Выпуск 37(54) О П Т И М И З А Ц И Я 1986 г.

Модели динамики и равновесия

УДК 519.95

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ МАГИСТРАЛИ В МОДЕЛЯХ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ НЕЙМАНА – ГЕЙЛА

О.И.Ведина

В моделях экономической динамики Неймана – Гейла большой интерес вызывает асимптотическое поведение траекторий различных классов. В настоящей работе исследуется асимптотическое поведение траекторий, имеющих средний темп роста α. Эти траектории представляют как самостоятельный, так и прикладной интерес: они позволяют в ряде случаев описать асимптотическое поведение оптимальных траекторий.

Базовым для всех последующих рассуждений является построение, описанное в [1, с.119]. Приведем его для облегчения чтения.

Пусть Z – выпуклый конус, лежащий в $R_+^n \times R_+^n$ и такой, что $Pr_2 Z \cap \operatorname{int} R_+^n \neq \emptyset$. Неймановским темпом роста конуса Z назовем число

$$\alpha = \sup_{(x,y)\in Z (x,y)\neq 0} \ \min_{i\in I} \frac{y^i}{x^i},$$

где $I=\{1,2,\dots,n\}$.

Последовательность $((x_k, y_k))$ элементов конуса Z назовем неймановской, если

$$\min_{i\in I} (y_k^i/x_k^i) \to \alpha.$$

Введем в рассмотрение множество индексов $I_Z \subset I$. Номер $i \in I_Z$ тогда и только тогда, когда найдется неймановская последовательность $((x_k, y_k))$ такая, что $y_k^i > 0$ $(k=1,2,\dots)$.

Пусть Z – модель Неймана – Гейла. Конус Z порождает конечную последовательность конусов $Z_1, Z_2, \dots, Z_N$ следующим

образом. Положим $Z_1 = Z$, обозначим $R_+^n = \Gamma_1$. Таким образом, $Z_1 \subset \Gamma_1 \times \Gamma_1$. Если $I^1 = I_{Z_1} = I$, то процесс окончен; если $I^1 \neq I$, то рассмотрим грань Γ_2 конуса R_+^n, натянутую на орты с номерами из $I \setminus I^1$, и определим Z_2 как проекцию конуса Z_1 на грань $\Gamma_2 \times \Gamma_2$ конуса $R_+^n \times R_+^n$. Если $I^2 = I_{Z_2} = I \setminus I^1$, то процесс окончен; в противном случае рассмотрим грань Γ_3 конуса R_+^n, натянутую на орты с номерами из $I \setminus (I^1 \cup I^2)$, и обозначим через Z_3 проекцию Z_2 на грань $\Gamma_3 \times \Gamma_3$ конуса $R_+^n \times R_+^n$. Если $I^3 = I_{Z_3} \neq I \setminus (I^1 \cup I^2)$, то строим конус Z_4, и т.д. Этот процесс закончится на некотором шаге N.

В результате у нас построены конусы Z_ν и множества индексов I^ν $(\nu = 1, 2, \dots, N)$, причем $I^\nu \cap I^{\nu'} = \emptyset$, $I^\nu = I_{Z_\nu}$ $(\nu \neq \nu')$. Через α_ν обозначим неймановский темп роста конуса Z_ν. Числа α_ν будем называть квазитемпами роста модели. Известно [2], что $\alpha_{\nu-1} > \alpha_\nu$.

Всюду ниже используется терминология [1-4].

Говорят, что задано состояние равновесия модели Z, если указаны положительное число α, процесс $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$ и функционал $\bar{p} \in (R_+^n)^*$ такие, что

$$\alpha \bar{x} \leq \bar{y};$$

$$\bar{p}(y) \leq \alpha \bar{p}(x) \quad \text{для всех} \quad (x, y) \in Z;$$

$$\bar{p}(\bar{y}) > 0.$$

Число α, фигурирующее в определении состояния равновесия, называется темпом роста модели Z. Каждый темп роста модели является квазитемпом, обратное утверждение неверно [1].

