overline{1, s_\ell}. \tag{9}$$

Здесь векторная строка $d_\ell = (d_\ell^1, \ldots, d_\ell^{s_\ell})$ состоит из нулей и единиц, причем единица соответствует крайним точкам множества $\mathcal{X}_\ell$, а ноль - представителям крайних лучей конуса $\mathcal{X}_\ell$.

Для решения координирующей задачи нет необходимости в информации о значениях всех коэффициентов линейной формы (6) и

компонент векторов условий (7). На первом шаге метода Данцига Вулфа необходим по крайней мере один базисный план для каждой подсистемы. Выбор вектора, подлежащего включению в координирующую задачу на очередной итерации, определяется решениями задач подсистем.

В силу специфики (4) ограничений (2) координирующую задачу можно выписать в виде:

$$cu \to max, \tag{10}$$

$$Z_1 u \le b, \tag{11}$$

$$Z_2 u = e, \tag{12}$$

$$u \ge 0, \tag{13}$$

где e - столбец соответствующей размерности из единиц, столбец $u=(u_1^1 \dots u_1^{s_1} \dots u_L^1 \dots u_L^{s_L})$, строка $c=(\omega_1' z_1^1 \dots \omega_1' z_1^{s_1} \dots \omega_L z_L^1 \dots \omega_L z_L^{s_L})$.

$$Z_1 = \begin{pmatrix} -z_1^1 \dots -z_1^{s_1} & z_2^1 \dots z_2^{s_2} & & & \\ -z_1^1 \dots -z_1^{s_1} & & z_3^1 \dots z_3^{s_3} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -z_1^1 \dots -z_1^{s_1} & & & & z_L^1 \dots z_L^{s_L} \end{pmatrix}$$

$$Z_2 = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & d_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & d_L \end{pmatrix}$$

В матрице Z_1 столбец z_ℓ^i есть i-й базисный план ℓ-й подсистемы. Матрица Z_2 соответствует специальным ограничениям координирующей задачи (8).

На каждой следующей итерации в матрице Z_1 координирующей задачи добавляется один новый столбец, который может иметь один из L видов (в зависимости от того, какой подсистеме этот столбец соответствует):

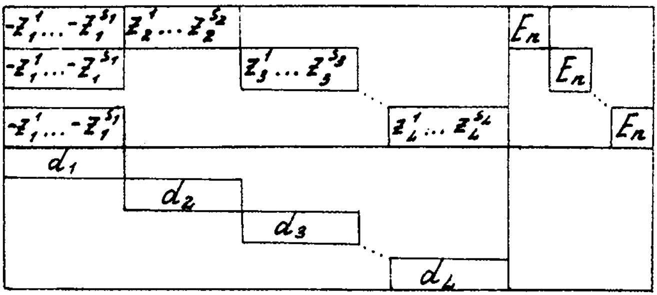
$$
\begin{pmatrix} -z_1^{s_1+1} \\ \vdots \\ -z_1^{s_1+1} \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} z_2^{s_2+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} 0 \\ z_3^{s_3+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots,
\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_L^{s_L+1} \end{pmatrix}
$$

В соответствующую строку d_ℓ матрицы $\mathcal{Z}_2$ добавляется 0 или I.

Будем рассматривать координирующую задачу в канонической форме, тогда задача (I0)-(I3) запишется в виде:

$$
\begin{aligned}
&\bar{c}\bar{u} \to \max, \\
&\mathcal{Z}\bar{u} = a, \qquad\qquad (I4)\\
&u \geq 0,
\end{aligned}
$$

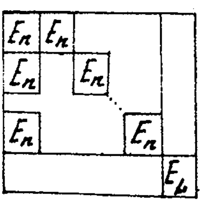
где $\bar{c} = (c, 0)$, $\bar{u} = (u, \lambda)$, $a = (b, e)$,

