Выпуск 37(54) ОПТИМИЗАЦИЯ 1986 г.
Модели динамики и равновесия

УДК 330.115

АСИМПТОТИКА ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ОДНОЙ МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА. II

А.Я.Заславский

1. Рассмотрим производственное отображение $a:(R_+^2)^2 \longrightarrow \Pi((R_+^2)^2)$, где через $\Pi(R_+^n)$ обозначена совокупность всех непустых замкнутых подмножеств R_+^n, которое задается с помощью диагональной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 0 < v \leq 1,$$

и суперлинейных непрерывных функций $\varphi^i : R_+^2 \to R_+ \ (i=1,2)$ таких, что $\varphi^i(1,1) > 0$;

$$a(x) = \{y = (y^1, y^2) \in (R_+^2)^2 : 0 \leq y^k \leq Ax^k + d^k,$$
$$d^k \geq 0,\ d^1 + d^2 \leq (\varphi^1(x^1),\ \varphi^2(x^2))\},$$

где $x = (x^1, x^2) \in (R_+^2)^2$ [1].

В работе изучаются магистральные свойства траекторий отображения a, которое описывает двухпродуктовую модель экономической динамики. Отметим, что сейчас мы не требуем, чтобы φ^i обращались в ноль на границе конуса R_+^2. Обозначим через α неймановский темп роста отображения a. Предположим, что $\alpha > v$, существует состояние равновесия $(\alpha, (X, \alpha X), P)$ [2,3] такое, что $X, P \in K^2$, $P = (1, \rho, 1, \rho)$, где $K = \{z \in R^2 : z_i > 0\}$. Положим $c^i = \varphi^i(X^i)^{-1} X^i \ (i = 1,2)$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ. Для любой последовательности $(y_t)(t = 0, \pm 1, \ldots)$ такой, что $y_{t+1} \in a(y_t)$, $(\alpha P, y_t) = (P, y_{t+1}) > 0$, существуют числа

$\lambda_t^i \geq 0$ $(i=1,2,\ t=0,\pm 1,\ldots)$ такие, что $y_t^i = \lambda_t^i c^i$.

Рассмотрим матрицу $B=(b_{ij})$ $(i,j=1,2)$, где $b_{2i} = c^{i2}$, $b_{11}=(1+c^{11}v)^{-1}(c^{11}-vc^{12}c^{21})$, $b_{12}=(1+c^{11}v)^{-1}(c^{21}-c^{22}c^{21}v)$.

Так же, как предложение 7 [4], доказывается

ЛЕММА I. Пусть числа $\lambda_i, \Lambda_i \geq 0$, $x^i=\lambda_i c^i$, $y^i=\Lambda_i c^i (i=1,2)$, причем $y \in a(x)$, $(\alpha P, x) = (P, y)$. Тогда $B(\Lambda) = \lambda$.

СЛЕДСТВИЕ. $B(\Phi^1(X^1), \Phi^2(X^2)) = \alpha^{-1}(\Phi^1(X^1), \Phi^2(X^2))$.

Очевидно, что справедлива

ЛЕММА 2. Пусть $c^{11}-vc^{12}c^{21}+c^{22}(1+vc^{11})\neq 0$. Тогда существует базис в R^2, в котором оператор B либо имеет вид

$$\begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

где $|d| \neq \alpha^{-1}$, либо

$$\begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 1 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}.$$

Имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Если $c^{11}-vc^{12}c^{21}+c^{22}(1+vc^{11})\neq 0$, то магистралью отображения a является луч $\{\lambda X : \lambda \geq 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть l_1, l_2 – базис в R^2, о котором говорилось в лемме 2. Не ограничивая общности, считаем, что $l_1 = (\Phi^i(X^i))$. Рассмотрим произвольную траекторию (x_t) отображения a, имеющую средний темп роста α. Достаточно показать, что последовательность $\{\alpha^{-t}x_t\}$ стремится к лучу $\{\mathcal{L}X : \mathcal{L} \geq 0\}$. Обозначим через Ω множество предельных точек последовательности $\{\alpha^{-t}x_t\}$, а через Ω_1 – конус, порожденный Ω. Заметим, что Ω – ограниченное замкнутое множество, причем для любого $z \in \Omega$ выполняется

$$(P, z) = \lim (P, \alpha^{-t}x_t) > 0.$$

Пусть $y_0 \in \Omega$. По лемме I [4] существует последовательность (y_t) $(t=0,\pm 1,\ldots)$ такая, что $y_{t+1} \in a(y_t)$, $y_t \in \alpha^t \Omega$. Для любого целого t выполняется $(\alpha P, y_t) = (P, y_{t+1}) > 0$. В силу сделанного нами в начале работы

предположения, существуют числа $\lambda^i \geqslant 0$ ($i=1,2$) такие, что $y_0^i=\lambda^i c^i$ ($i=1,2$). Итак, для любого $y \in \Omega_1$ найдутся числа $\lambda^i(y) \geqslant 0, \gamma^i(y) \in R$ ($i=1,2$), для которых

$$y^i=\lambda^i(y)c^i (i=1,2),\ (\lambda^1(y),\lambda^2(y))=\gamma^1(y)l_1+\gamma^2(y)l_2.$$

Так как множество Ω ограничено, то ограниченным будет и множество $\{\gamma^i(y): y\in\Omega,\ i=1,2\}$.