Говорят, что траектория X имеет средний темп роста α, если существует траектория φ_α двойственной модели вида:

$$\varphi_\alpha = (p, \alpha^{-1} p, \dots, \alpha^{-n} p, \dots),$$

согласованная с X.

Известно [4], что если для некоторого α существует траектория со средним темпом роста α, то α является квазитемпом роста модели.

Очевидно, для темпа роста α заведомо существует траектория со средним темпом роста α. В общем случае условия существования траекторий со средним темпом роста α описаны в [1, с.226].

Магистралью M_α называется (см.[3]) коническая оболочка множества всех предельных по угловому расстоянию точек всех траек-

торий со средним темпом α. Угловым расстоянием между точками x и y называется величина $\left\| \frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|} \right\|$.

Обозначим через $\mathcal{A}_Z$ коническую оболочку множества всех предельных по угловому расстоянию точек всех оптимальных траекторий.

В [3] приводятся условия, при которых $\mathcal{M}_\alpha \subset \mathcal{A}_Z$ и даже $\mathcal{M}_\alpha = \mathcal{A}_Z$.

В работе продолжено исследование связи множеств $\mathcal{M}_\alpha$ при различных α и множества $\mathcal{A}_Z$. Для непустой магистрали получены оценка сверху (следствие к лемме I), оценка снизу (лемма 2), а также при наличии некоторых условий более точная оценка снизу (следствие к теореме 2), позволяющая сделать вывод о том, что в достаточно широком круге случаев $\mathcal{M}_\alpha \subset \mathcal{A}_Z$ не только когда α - квазитемп, но и когда α - темп роста модели. Кроме того, показывается (теорема I), что если $\mathcal{M}_{\alpha_\nu}$ и $\mathcal{M}_{\alpha_\mu}$ непусты, то при $\nu < \mu$

$$\mathcal{M}_{\alpha_\nu} \subset \mathcal{M}_{\alpha_\mu}.$$

Примем следующие обозначения:

R^J - пространство, натянутое на орты с номерами из множества индексов J;

R^J_+ - положительный ортант пространства R^J.

Рассматривается правильная нормальная модель Неймана - Гейла $Z \subset R^n_+ \times R^n_+$, имеющая N квазитемпов, и двойственная к ней модель Z'.

ЛЕММА I. Для любого квазитемпа α_ν, любого числа $\lambda > \alpha_\nu$, любого индекса $i \in \bigcup\limits_\nu I_\mu$ и любой траектории $X = (x_t)$ существует предел

$$\lim \lambda^{-t} x^i_t = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, найдутся траектория $X = (x_t)$, квазитемп α_ν, число $\lambda_0 > \alpha_\nu$ и индекс $i_0 \in \bigcup\limits_\nu I_\mu$, для которых лемма неверна, т.е. $\overline{\lim}\, \lambda_0^{-t} x^{i_0}_t = c > 0$. Зафиксируем $\lambda_1 \in (\lambda_0^{-1}, \alpha_\nu^{-1})$. Опираясь на результаты [I,2,4], нетрудно показать существование цен p, удовлетворяющих следующим условиям:

$$(p, \lambda_1 p) \in Z',$$

$$\rho^i = 0 \quad \text{для любого } i \in \bigcup_1^{\nu-1} I_\mu,$$
$$\rho^i > 0 \quad \text{для любого } i \in \bigcup_\nu^N I_\mu.$$

Действительно, согласно теореме 2 [2] числа $\frac{1}{\alpha_\nu}$ и только они являются квазитемпами роста двойственной модели Z'. С другой стороны, по лемме I [4] для любого $\alpha: \frac{1}{\alpha_\nu} < \alpha < \frac{1}{\alpha_{\nu-1}}$ найдется функционал $\rho \in (R_+^n)^*$ такой, что

$$(\rho, \alpha\rho) \in Z',$$
$$\rho^i = 0 \quad \text{для любого } i \in \bigcup_1^{\nu-1} I_\mu,$$
$$\rho^i > 0 \quad \text{для любого } i \in \bigcup_\nu^N I_\mu.$$

Учитывая, что $\frac{1}{\alpha_\nu} < \frac{1}{\lambda_0}$ и $\lambda_1 \in (\frac{1}{\lambda_0}, \frac{1}{\alpha_\nu})$, получаем для λ_1 существование цен ρ с указанными свойствами.