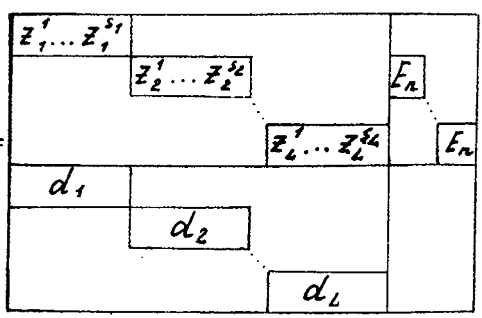
$\mathcal{Z} =$  (I5)

Матрицу $\mathcal{Z}$ представим в виде произведения двух матриц

$$\mathcal{Z} = H \cdot Q, \qquad (I6)$$

где

$H =$ 

$Q =$ 

Здесь размерность единичной матрицы E_n согласована с размерностью z_ℓ^i, матрица E_L имеет размерность L.

Заметим, что матрица H на всех итерациях метода Данцига – Вулфа остается постоянной, более того, H не меняется для всего класса задач вида (I)-(4). Всю содержательную информацию координирующей задачи несет матрица Q. Поэтому очевидно, что для выбора базисной матрицы Z_B в методе последовательного улучшения допустимого вектора [4,5] достаточно выбрать базисную матрицу Q_B в матрице Q. Тогда

$$Z_B = H \cdot Q_B . \tag{I7}$$

При решении задачи методом последовательного улучшения допустимого вектора к началу очередного шага предполагается, что коэффициенты разложения u_j, $j \in J$, столбца a по выбранному базису $\{z_j\}_{j \in J}$, где $Z_B = [z_1 \ldots z_J] = [Hq_1 \ldots Hq_J]$, неотрицательны.

На каждом шаге метода нужно вычислять обратную матрицу Z_B^{-1} для получения векторов g и y, являющихся решениями двух систем:

$$y \cdot Z_B = c_B , \tag{I8}$$

$$Z_B \cdot g = z_H . \tag{I9}$$

В системе (I8) c_B – строка коэффициентов целевой функции координирующей задачи (I4), соответствующих матрице Z_B. В системе (I9) z_H – j-й столбец матрицы Z, для которого

$$y \cdot z_H < c_j , \tag{20}$$

где c_j – j-й элемент строки $\bar{c}$. Если нет такого номера j, что неравенство (20) выполняется, то столбец

$$(u_1 \ldots u_J) = u_B = Z_B^{-1} \cdot a$$

является оптимальным решением.

Учитывая специфическую структуру (I7) матрицы Z_B, рассмотрим методы получения векторов y и g, не требующие вычисления матрицы Z_B^{-1} в той или иной форме.

Представим системы (I8),(I9) в виде:

$$y \cdot H \cdot Q_B = c_B , \tag{2I}$$

$$H \cdot Q_B \cdot g = z_H . \tag{22}$$

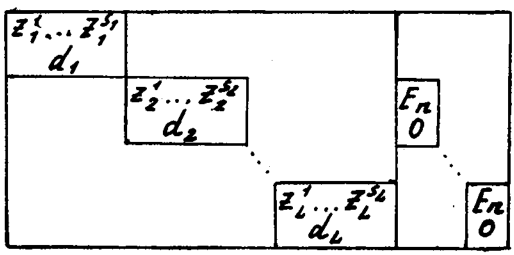
Заметим, что для проверки выполнения условия (20) нет необходимости вычислять y. Действительно, пусть z_H – некоторый столбец матрицы Z. В силу представления (16) имеем $z_H = H \cdot q_H$, где q_H – соответствующий столбец матрицы Q, и неравенство (20) представляется в виде:

$$y \cdot H \cdot q_H < c_j .$$

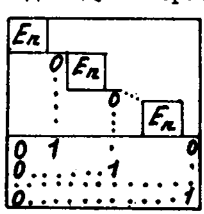
Поэтому для проверки выполнения этого неравенства достаточно вычислять строку $\omega = y \cdot H$ из системы

$$\omega \cdot Q_B = c_B . \tag{23}$$

Для удобства дальнейшего изложения переставим в матрице Q (а значит, и в матрице Q_B) последние L строк так, чтобы матрица имела вид:

$\bar{Q} =$ 

Такая перестановка равносильна представлению матрицы Q в виде $Q = R \cdot \bar{Q}$, где R – перестановочная матрица вида:

$R =$ 

Тогда

$$Q_B = R \cdot \bar{Q}_B = R \cdot \begin{pmatrix} \bar{Q}_B^1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{Q}_B^L \end{pmatrix} \tag{24}$$

Представим матрицы $\bar{Q}_B^k$, $k=\overline{1,L}$, в виде

$$\bar{Q}_B^k = \hat{Q}_B^k \cdot P^k, \quad k=\overline{1,L},$$

где $\hat{Q}_B^k$ - матрица с ортонормированными столбцами, P^k - верхняя треугольная матрица. Это означает, что $\bar{Q}_B = \hat{Q}_B \cdot P$, где

$$\hat{Q}_B = \begin{bmatrix} \hat{Q}_B^1 & & \\ & \ddots & \\ & & \hat{Q}_B^L \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} P^1 & & \\ & \ddots & \\ & & P^L \end{bmatrix}$$

Найдем для всех $k=\overline{1,L}$ матрицу $\hat{T}^k$, составленную из столбцов, дополняющих столбцы матрицы $\hat{Q}_B^k$ до ортонормированной базы.

Учитывая проведенные построения, определим теперь ω и y. Так как $Q_B = R \cdot \bar{Q}_B$, то

$$\omega \cdot Q_B = \omega \cdot R \cdot \bar{Q}_B = \bar{\omega} \cdot \bar{Q}_B,$$

где $\bar{\omega}$ получается из ω соответствующей перестановкой последних L элементов. При этом система $\bar{\omega} \cdot \bar{Q}_B = c_B$ распадается на L независимых блоков

$$\bar{\omega}_k \cdot \bar{Q}_B^k = c_k,$$

где c_k - соответствующая часть строки $c_B = (c_1, \ldots, c_L)$. Тогда строку $(\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_L) = \bar{\omega} = c_B \cdot \bar{Q}_B^{-1}$ можно найти следующим образом:

$$\bar{\omega}_k = c_k (P^k)^{-1} (\hat{Q}_B^k)' + \tau_k (\hat{T}^k)', \quad k=\overline{1,L}. \qquad (25)$$

Здесь τ_k, $k=\overline{1,L}$, - некоторые векторные параметры, определяющиеся однозначно (в силу однозначности определения y в (17)) из условия

$$y \cdot H \cdot S' = \omega \cdot S' = 0, \qquad (26)$$

где строки матрицы S образуют ортогональное дополнение к строкам матрицы H, которое в нашем случае легко найти:

$$S = \begin{bmatrix} E_n & \ldots & E_n & 0 \end{bmatrix}$$

Переставив в матрице S строки соответственно перестановке элементов в $\bar{\omega}$ и выделив в матрице $(\hat{T}^k)'$ последний столбец t_k так, что $(\hat{T}^k)' = [(\tilde{T}^k)' t_k]$, можем условие (26) преобразовать к другому виду.

Так как

$$\omega\cdot S'=\bar{\omega}\cdot R'\cdot S'=\bar{\omega}\cdot\bar{S}'=\sum_{k=1}^{L}\bar{\omega}_k\begin{bmatrix}E_n\\0\end{bmatrix}=$$

$$=\sum_{k=1}^{L}c_k(P^k)^{-1}(\hat{Q}_B^k)'\begin{bmatrix}E_n\\0\end{bmatrix}+\sum_{k=1}^{L}\tau_k\left[(\tilde{T}^k)'t_k\right]\begin{bmatrix}E_n\\0\end{bmatrix}=$$

$$=\sum_{k=1}^{L}c_k(P^k)^{-1}(\hat{Q}_B^k)'\begin{bmatrix}E_n\\0\end{bmatrix}+\sum_{k=1}^{L}\tau_k(\tilde{T}^k)'=$$

$$=\sum_{k=1}^{L}c_k(P^k)^{-1}(\hat{Q}_B^k)'\begin{bmatrix}E_n\\0\end{bmatrix}+\tau\begin{bmatrix}(\tilde{T}^1)'\\\cdots\\(\tilde{T}^L)'\end{bmatrix},$$