Пусть $y \in \Omega$. По лемме I [4] существует последовательность (y_t) ($t=0,\pm1,\ldots$) такая, что $y_{t+1} \in a(y_t), y_t \in \alpha^t \Omega$ ($t=0,\pm1,\ldots$), $y_0=y$. Для $t=0,\pm1,\ldots,\ i=1,2$ положим $\lambda_t^i=\lambda^i(y_t),\ \gamma_t^i=\gamma^i(y_t)$. По лемме I имеем $B(\lambda_{t+1})=\lambda_t$. Предположим, что $\gamma_0^2 \neq 0$, матрица B в базисе $\{l_1,l_2\}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 1 & \alpha^{-1}\end{pmatrix}$$

Нетрудно видеть, что для любого целого t выполняются соотношения $\gamma_{t-1}^1=\gamma_t^2+\alpha^{-1}\gamma_t^1,\ \gamma_{t-1}^2=\alpha^{-1}\gamma_t^2$. Для $t=1,2,3$ имеем

$$\gamma_{-t}^1=t\alpha^{-t+1}\gamma_0^2+\alpha^{-t}\gamma_0^1,\quad \gamma_{-t}^2=\alpha^{-t}\gamma_0^2,$$

$$|\alpha^t\gamma_{-t}^1| \geqslant |t\alpha\gamma_0^2|-|\gamma_0^1| \to \infty \text{ при } t\to\infty,$$

что противоречит ограниченности множества $\{\alpha^{-t}\gamma_t^1: t=0,\pm1,\ldots\}$. Полученное противоречие доказывает неправильность нашего предположения.

Аналогично доказывается, что если матрица B в базисе $\{l_1,l_2\}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & d\end{pmatrix},$$

где $|d|=\alpha^{-1}$, то $\gamma_0^2=0$. Таким образом, в любом случае (X^1, X^2) пропорционален y_0. Предложение доказано.

2. Пусть строго суперлинейные функции Φ^i заданы формулой

$$\Phi^i(x)=\gamma_i x_1^{\mathcal{L}_i} x^{(1-\mathcal{L}_i)}\ (x\in R_+^2),\ \gamma_i>0,\ 0<\mathcal{L}_i<1,$$

т.е. являются функциями Кобба – Дугласа. Мы рассматриваем лишь такие параметры $\gamma_i, \mathcal{L}_i, V$, для которых неймановский темп рос-

та α отображения $\mathfrak{a}$ больше числа v. Заметим, что в этом случае в силу результатов [4] все предположения, сделанные в начале работы, выполняются. Из предложения 2 [I] следует справедливость соотношений:

$$\alpha(1,\rho)=A(1,\rho)=(1,\rho)^{i}\nabla\Phi^{i}(c^{i})\ (i=1,2). \tag{I}$$

Имеем

$$\begin{aligned} c^{11}&=\mathcal{L}_1(\alpha-v)^{-1},\ c^{12}=(1-\mathcal{L}_1)(\alpha\rho)^{-1},\\ c^{21}&=(\rho\mathcal{L}_2)(\alpha-v)^{-1},\ c^{22}=(1-\mathcal{L}_2)\alpha^{-1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Подставляя полученные формулы для c^{ij} в соотношение $1=\Phi^{1}(c^{1})=\Phi^{2}(c^{2})$ и затем исключая из него ρ, получим, что

$$\gamma_1^{\mathcal{L}_2}\gamma^{1-\mathcal{L}_1}f(\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2)(\alpha-v)^{-\mathcal{L}_2}\alpha^{\mathcal{L}_1-1}=1, \tag{3}$$

где $f(\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2)=\mathcal{L}_1^{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2}\mathcal{L}_2^{\mathcal{L}_2(1-\mathcal{L}_1)}(1-\mathcal{L}_1)^{(1-\mathcal{L}_1)\mathcal{L}_2}(1-\mathcal{L}_2)^{(1-\mathcal{L}_2)(1-\mathcal{L}_1)}$.

Имеет место

ЛЕММА 3. $c^{11}-vc^{12}c^{21}+c^{22}(1+vc^{11})=0$ тогда и только тогда, когда

$$\alpha=v(1-\mathcal{L}_1)(\mathcal{L}_1+1-\mathcal{L}_2)^{-1}. \tag{4}$$

В этом случае $\mathcal{L}_2>2\mathcal{L}_1$, $\gamma_1^{\mathcal{L}_2}\gamma^{1-\mathcal{L}_1}f_0(\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2,v)=1$, где f_0 – непрерывная функция, определенная для $v\in(0,1]$, $\mathcal{L}_i\in(0,1)$, $\mathcal{L}_2>2\mathcal{L}_1$:

$$f_0=f((v(1-\mathcal{L}_1)(\mathcal{L}_1+1-\mathcal{L}_2)^{-1})-v)^{-\mathcal{L}_2}(v(1-\mathcal{L}_1)(\mathcal{L}_1+1-\mathcal{L}_2)^{-1})^{\mathcal{L}_1-1}. \tag{5}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (2) имеем

$$c^{11}-vc^{12}c^{21}+c^{22}(1+vc^{11})=(\alpha-v)^{-1}\alpha^{-1}[\alpha(\mathcal{L}_1+1-\mathcal{L}_2)-v(1-\mathcal{L}_1)].$$

Первая часть леммы доказана. Вторая ее часть вытекает из соотношений $\alpha>v$ и (3).