Зададим последовательность $\varphi = (\rho_t)$, где $\rho_0 = \rho$, $\rho_t = \lambda_1 \rho_{t-1}$. Очевидно, φ является траекторией двойственной модели и, следовательно, $\rho_t x_t$ монотонно не возрастает с ростом t.

С другой стороны, предполагая, что лемма неверна, получаем

$$\rho_t x_t \geqslant \rho_t^{i_0} x_t^{i_0} = \lambda_1^t \rho_0^{i_0} x_t^{i_0} =$$
$$= \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0^{-1}}\right)^t \rho_0^{i_0} \lambda_0^t x_t^{i_0},$$

где $\frac{\lambda_1}{\lambda_0^{-1}} > 1$, $\lim \lambda_0^{-t} x_t^{i_0} = c > 0$. Следовательно, $\overline{\lim}\, \lambda_0^{-t} x_t^{i_0} = c > 0$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает лемму.

СЛЕДСТВИЕ. Для любой предельной по угловому расстоянию точки x любой траектории X со средним темпом $\alpha_{\nu-1}$ при $1 < \nu \leqslant N$ имеет место:

$$x^i = 0 \quad \text{для любого } i \in \bigcup_\nu^N I_\mu.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как квазитемпы монотонно убывают с ростом ν, то, применяя теорему при $\lambda = \alpha_{\nu-1}$, получаем доказательство следствия.

ЛЕММА 2. Если магистраль $\mathcal{M}_{\alpha_\nu}$ непуста, то любая точка x вида

$$x^i > 0 \quad \text{для любого} \; i \in \bigcup_{1}^{\nu-1} I_\mu, \qquad (1)$$
$$x^i = 0 \quad \text{для любого} \; i \in \bigcup_{\nu}^{k} I_\mu$$

содержится в магистрали $\mathcal{M}_{\alpha_\nu}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{x} \in R^n_+$ – произвольная точка, удовлетворяющая (1). Построим траекторию $X = (x_t)$ со средним темпом α_ν, для которой $\bar{x}$ будет предельной по угловому расстоянию точкой.

Напомним, что $\alpha_{\nu-1} > \alpha_\nu$. Зафиксируем число $\lambda \in (\alpha_\nu, \alpha_{\nu-1})$ и зададим последовательность положительных чисел β_k, монотонно сходящуюся к $+\infty$.

Поскольку $\lambda < \alpha_{\nu-1}$, то, как следует из определения квазитемпа, найдется точка $x \in R^n_+$, удовлетворяющая (1) и такая, что $(x, \lambda x) \in Z$.

Точки x и $\bar{x}$ имеют одни и те же ненулевые координаты, следовательно, при некоторых θ_1, θ_2 имеет место неравенство

$$\theta_2 x < \theta_1 \bar{x} < x. \qquad (2)$$

Зафиксируем $\tilde{\lambda} \in (\alpha_\nu, \lambda)$. Для каждого β_k найдем натуральное m_k, для которого выполняется неравенство

$$\theta_2 \left(\frac{\lambda}{\tilde{\lambda}}\right)^{m_k} > \beta_k .$$

Построим траекторию $X_1 = (y_t)$, имеющую среди своих предельных по угловому расстоянию точек точку $\bar{x}$. Опишем первый шаг построения. Положим

$$y_0 = x,$$
$$y_t = \lambda y_{t-1} \; \text{для любого} \; \overline{1, m_1 - 2} .$$