то вместо (26) получаем равенство для определения строки параметров $\tau=(\tau_1,\ldots,\tau_L)$:

$$\begin{bmatrix}(\tilde{T}^1)'\\\cdots\\(\tilde{T}^L)'\end{bmatrix}\cdot\tau=-\sum_{k=1}^{L}c_k(P^k)^{-1}(\hat{Q}_B^k)'\begin{bmatrix}E\\0\end{bmatrix}. \qquad (27)$$

Для вычисления столбца g в (22) проведем аналогичную процедуру. Причем заметим, что в силу симметричности (2I) и (22) для определения параметров необходимо будет вычислять ту же обратную матрицу, что и в (27).

Обозначив $Q_B\cdot g=v$, найдем v из уравнения

$$H\cdot v=H\cdot q_H.$$

Для этого представим столбцы v и q_H согласно разбиению матрицы H следующим образом:

$$\left[\begin{array}{c|cccc|c}-E_n&E_n&&&&\\-E_n&&E_n&&&\\\vdots&&&\ddots&&\\-E_n&&&&E_n&\\\hline &&&&&E_L\end{array}\right]\cdot\begin{bmatrix}v_0\\v_1\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|cccc|c}-E_n&E_n&&&&\\-E_n&&E_n&&&\\\vdots&&&\ddots&&\\-E_n&&&&E_n&\\\hline &&&&&\end{array}\right]\cdot\begin{bmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_L\\q_0\end{bmatrix} \qquad (28)$$

Здесь размерность векторов $v_0, q_1,\ldots,q_L$ согласована с размерностью матрицы E_n , а вектор q_0 имеет размерность, равную L .

Из (28) получаем

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_0 + q_2 - q_1 \\ v_0 + q_3 - q_1 \\ \cdots\cdots \\ v_0 + q_L - q_1 \\ 0 + q_0 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} v_0 + 0 \\ v_0 + q_2 - q_1 \\ \cdots\cdots \\ v_0 + q_L - q_1 \\ 0 + q_0 \end{pmatrix}$$

где v_0 - некоторый вектор параметров.

Так как $Q_B = R \cdot \bar{Q}_B$, где R - перестановочная матрица, $\bar{Q}_B$ - блочная матрица, то равенство $R \cdot \bar{Q}_B \cdot g = v$ можно представить в виде:

$$\bar{Q}_B \cdot g = R' \cdot v = \bar{v} = \begin{pmatrix} \bar{v}_0 + z_1 \\ \cdots\cdots \\ \bar{v}_0 + z_L \end{pmatrix}$$

где

$$\bar{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ q_0^1 \end{pmatrix}, \quad z_\ell = \begin{pmatrix} q_\ell - q_1 \\ q_0^\ell \end{pmatrix}, \quad \ell = \overline{2,L}.$$

Тогда система $\bar{Q}_B \cdot g = \bar{v}$ распадается на L независимых блоков

$$\bar{Q}_B^k \cdot g_k = \bar{v}_0 + z_k, \quad k = \overline{1,L}. \tag{29}$$

Для определения параметров v_0 воспользуемся следующим свойством ортогональности дополнений $\hat{T}^k$ матриц $\hat{Q}_B^k$:

$$(\hat{T}^k)'(\bar{v}_0 + z_k) = 0, \quad k = \overline{1,L}. \tag{30}$$

Так как $\bar{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$, то из (30) получаем окончательно

$$\boxed{\begin{matrix} (\tilde{T}^1)' \\ (T^2)' \\ \cdots \\ (T^L)' \end{matrix}} \cdot v_0 = - \boxed{\begin{matrix} (\tilde{T}^1)' z_1 \\ (\tilde{T}^2)' z_2 \\ \cdots \\ (\tilde{T}^L)' z_L \end{matrix}} \tag{31}$$

Заметим, что v_0 определяется однозначно из (31), так как в противном случае неоднозначно определяется g из системы (29).