Из предложения I и леммы 3 вытекает

ТЕОРЕМА I. Пусть не выполняется по крайней мере одно из двух следующих условий: (I) $\mathcal{L}_2>2\mathcal{L}_1$; (2) $\gamma_1^{\mathcal{L}_2}\gamma_2^{(1-\mathcal{L}_1)}f_0\cdot(\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2,v)=1$. Тогда магистраль отображения $\mathfrak{a}$ – луч.

Ниже приводится пример, показывающий, что можно подобрать числа $\mathcal{L}_i$, γ_i, v, для которых неймановский темп роста произ-

водственного отображения будет больше любого наперед заданного числа, магистраль его не является лучом и оно имеет неправильную оптимальную траекторию [4].

ПРИМЕР. Пусть $\nu \in (0,1]$, Δ – положительное число, значительно превосходящее ν. Так как $f_0(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2, \nu) \to 0$ при $\mathscr{L}_2 \to 1$, $\mathscr{L}_1 \to 0$, то найдутся числа $\gamma_i > 2\Delta$, $\mathscr{L}_i \in (0,1)$, $\mathscr{L}_2 > 2\mathscr{L}_1$ такие, что $\gamma_1^{\mathscr{L}_1} \gamma_2^{(1-\mathscr{L}_2)} f(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2, \nu) = 1$.

Рассмотрим отображение a, которое определяется параметрами $\mathscr{L}_i, \gamma_i, \nu$. Очевидно, что неймановский темп роста α отображения a больше Δ. Число α однозначно определяется из соотношения (3). Отсюда следует, что $\alpha = \nu(1-\mathscr{L}_1)(\mathscr{L}_1 + 1 - \mathscr{L}_2)^{-1}$.

Рассмотрим связанные с отображением a числа c^{ij} и матрицу B. По лемме 3 имеем

$$c^{11} - \nu c^{12} c^{21} + c^{22}(1 + \nu c^{11}) = 0, \qquad B^2 = \begin{pmatrix} \alpha^{-2} & 0 \\ 0 & \alpha^{-2} \end{pmatrix}.$$

Положим $l^1 = \alpha^{-1}(0,1)$, $l^2 = (l^{21}, l^{22}) = ((1+c^{11}\nu)^{-1} c^{21}(1 - c^{22}\nu), c^{22})$.

В силу (2) имеем $l^{21} > 0$. Нетрудно видеть, что $Bl^1 = \alpha^{-1} l^2$, $Bl^2 = \alpha^{-1} l_1$,

$$B(\alpha^2 l^{21}, \alpha^2 l^{22} + \nu) = (\nu l^{21}, \nu l^{22} + 1),$$

$$B(\nu l^{21}, \nu l^{22} + 1) = (l^{21}, l^{22} + \nu\alpha^{-2}).$$

По предложению 8 [4] имеем

$$(\alpha^2 l^{21} c^1, (\alpha^2 l^{22} + \nu) c^2) \in a(\nu l^{21} c^1, (\nu l^{22} + 1) c^2),$$

$$(\nu l^{21} c^1, (\nu l^{22} + 1) c^2) \in a(l^{21} c^1, (l^{22} + \nu\alpha^{-2}) c^2).$$

Рассмотрим траекторию отображения a, определенную формулами:

$$x_{2t} = \alpha^{2t}(l^{21} c^1, (l^{22} + \nu\alpha^{-2}) c^2),$$

$$x_{2t+1} = \alpha^{2t}(\nu l^{21} c^1, (\nu l^{22} + 1) c^2) \quad (t = 0, 1, \dots).$$

Очевидно, что эта траектория неправильна и оптимальна.

3. Рассмотрим случай, когда производственные функции $\Phi^i: R_+^2 \to R_+$ $(i=1,2)$ являются CES функциями, т.е.

$$\Phi^i(x) = \gamma_i [\delta_i (x^1)^{\rho_i} + (1-\delta_i)(x^2)^{\rho_i}]^{1/\rho_i},$$

$$\gamma_i > 0, \ 0 \neq \rho_i < 1, \quad \delta_i \in (0,1).$$

В силу неравенства Минковского, для $x, y \in R^2_+$ имеем

$$\Phi^i(x+y) \geqslant \Phi^i(x) + \Phi^i(y), \qquad (6)$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда x, y пропорциональны. Обозначим через $\alpha = \alpha(\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2, \rho_1, \rho_2, v)$ неймановский темп роста отображения a, порожденного функциями Φ^i. Положим

$$Q = \{\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2, \rho_1, \rho_2, v) : v \in (0, 1], \gamma_i > 0, \delta_i \in (0,1), \rho_i < 1\},$$

$$Q_1 = \{\Gamma \in Q : \rho_i < 0, \alpha(\Gamma) > v\}, \; Q_3 = \{\Gamma \in Q : \rho_1 > 0, \rho_2 < 0, \alpha(\Gamma) > v + \gamma_1 \delta_1^{1/\rho_1}\},$$

$$Q_2 = \{\Gamma \in Q : \rho_i > 0\}, \; Q_4 = \{\Gamma \in Q : \rho_1 < 0 < \rho_2, \alpha(\Gamma) > v, \gamma_2 \delta_2^{1/\rho_2}\}.$$