Очевидно, $y_t \in a(y_{t-1})$, так как $(x, \lambda x) \in Z$. Далее, положим

$$y_{m_1-1} = \theta_1 \lambda^{m_1-1} \bar{x},$$
$$y_{m_1} = \theta_2 \lambda^{m_1} x.$$

Поскольку имеет место (2), то

$$y_{m_1-1} \in a(y_{m_1-2}) \quad \text{и} \quad y_{m_1} \in a(y_{m_1-1}).$$

Опишем k-шаг построения. Положим

$$y_t = \lambda y_{t-1} \quad \text{при} \; \sum_1^{k-1} m_\ell + 1 \le t \le \sum_1^{k} m_\ell - 2,$$
$$y_t = \theta_1 \theta_2^{k-1} \lambda^t \bar{x} \quad \text{при} \; t = \sum_1^{k} m_\ell - 1,$$

$$y_t = \theta_2^{k-1}\lambda^t x \quad \text{при } t = \sum_1^k m_\ell .$$

Так как при $t = \sum_1 m_\ell$ точка y_t пропорциональна x, то, очевидно, $y_t \in a(y_{t-1})$ при $\sum_1 m_\ell + 1 \leq t \leq \sum_1^k m_\ell - 2$.
А поскольку выполнено (2), то $y_t \in a(y_{t-1})$ при $t = \sum_1^k m_\ell - 1$ и $y_t \in a(y_{t-1})$ при $t = \sum_1^k m_\ell$.

Итак, мы построили траекторию X, которая, как нетрудно видеть, имеет среди своих предельных по угловому расстоянию точек точку x.

Пусть теперь $X_2 = (\tilde{y}_t)$ – произвольная траектория со средним темпом α_ν. Как показано в [I], последовательность $X_3 = (\check{y}_t)$, где

$$\check{y}_t^i = 0 \quad \text{для любого } i \in \bigcup_1^{\nu-1} I_\mu ,$$

$$\check{y}_t^i = \tilde{y}_t^i \quad \text{для любого } i \in \bigcup_\nu^N I_\mu ,$$

также является траекторией модели со средним темпом α_ν.

Построим траекторию $X = (x_t)$, положив

$$x_t^i = \check{y}_t^i \quad \text{при } i \in \bigcup_\nu^N I_\mu ,$$

$$x_t^i = y_t^i \quad \text{при } i \in \bigcup_1^{\nu-1} I_\mu ,$$

или, что то же самое,

$$x_t = \check{y}_t + y_t .$$

Очевидно, X имеет средний темп α_ν. Поскольку $\tilde{\lambda} > \alpha_\nu$, то, как следует из леммы I,

$$\lim \tilde{\lambda}^{-t} x_t^i = 0 \quad \text{для любого } i \in \bigcup_\nu^N I_\mu .$$

С другой стороны, при $t = \sum_1^k m_\ell - 1$ выполняется

$$\tilde{\lambda}^{-t} x_t^i = \theta_1 \theta_2^{k-1} \left(\frac{\lambda}{\tilde{\lambda}}\right)^t \bar{x} =$$

$$= \frac{\theta_1}{\theta_2} \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} \prod_{\ell=1}^k \left[\left(\frac{\lambda}{\tilde{\lambda}}\right)^{m_\ell} \cdot \theta_2\right] x > \frac{\theta_1}{\theta_2} \cdot \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} \beta_k \bar{x} .$$

Тогда, так как $\beta_k \to +\infty$ и $\overline{\lim}\, \tilde{\lambda}^{-t} x_t^i = +\infty$ при $i \in \bigcup_1^{\nu-1} I_\mu$, то x является предельной по угловому расстоянию точкой для траектории $X = (x_t)$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА I. Если магистрали $\mathcal{M}_{\alpha_\nu}$ и $\mathcal{M}_{\alpha_\mu}$ непусты и $\nu < \mu$, то

$$\mathcal{M}_{\alpha_\nu} \subset \mathcal{M}_{\alpha_\mu}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X=(x_t)$ – произвольная траектория со средним темпом α_μ. Пусть, далее, $X_1=(\tilde{x}_t)$, где

$$\tilde{x}_t^i=0 \text{ для любого } i\in\bigcup_{1}^{\mu-1} I_e.$$

$$\tilde{x}_t^i=x_t^i \text{ для любого } i\in\bigcup_{\mu}^{N} I_e.$$

Очевидно, X_1 также является траекторией со средним темпом α_ν.