Чтобы вычислить столбец $g = (g_1, \dots, g_L)'$, достаточно воспользоваться представлением матриц $\bar{Q}_B^k$ в виде произведения

матрицы с ортогональными столбцами Q_B^k на треугольную матрицу P^k. Тогда, не вычисляя обратную матрицу $\bar{Q}_B^{-1}$, получим окончательно

$$g_k = (P^k)^{-1}(\hat{Q}_B^k)'(\bar{v}_0 + z_k), \quad k = \overline{1, L}. \tag{32}$$

Следующий этап метода последовательного улучшения допустимого вектора состоит в определении номера p, для которого $g_p > 0$ и

$$\min_{g_k > 0} \left\{ \frac{u_B^k}{g_k} \right\} = \frac{u_B^k}{g_p},$$

где u_B^k - k-й элемент столбца u_B (отсутствие такого номера свидетельствует о неразрешимости задачи). После этого в базисной матрице Z_B столбец $z_p = Hq_p$ заменяется на столбец $z_H = Hq_H$. Соответственно в матрице Q_B столбец q_p заменяется на столбец q_H. Это означает, что в каждом блоке $\bar{Q}_B^k$ могут возникать следующие ситуации.

1. Один из столбцов в $\bar{Q}_B^k$ выбывает. При этом выбывающий столбец приписывается к матрице T^k.

2. В матрице $\bar{Q}_B^k$ добавляется новый столбец. При этом в матрице T^k вычеркивается столбец с максимальным по модулю коэффициентом в разложении нового столбца по столбцам матрицы $[T^k \bar{Q}_B^k]$.

3. Один из столбцов в матрице $\bar{Q}_B^k$ заменяется на новый. Этот случай является объединением 1 и 2.

Во всех трех ситуациях нет необходимости строить заново ортогональную матрицу $[\hat{T}^k \hat{Q}_B^k]$ и соответствующую треугольную P^k. Достаточно воспользоваться приемом пересчета, предложенным В.А.Булавским [6,7] и в работе [8].

Автор выражает благодарность В.А.Булавскому за полезные замечания и постоянный интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. БАГРИНОВСКИЙ К.А. Модели и методы экономической кибернетики.- М.: Экономика, 1973.
2. ДАНЦИГ Дж., ВУЛФ Ф. Алгоритм разложения для задач линейного программирования. - Математика, 1964, т.8, №1, с.151-160.

3. ДАНЦИГ Дж. Линейное программирование, его обобщения и применения. - М.: Прогресс, 1966.
4. КАНТОРОВИЧ Л.В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. - М.: Изд. АН СССР, 1959.
5. ЮДИН Д.Б., ГОЛЬШТЕЙН Е.Г. Линейное программирование. - М.: Физматгиз, 1959.
6. БУЛАВСКИЙ В.А. О разложении квадратных матриц в произведение ортогональной и треугольной. - Сиб. мат. журн., 1969, т.10, №2, с.472-474.
7. БУЛАВСКИЙ В.А. Метод ортогонализации в линейном программировании. - Оптимальное планирование, 1970, вып.15, с.7-21.
8. GILL P.E., Golub G.H., Murray W. Saunders. Methods for modifying matrix factorizations.- Math. Comp., 1974, v.26, N126, p.505-535.

Поступила в ред.-изд. отдел
22.10.1985 г.