Рассмотрим набор $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2, \rho_1, \rho_2, v) \in Q_0 = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4$ (в дальнейшем рассматриваются лишь такие наборы) и связанное с ним отображение a, имеющее неймановский темп роста α. Существует обобщенное состояние равновесия $(\alpha, (X, \alpha X), P)$, где $X, P > 0$. По предложению 2 [I] для $i = 1, 2$ справедливы соотношения:

$$(\alpha P^i - AP^i, u) \geqslant \tau^i(P)\Phi^i(u) \; (u \geqslant 0), \; (\alpha P^i - AP^i, X) = \tau^i(P)\Phi^i(X^i) \qquad (7)$$

где $\tau^i(P) = max\{P^{1i}, P^{2i}\}$.

ЛЕММА 4. $\tau(P) \in K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2, \rho_1, \rho_2, v) \in Q_1$, то $\tau(P) \in K$ в силу результатов [4]. Пусть $\Gamma \in Q_2$. Существует $i = \{1, 2\}$ такое, что $\tau^i(P) > 0$. В силу (7) имеем $\alpha P^i - AP^i \in K$, $\tau(P) \in K$. Пусть $\Gamma \in Q_3$. Предположим, что $\Phi^2(X^2) = 0$. Тогда $X^{12} = X^{22} = 0$,

$$\alpha(X^{11} + X^{21}) = v(X^{11} + X^{21}) + \gamma_1 \delta_1^{1/\rho_1} X^{11}.$$

Отсюда вытекает, что $\alpha \leqslant v + \gamma_1 \delta_1^{1/\rho_1}$, что противоречит включению $\Gamma \in Q_3$. Следовательно, $\Phi^2(X^2) > 0$, $X^2 \in K$. Существует $i \in \{1, 2\}$ такое, что $\tau^i(P) > 0$. В силу (7) и строгой суперлинейности Φ^i имеем $\alpha P^i - AP^i \in K$, $\tau(P) \in K$.

Пусть $\Gamma \in Q_4$. Предположим, что $\Phi^1(X^1) = 0$. Тогда $X^{11} = X^{21} = 0$, $\alpha(X^{12} + X^{22}) = \gamma_2 \delta_2^{1/\rho_2} X^{22}$, $\alpha \leqslant \gamma_2 \delta_2^{1/\rho_2}$, что противоречит включению $\Gamma \in Q_4$. Следовательно, $\Phi^1(X^1) > 0$, $X^1 \in K$. Существует $i \in \{1, 2\}$ такое, что $\tau^i(P) > 0$. В силу

(7) и строгой суперлинейности Φ^i имеем $\alpha P^i - AP^i \in K, \, r(p) \in K$.
Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $y \in a(x), x > 0, (\alpha P, x) = (P, y)$. Тогда выполняется одно из следующих соотношений:

(I) $x \in K^2$; (2) $x^1 \in K, x^2 = 0$; (3) $x^1 = 0, x^2 \in K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 2 [I] справедливо равенство

$$(\alpha P^i - AP^i, x^i) = r^i(P)\,\Phi^i(x^i) \quad (i = 1,2). \tag{8}$$

Пусть $s, i \in \{1,2\}$ такое, что $x^{si} > 0$, $\{j\} = \{1,2\} \setminus \{i\}$.
Предположим, что $x^{sj} = 0$. Для любого $h > 0$ положим $x_h = (x_h^1, x_h^2) \in R^2$, где $x_h^i = x^{si}$, $x_h^j = x^{sj} + h$. В силу (7),(8) имеем

$$(\alpha P^s - AP^s) \geq h^{-1} r^s(P)\,(\Phi^s(x_h) - \Phi^s(x^s)).$$

Непосредственная проверка дает, что $h^{-1}(\Phi^s(x_h) - \Phi^s(x^s)) \to \infty$ при $h \to 0$. Полученное противоречие доказывает, что $x^{sj} > 0$.
Мы показали, что если $x^s > 0$, то $x^s \in K$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ I. $X \in K^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предыдущей лемме выполняется одно из следующих соотношений:

(I) $X \in K^2$; (2) $X^1 \in K, X^2 = 0$; (3) $X^1 = 0, X^2 \in K$.

Нетрудно видеть, что $\alpha > \nu$. Невозможность (2) очевидна.
Предположим, что имеет место (3). Тогда $\alpha X^{21} = \nu X^{21}$, $\alpha = \nu$.
Полученное противоречие доказывает следствие.