Пусть x – произвольная точка из $\mathcal{M}_{\alpha_\nu}$. По определению $\mathcal{M}_{\alpha_\nu}$ существует траектория $X_3=(y_t)$ со средним темпом α_ν, имеющая среди своих предельных по угловому расстоянию точек точку x.

Рассмотрим траекторию $X_4=X_1+X_3$. Очевидно, X_4 имеет средний темп роста α_μ. Положим $\tilde{y}_t=\tilde{x}_t+y_t$. По следствию к лемме I

$$\lim \alpha_\nu^{-t}\tilde{y}_t^i=0 \quad \text{для любого } i\in\bigcup_{\nu+1}^{N} I_e.$$

А поскольку $x\in\mathcal{M}_{\alpha_\nu}$, то

$$\lim \alpha_\nu^{-t}\tilde{y}_t>0 \quad \text{для любого } i: x^i>0.$$

Принимая во внимание, что

$$\tilde{x}_t^i=0 \ \forall i\in\bigcup_{1}^{\mu-1} I_e, \quad \text{для любого } t \text{ и } \nu<\mu,$$

получаем $x\in\mathcal{M}_{\alpha_\nu}$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть Z – правильная нормальная модель Неймана – Гейла. Пусть, далее, существует траектория X и бесконечное множество моментов времени $\mathcal{T}$ такие, что множество индексов $I=\{1,\dots,n\}$ можно разбить на три подмножества $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3$ следующим образом:*

$$x_t^i=0 \text{ для любых } i\in\mathcal{I}_1,\ t\in\mathcal{T}; \tag{3}$$

$$0<c_1\leq x_t^i\leq c_2<\infty \text{ для любых } i\in\mathcal{I}_2\ \ t\in\mathcal{T}; \tag{4}$$

$$\lim x_t^i=+\infty \text{ для любого } i\in\mathcal{I}_3. \tag{5}$$

Тогда для любой точки $x\in R_+^n$, удовлетворяющей условиям

$$x^i = 0 \quad \text{для любого} \quad i \in \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2, \tag{6}$$
$$x^i > 0 \quad \text{для любого} \quad i \in \mathcal{J}_3,$$

существует траектория X_1, удовлетворяющая условиям (3) – (5) и имеющая среди своих предельных по угловому расстоянию точек точку x.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x – произвольная точка из R^n_+, удовлетворяющая условиям (6). Доказательство теоремы заключается в построении траектории X_1 со свойствами (3)-(5), имеющей среди своих предельных по угловому расстоянию точек точку x. Примем следующие обозначения:

$\check{x}$ – проекция $x \in R^n_+$ на $R^{\mathcal{J}_1}$,

$\tilde{x}$ – проекция $x \in R^n_+$ на $R^{\mathcal{J}_2}$,

$\bar{x}$ – проекция $x \in R^n_+$ на $R^{\mathcal{J}_3}$.