СЛЕДСТВИЕ 2. $P = (r(P), r(P))$.

В дальнейшем считаем, что $P = \{1, p, 1, p\}$. Положим $c^i = (\Phi^i(X^i))^{-1} X^i$ ($i = 1,2$). Имеем

$$\alpha(1,p) - A(1,p) = (1,p)^i \nabla \Phi^i(c^i) \quad (i = 1,2). \tag{9}$$

Из соотношений (8),(7) и неравенства Минковского (6) вытекает

ЛЕММА 6. Пусть $y \in a(x), (\alpha p, x) = (p, y)$. Тогда существуют числа $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ такие, что $\lambda_i c^i = x^i$.

Заметим, что все предположения, сделанные нами вначале работы, выполняются, и мы вправе воспользоваться предложением I, которое утверждает, что если $c^{11} - \nu c^{12} c^{21}(1c^{22}(1 + \nu c^{11}) \neq 0$, то магистраль отображения α есть луч.

Используя (9) и равенства $\Phi^i(c^i) = 1$, выразим c^{ij} через $\delta_k, \gamma_k, \rho_k, \rho, \alpha, \nu$. Получим

$$c^{11}=((\alpha-\nu)\delta_1^{-1}\gamma_1^{-\rho_1})^{1/\rho_1-1},\quad c^{12}=(\alpha\rho(1-\delta_1)^{-1}\gamma_1^{-\rho_1})^{1/(\rho_1-1)},$$

$$c^{21}=((\alpha-\nu)\rho^{-1}\gamma_2^{-\rho_2}\delta_2^{-1})^{1/(\rho_2-1)},\quad c^{22}=(\alpha\gamma_2^{-\rho_2}(1-\delta_2)^{-1})^{1/(\rho_2-1)} \tag{10}$$

Подставляя формулы для c^{ij} в равенства $\Phi^2(c^2)=1$, $\Phi^1(c^1)=1$, из первого соотношения выразим γ_2 через $\alpha, \nu, \delta_2, \rho_2, \rho$, а из второго – выразим ρ через $\alpha, \nu, \gamma_1, \delta_1, \rho_1$. В итоге получим

$$\gamma_2^{\rho_2/(\rho_2-1)}=\delta_2^{1/(1-\rho_2)}((\alpha-\nu)\rho^{-1})^{\rho_2/(\rho_2-1)}+(1-\delta_2)^{1/(1-\rho_2)}\alpha^{\rho_2/(\rho_2-1)}, \tag{11}$$

$$\rho^{\rho_1/(\rho_1-1)}=(1-\delta_1)^{1/(\rho_1-1)}\alpha^{\rho_1/(1-\rho_1)}\varkappa, \tag{12}$$

где $\varkappa=\varkappa(\alpha,\nu,\gamma_1,\rho_1,\delta_1)=\gamma_1^{\rho_1/(\rho_1-1)}-\delta_1^{1/(1-\rho_1)}(\alpha-\nu)^{\rho_1/(\rho_1-1)}$.

Заметим, что $\varkappa>0$. Из (11),(12) выразим γ_2 через $\alpha, \nu, \delta_i, \rho_i, \gamma_i$. Получим

$$\gamma_2^{\rho_2/(\rho_2-1)}=(\delta_2(\alpha-\nu)^{-\rho_2}(1-\delta_1)^{\rho_2/\rho_1}\alpha^{-\rho_2})^{1/(1-\rho_2)}\varkappa^{\rho_2(\rho_1-1)/(\rho_1(1-\rho_2))}+ \tag{13}$$
$$+((1-\delta_2)^{-1}\alpha^{\rho_2})^{1/(\rho_2-1)}.$$

Справедлива

ЛЕММА 7. Зафиксируем числа $\nu\in(0,1)$, $\delta_i\in(0,1)$, $\rho_i<1$, $\gamma_1>0$. С каждым числом $\gamma_2>0$ свяжем отображение $a(\gamma_2)$ и числа $c^{ij}(\gamma_2)$. Тогда множество

$$E=\{\gamma_2>0:(\gamma_1,\gamma_2,\delta_1,\delta_2,\rho_1,\rho_2,\nu)\in Q_0,$$

$$c^{11}(\gamma_2)-\nu c^{12}(\gamma_2)c^{21}(\gamma_2)+c^{22}(\gamma_2)(1+\nu c^{11}(\gamma_2))=0\}$$

не более чем счетно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma_2\in E$, $a=a(\gamma_2)$, $c^{ij}=c^{ij}(\gamma_2)$, $\alpha=\alpha(\gamma_2)$, $\rho=\rho(\gamma_2)$. Подставим в соотношение $0=c^{11}-\nu c^{12}c^{21}+c^{22}(1+\nu c^{11})$ формулы (10), выражающие c^{ij} через $\delta_k, \gamma_k, \rho_k, \rho, \alpha, \nu$; из полученного соотношения с учетом (13) выразим ρ через $\alpha, \nu, \gamma_1, \rho_i, \delta_i$. В итоге получим

$$\rho^{1/(1-\rho_2)-1/(1-\rho_1)}=G(\alpha)=const_1\alpha^{1/(1-\rho_1)-1/(1-\rho_2)}(\alpha-\nu)^{1/(1-\rho_2)}+$$

$$+const_2(\alpha^{-1}(\alpha-\nu))^{1/(1-\rho_2)-1/(1-\rho_1)}+const_3(\alpha-\nu)^{1/(1-\rho_2)-1/(1-\rho_1)}\alpha^{1/(1-\rho_1)}\cdot$$

$$\cdot\alpha^{\rho_2/(\rho_2-1)}+const_4(\alpha-\nu)^{-1/(1-\rho_1)+1}\alpha^{1/(1-\rho_1)}\alpha^{\rho_2/(\rho_2-1)}\varkappa(\alpha)^{\rho_2(\rho_1-1)/\rho_1(1-\rho_2)}$$

$$(const_i>0,\quad i=1,2,3,4). \tag{14}$$

Из (I2) вытекает, что

$$\rho^{1/(1-\rho_2)-1/(1-\rho_1)} = F(\alpha) = const_5\, \alpha^{(\rho_1-\rho_2)/(1-\rho_1)(1-\rho_2)}\, \varkappa(\alpha)^{(\rho_1-\rho_2)/(1-\rho_2)\rho_1}, \quad const_5 > 0.$$

Рассмотрим случай, когда $\rho_1 > 0$. Соотношение $\varkappa(\alpha) > 0$ равносильно соотношению $\alpha > V + \gamma_1 \delta_1^{1/\rho_1}$. Нетрудно видеть, что F, G – аналитические функции, определенные для $\alpha > V + \gamma_1 \delta_1^{1/\rho_1}$, причем

$$G(\alpha) \geqslant const_1\, \alpha^{(\rho_1-\rho_2)/(1-\rho_1)(1-\rho_2)} (\alpha - V)^{1/(1-\rho_2)},$$

$$F(\alpha) \leqslant const_6\, \alpha^{(\rho_1-\rho_2)/(1-\rho_1)(1-\rho_2)}$$

при достаточно больших α.
Нетрудно видеть, что множество чисел α таких, что $F(\alpha) = G(\alpha)$, не более чем счетно, а тогда в силу (I3) не более чем счетным будет и множество E.

Рассмотрим теперь случай, когда $\rho_1 < 0$. Соотношение $\varkappa(\alpha) > 0$ равносильно сотношению

$$\alpha < V + \gamma_1 \delta_1^{1/\rho_1}.$$

Нетрудно видеть, что F, G – аналитические функции, определенные для

$$\alpha \in (V, V + \gamma_1 \delta_1^{1/\rho_1}),$$

причем $\varkappa(\alpha) \to 0$ при $\alpha \to V + \gamma_1 \delta_1^{1/\rho_1}$; при α, достаточно близких к $V + \gamma_1 \delta_1^{1/\rho_1}$, выполняются соотношения

$$G(\alpha) \geqslant const_7\, \varkappa(\alpha)^{\rho_2(\rho_1-1)/\rho_1(1-\rho_2)},$$

$$F(\alpha) \leqslant const_8\, \varkappa(\alpha)^{(\rho_1-\rho_2)/(1-\rho_2)\rho_1}, \quad const_7, const_8 > 0.$$

Нетрудно видеть, что множество чисел α таких, что $F(\alpha) = G(\alpha)$, не более чем счетно, а тогда в силу (I3) не более чем счетным будет и множество E. Лемма доказана.

Из леммы 7 и предложения I вытекает

ТЕОРЕМА 2. Пусть числа $V \in (0,1), \delta_i \in (0,1), \rho_i < 1, \gamma_1 > 0$. Тогда множество чисел $\gamma_2 > 0$ таких, что $(\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2, \rho_1, \rho_2, V) \in Q_0$, магистраль $a(\gamma_2)$

не является лучом, не более чем счетно.

4. Рассмотрим диагональные матрицы A^i, у которых на диагонали стоят числа $v^{ij} \in [0,1]$ ($i,j=1,\dots,n$), строго суперлинейные функции $\Phi^i : R^n_+ \to R_+$ ($i=1,\dots,n$) такие, что $\Phi^i(x)>0$ тогда и только тогда, когда $x \in K$, где $K=\{x \in R^n : x^i > 0$ $(i=1,\dots,n)\}$, и отображение

$$a : (R^n_+)^n \to \Pi((R^n_+)^n),$$

определенное формулой

$$a(x)=\{y=(y^1,\dots,y^n) \in (R^n_+)^n : 0 \leq y^i \leq A^i x^i + d^i, \ d^i \geq 0,$$
$$\sum_i d^{ij} \leq \Phi^j(x^j) \ (j=1,\dots,n)\} \ (x=(x^1,\dots,x^n) \in (R^n_+)^n).$$