Зададим последовательность положительных чисел $\psi_k < 1$, для которой имеет место

$$\prod_{t=1}^{\infty} \psi_t = c > 0.$$

Из множества моментов $\mathcal{T}$ выберем подмножество $\mathcal{T}_1 = \{t_1, \dots, t_m, \dots\} \subset \mathcal{T}$ такое, что

$$\tilde{x}_{t_{m+1}} \geq \psi_{t_m} \tilde{x}_{t_m} \quad \text{для любого} \quad t_m \in \mathcal{T}; \tag{7}$$

$$\forall t_m \in \mathcal{T}_1 \ \exists \lambda_{t_m} : \bar{x}_{t_m} \leq \lambda_{t_m} \bar{x} \leq \bar{x}_{t_{m+1}}. \tag{8}$$

Существование подобного множества вытекает из (4) и (5). Действительно, поскольку $\lim \bar{x}^i_t = +\infty$ и точки $\bar{x}_{t_m}$ и $\bar{x}$ имеют одни и те же ненулевые координаты, то существует $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ такое, что для любого $t \in \mathcal{T}'$ выполнено (8). Из условия теоремы вытекает, что последовательность $(\tilde{x}_t)$, где $t \in \mathcal{T}'$, имеет точку сгущения, лежащую в $\operatorname{int} R^{\mathcal{J}_2}_+$. Но тогда можно выбрать $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}'$, для которого выполнено (7) для любого из $t \in \mathcal{T}'$.

Для построения в качестве исходной возьмем траекторию $X = (x_t)$ из условия теоремы.

ШАГ I. Положим

а) $y_t = x_t$ для любого $t < t_2$;

б) $\check{y}_{t_2}=0,\ \tilde{y}_{t_2}=\tilde{x}_{t_2},\ \bar{y}_{t_2}=\lambda_1\bar{x}$.
Очевидно, $y_{t_2}\in a(y_{t_2-1})$, так как $y_{t_2}<x_{t_2}$.

ШАГ 2. Из свойств (6) и (7) траектории χ вытекает, что

$$\tilde{y}_{t_2}\geq\psi_1\tilde{x}_{t_1},\quad \bar{y}_{t_2}\geq\bar{x}_{t_2}.$$

Поскольку $\check{y}_{t_2}=\check{x}_{t_1}=0$ и $\psi_1<1$, то $y_{t_2}\geq\psi_1 x_1$, но тогда $\psi_1 a(x_{t_1})\subset a(y_{t_2})$. Это включение позволяет построить t_2+s_2 – кусок траектории χ_1, положив

а) $y_{t_2+\tau}=\psi_1 x_{t_1+\tau}$ для $\tau\in[1,s_2-1]$;

б) $\check{y}_{t_2+s_2}=0,\ \tilde{y}_{t_2+s_2}=\psi_1\tilde{x}_{t},\ \bar{y}_{t_2+s_2}=\lambda_2\psi_1\bar{x}$,

где $s_2=t_3-t_1$.

ШАГ k. Полностью повторяя рассуждения шага 2, положим

а) $y_{t_k+\tau}=\prod\limits_1^{k-1}\psi_\ell x_{t_k+\tau_{k-1}}$ для $1\leq\tau\leq s_k+k-3$;

б) $\check{y}_{t_k+s_k}=0,\ \tilde{y}_{t_k+s_k}=\prod\limits_1^{k-1}\psi_\ell\tilde{x}_{t_{k+1}},\ \bar{y}_{t_k+s_k}=\lambda_k\prod\limits_1^{k-1}\psi_\ell\bar{x}$,

где $s_k=t_{k+1}-t_1+k-2$.

Итак, мы построили траекторию $\chi_1=(y_t)$. Из построения следует, что x входит в число предельных по угловому расстоянию точек χ_1. Из построения также вытекает, что χ_1 обладает свойствами (3)-(5). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если существует траектория χ со средним темпом α_ν, удовлетворяющая условиям:

$$x_t^i=0 \quad \text{для любых } i\in\mathcal{I}_1 \text{ и } t\in\tau, \tag{3'}$$

$$0<c_1<\alpha_\nu^{-t}x_t^i<c_2<\infty \quad \text{для любых } i\in\mathcal{I}_2 \text{ и } t\in\tau; \tag{4'}$$

$$\overline{\lim}\,\alpha_\nu^{-t}x_t^i=+\infty \quad \text{для любого } i\in\mathcal{I}_3, \tag{5'}$$

то $R_+^{\mathcal{I}_3}\subset\mathcal{M}_{\alpha_\nu}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности в силу однородности модели Неймана – Гейла можем считать, что $\alpha_\nu=1$. Тогда, применяя теорему 2, получим требуемое. Следствие доказано.