Обозначим через α неймановский темп роста отображения a. Считаем, что $\alpha > v^{ij}$ ($j,i=1,\dots,n$). Как показано в [4], отображение a имеет состояние равновесия $(\alpha(X,\alpha X), P)$, где $X, P \in K^n$, $P=(z,\dots,z)$, $z \in K$, причем для $i=1,\dots,n$, $y \in R^n_+$ справедливо соотношение

$$(\alpha z - A^i z, y) \geq z^i \Phi^i(y), \tag{15}$$

обращающееся в равенство тогда и только тогда, когда вектор y пропорционален X^i. Положим $c^i = (\Phi^i(X^i))^{-1} X^i$ ($i=1,\dots,n$). Обозначим через c_1 (c_2) матрицу, у которой на пересечении i-й строки и s-го столбца стоит число c^{si} (соответственно $v^{si} c^{si}$). Дальше считаем, что матрица c_1 обратима. Положим $B=c_1^{-1}(c_2+J)$, где J - тождественный оператор в R^n. Символом $\sigma(M)$ будет обозначаться спектр оператора $M : C^n \to C^n$, где C - поле комплексных чисел. Имеет место

ТЕОРЕМА 3. Пусть матрица c_1 обратима, все решения уравнения $B(\lambda)=\alpha\lambda$ пропорциональны вектору $(\Phi^i(X^i))$, причем $\sigma(B) \cap \{z \in C : |z|=\alpha\} = \{\alpha\}$. Тогда магистраль отображения a есть луч.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В пространстве C^n существует базис $l_1,\dots,l_n$, в котором оператор $B : C^n \to C^n$ имеет жорданову форму. Из условия теоремы вытекает, что оператор B имеет ровно одну клетку, соответствующую собственному числу α. Не ограничивая общности, считаем, что $l_1 = (\Phi^i(X^i))$. Рассмотрим произвольную траекторию (x_t) отображения a, имеющую средний темп

роста α. Достаточно показать, что последовательность $\{\alpha^{-t}x_t\}$ стремится к лучу $\{\mathcal{L}X : \mathcal{L} \geq 0\}$.

Обозначим через Ω множество предельных точек последовательности $\{\alpha^{-t}x_t\}$, а через Ω_1 - конус, порожденный Ω. Заметим, что Ω - ограниченное замкнутое множество, не содержащее ноль, причем для любого $z \in \Omega$ выполняется

$$(P, z) = \lim (P, \alpha^{-t}x_t) > 0.$$

Пусть $y_0 \in \Omega$. По лемме I [4] существует последовательность (y_t) $(t = 0, \pm 1, \ldots)$ такая, что $y_{t+1} \in a(y_t), y_t \in \alpha^{t}\Omega$ $(t = 0, \pm 1, \ldots)$. Для любого целого t выполняется соотношение $(\alpha P, y_t) = (P, y_{t+1}) > 0$. По предложению 9 [4] существуют числа $\lambda^i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ такие, что $y_0^i = \lambda^i c_i^i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Итак, для любого $y \in \Omega_1$ найдутся числа $\lambda^i(y) > 0, \gamma^i(y) \in C$ $(i = 1, \ldots, n)$, для которых

$$y^i = \lambda^i(y)c^i \;(i = 1, \ldots, n), \quad (\lambda^i(y)) = \sum_i \gamma^i(y) l_i.$$

Так как множество Ω ограничено, то ограниченным будет и множество $\{\gamma^i(y) : y \in \Omega, \; i = 1, \ldots, n\}$.

Пусть $y \in \Omega$. По лемме I [4] существует последовательность (y_t) $(t = 0, \pm 1, \ldots)$ такая, что $y_{t+1} \in a(y_t)$, $y_t \in \alpha^t \Omega$ $(t = 0, \pm 1, \ldots)$, $y_0 = y$. Для $t = 0, \pm 1, \ldots, i = 1, \ldots, n$ положим $\lambda_t^i = \lambda^i(y_t)$, $\gamma_t^i = \gamma^i(y_t)$. По предложению 9 [4] имеем $\lambda_{t+1} = B(\lambda_t)$ $(t = 0, \pm 1, \ldots)$. Пусть $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\gamma_0^i \neq 0$. Предположим, что l_i не является собственным вектором оператора B. Вектор l_i относится к некоторой жордановой клетке, соответствующей собственному числу Θ. Так как $\gamma_0^i \neq 0$, то и $\Theta \neq 0$. Не ограничивая общности, считаем, что не существует базисного вектора l_j, относящегося к той же жордановой клетке, что и l_i, для которого $j > i$, $\gamma_0^j \neq 0$. Нетрудно видеть, что для любого целого t выполняются соотношения $\gamma_{t+1}^i = \Theta \gamma_t^i$, $\gamma_{t+1}^{i-1} = \gamma_t^i + \Theta \gamma_t^{i-1}$.