Сделаем некоторые замечания, поясняющие смысл условий (3′)-(5′). Если существует траектория со средним темпом α_ν, то, очевидно,

$$\bigcup_{\nu+1}^{N} I_\mu\subset\mathcal{I}_1$$

и

$$\mathcal{J}_3 \subset \bigcup_1^{\nu} I_\mu .$$

Множество $\mathcal{J}_1$ может быть пустым.

С точки зрения следствия, совершенно несущественно, является α_ν темпом роста или нет, важно лишь выполнение условий $(3')$–$(5')$. В том случае, когда $\mathcal{J}_3 = \bigcup_1^{\nu} I_\mu$, следствие к теореме 2 не дает ничего нового по сравнению с результатом леммы 2.

Очевидно, что, когда α_ν – темп роста и существуют равновесные цены $p : p^i > 0$ для любого $i \in I_\nu$, то всегда

$$\mathcal{J}_3 = \bigcup_1^{\nu-1} I_\mu .$$

Можно показать, что когда α_ν не является темпом роста и существует траектория со средним темпом роста α_ν, то всегда

$$\mathcal{J}_3 \cap I_\nu \neq \emptyset . \tag{9}$$

В том случае, когда α_ν – темп роста, которому не соответствуют положительные на I_ν цены, выполнение (9) зависит от свойств конкретной модели. Укажем достаточно типичный случай, когда условия $(3')$–$(5')$ и (9) выполнены. Это, например, двумерная модель Z, состоящая из двух процессов:

$$(1,0) \longrightarrow (1,0) \quad \text{и} \quad (1,1) \longrightarrow (2,1).$$

Итак, мы получили оценку сверху для непустой магистрали $\mathcal{M}_{\alpha_\nu}$:

$$\operatorname{int} R_+^{\mathcal{J}'} \supset \operatorname{ri} \mathcal{M}_{\alpha_\nu} , \qquad \text{где } \mathcal{J}' = \bigcup_1^{\nu} I_\mu ;$$

оценку снизу:

$$R_+^{\mathcal{J}''} \subset \mathcal{M}_{\alpha_\nu} , \qquad \text{где } \mathcal{J}'' = \bigcup_1^{\nu-1} I_\mu ,$$

а также при выполнении условий $(3')$–$(5')$ более точную оценку снизу:

$$R_+^{\mathcal{J}_3} \subset \mathcal{M}_{\alpha_\nu} .$$

Очевидно, что для выполнения включения

$$R_+^{\mathcal{J}_3} \subset \mathcal{A}_Z$$

необходимо наличие каких-либо специальных свойств модели, например, $\mathcal{J}_3 \cap I_\nu = \emptyset$ или пересечение $I_\nu \cap \mathcal{J}_3$ состоит из одного индекса или других, т.е. магистраль в общем случае

может быть "большой", а именно: $\mathcal{M}_{\alpha_\nu} \not\subset \mathcal{A}_Z$ вне зависимости от того, является α_ν темпом роста или нет.

ЛИТЕРАТУРА

1. МАКАРОВ В.Л., РУБИНОВ А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. - М.: Наука, 1973.
2. ПАК О.И. Квазитемпы роста и ε-, δ-состояния равновесия в модели экономической динамики Неймана - Гейла. - Оптимизация, 1982, вып. 29(46), с.92-102.
3. РУБИНОВ А.М. Суперлинейные многозначные отображения и их приложения к экономико-математическим задачам. - Л.: Наука, 1980.
4. ПАК О.И. О предельном поведении различных классов траекторий в моделях Неймана - Гейла. - Оптимизация, 1983, вып. 31(48), с.128-136.

Поступила в ред.-изд. отдел
03.09.1985 г.