Предположим, что $|\Theta| \geq \alpha$. Тогда

$$\gamma_t^i = \Theta^t \gamma_0^i, \quad \gamma_t^{i-1} = \Theta^t \gamma_0^{i-1} + t\Theta^{t-1}\gamma_0^i \quad (t = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$|\alpha^{-t}\gamma_t^{i-1}| \geq |\alpha^{-t}\Theta^{t-1}(t\gamma_0^i + \Theta\gamma_0^{i-1})| \geq (|\Theta|\alpha^{-1})^{t-1}\alpha^{-1}(t|\gamma_0^i| - \Theta|\gamma_0^{i-1}|) \geq$$

$$\geq \alpha^{-1}(t|\gamma_0^i| - \Theta|\gamma_0^{i-1}|) \xrightarrow[t \to \infty]{} \infty,$$

что противоречит ограниченности множества $\{\alpha^{-t}\gamma_t^{i-1} : t = 1, 2, \ldots\}$.

Следовательно, $|\theta| < \alpha$. Для $t = -1, -2$ имеем

$$\gamma_t^i = \theta^t \gamma_0^i, \quad |\alpha^{-t} \gamma_t^i| = \alpha^{-t} |\theta^t| |\gamma_0^i| = |\gamma_0^i| (\alpha |\theta|^{-1})^{-t} \xrightarrow[t \to -\infty]{} \infty,$$

что противоречит ограниченности множества $\{\alpha^{-t} \gamma_t^i : t = 0, \pm 1, \ldots\}$. Полученное противоречие доказывает, что l_i – собственный вектор опрератора B, $B l_i = \theta l_i$, где $\theta \in \sigma(B)$. Рассуждая так, как это было сделано выше, нетрудно показать, что $|\theta| = \alpha$. А тогда из условия теоремы вытекает, что $i = 1$, y_0 пропорционален вектору X. Теорема доказана.

Справедлива

ТЕОРЕМА 4. Пусть матрица C_1 обратима, причем выполняется по крайней мере одно из следующих условий:

(I) уравнение $B\lambda = \alpha\lambda$ имеет решение, не пропорциональное вектору $(\Phi^i(X^i))$;

(2) $\sigma(B) \cap \{z \in C : |z| = \alpha\} \neq \{\alpha\}$.

Тогда магистраль отображения a не является лучом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что существует вектор $g + if \in C^n$ $(g, f \in R^n)$, не пропорциональный вектору $(\Phi^i(X^i))$ такой, что $B(g + if) = \alpha e^{i\varphi}(g + if)$, где $\varphi \in R$. Для $n = 1, 2, \ldots$ имеем

$$B^n(g + if) = \alpha^n e^{in\varphi}(g + if), \quad B^n g = \alpha^n [(\cos n\varphi) g - (\sin n\varphi) f],$$

$$B^n f = \alpha^n [(\sin n\varphi) g + (\cos n\varphi) f].$$

Не ограничивая общности, считаем, что вектор f не пропорционален вектору $(\Phi^i(X^i))$. Выберем число $\varkappa > 0$, для которого выполняются соотношения:

$$\min_i \{\Phi^i(X^i)\} > 2\varkappa (\max_i |f_i| + \max_i |g_i|), \tag{I6}$$

$$\min_i \{\Phi^i(X^i)\} (\alpha - \max_{j,s} \{v^{js}\}) > 4\alpha\varkappa (\max_i |f_i| + \max_i g_i). \tag{I7}$$

Рассмотрим последовательность

$$B^t((\Phi^i(X^i)) + \varkappa f) = \alpha^t ((\Phi^i(X^i)) + \varkappa((\sin t\varphi) g + (\cos t\varphi) f)) =$$

$$= (\lambda_t^1, \ldots, \lambda_t^n) \quad (t = 0, 1, \ldots).$$

В силу (I6) имеем $\lambda^i > 0$ ($i = 1, \ldots, n$, $t = 0, 1, \ldots$), а в силу (I7) $\lambda_{t+1}^i \geqslant \nu^{ij} \lambda_t^i$ ($i, j = 1, \ldots, n$, $t = 0, 1, \ldots$). Положим $x_t^i = \lambda_t^i c^i$ ($i = 1, \ldots, n$, $t = 0, 1, \ldots$). По предложению 8 [4] имеем $x_{t+1} \in a(x_t)$, $(\alpha P, x_t) = (P, x_{t+1})$. Траектория (x_t) оптимальна. Нетрудно видеть, что существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{t_m\}$, для которой $\lim_{m \to \infty} \cos t_m \varphi = 1$. Положим $(\theta_1, \ldots, \theta_n) = (\varphi^i(X^i)) + x f$. Легко видеть, что вектор $(\theta_1 c^1, \ldots, \theta_n c^n)$ принадлежит магистрали, но не пропорционален вектору X. Теорема доказана.

Автор благодарит А.М.Рубинова за полезные обсуждения и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. РУБИНОВ А.М. Об одной нелинейной модели леонтьевского типа.- Оптимизация, 1982, вып. 32(49), с.109-127.
2. РУБИНОВ А.М. Суперлинейные многозначные отображения и их приложения к экономико-математическим задачам. - Л.: Наука, 1980.
3. МАКАРОВ В.Л., РУБИНОВ А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. - М.: Наука, 1973.
4. ЗАСЛАВСКИЙ А.Я. Асимптотика оптимальных траекторий одной нелинейной модели леонтьевского типа. I. - Оптимизация, 1985, вып. 36(53), с.87-100.

Поступила в ред.-изд. отдел
03.09.1985 г.