ВВЕДЕНИЕ

Основой предлагаемой работы является обзор докладов и выступлений, сделанных на Второй Новосибирской школе по математической экономике, проходившей в Академгородке в октябре 1984 г. Достаточно подробно освещаются только те сообщения, которые соответствуют принятой авторами логической схеме изложения. В обзор включено также значительное число авторских результатов, имеющих прямое отношение к обсуждавшейся проблематике. Указанные обстоятельства позволяют рассматривать настоящую работу и как оригинальную научно-исследовательскую статью.

Наряду с сотрудниками Института математики СО АН СССР в работе Школы принимали участие представители следующих организаций: Вычислительного центра АН СССР, ВНИИ проблем организации и управления при ГКНТ СССР, Центрального экономико-математического института АН СССР, Института кибернетики АН УССР, Института математики и кибернетики АН ЛитССР и ряда других научных центров.

Содержание докладов и дисскуссий касалось, главным образом, таких направлений как экономическое равновесие и рационирование, теория игр и ее приложения к экономике, общественные блага и модели группового выбора. Основным предметом обсуждений была проблема совершенствования хозяйственного механизма и роль математических методов в решении этой проблемы. Участники Школы были единодушны в том, что магистральным направлением развития математической экономики следует признать исследования по взаимодействию (симбиозу) механизмов централизованного планирования и механизмов равновесного типа (в том числе и рыночных механизмов). Возникающие здесь задачи использования стабильных и гибких цен, распределения по труду и по потребности, рационирования и свободной торговли представляют собой важнейшие компоненты известной проблемы об оптимальном сочетании централизации и децентрализации. Необходимым условием успешного решения указанных задач является существенная интенсификация математических исследований в соответствующих областях теории игр, выпуклого анализа и математической экономики.

Не останавливаясь на выступлениях, излагаемых в основной части работы, отметим интересные доклады, посвященные таким перспективным направлениям как функционирование предприятий в условиях

смешанной системы управления, состоящей из "Центра" и "Рынка" (М.И.Левин, ВНИИ ПОУ при ГКНТ СССР), применение теории иерархических игр в анализе производственно-экономических систем, действующих в рамках жестких цен (В.П.Крутов, С.А.Отенко, В.И. Чеботару, ВЦ АН СССР), исследование сложных социально-экономических моделей, учитывающих налоговую систему, общественные блага и общественный выбор (А.С.Шаповалов, ВНИИ ПОУ при ГКНТ СССР), моделирование динамики распределения капитальных вложений средствами теории кооперативных дифференциальных игр (Н.Н. Данилов, Кемеровский госуниверситет). Достаточно полное освещение тематики этих и некоторых других выступлений содержится в соответствующих публикациях (см. библиографию в конце настоящей статьи).

Перейдем к краткому описанию содержания основной части работы. В первой главе исследуются некоторые проблемы теории экономического равновесия, связанные с использованием гибких цен для достижения эффективных состояний. Первый параграф этой главы посвящен обсуждению вопроса о необходимости и возможности использования моделей равновесного типа в планировании и управлении социалистической экономикой (Э.И.Вилкас), роли плана в стабилизации рыночного регулирования (В.С.Бубялис) и некоторым динамическим аспектам ценообразования (В.Э. Гералавичюс). Во втором параграфе исследуются обобщения понятия равновесия при меновых стоимостях (В.И.Данилов, В.И.Сотсков) и при наличии эффекта внешних влияний (В.М.Маракулин). В этой же главе излагаются условия существования равновесия, полученные В.М.Маракулиным для предложенной им континуальной модели обмена с внешними влияниями (§3) и результаты В.А.Васильева по некоторым вопросам существования, единственности и внутренней характеризации информационных равновесий (§4).

Основное содержание второй главы составляет изложение докладов В.М.Полтеровича об уравновешенных состояниях в задачах многокритериальной оптимизации (§1) и А.Н.Козырева об обратных функциях спроса и одновременном построении плана, цен и рентных оценок (§2). Здесь же приведены результаты С.Г.Коковина по некоторым вопросам выбора оптимальной стратегии обновления фондов (§3) и сообщение А.А.Джалилова об операторах агрегирования, сохраняющих экстремальные свойства сбалансированных распределений (§4). В конце второй главы излагается доклад Е.А.Нурминского об экономической интерпретации декомпозиционных алгоритмов.

Третья глава целиком посвящена предложенным В.Л.Макаровым экономическим механизмам рационирования. В первых двух параграфах этой главы излагаются полученные В.Л.Макаровым и А.Я.Кирутой условия существания и эффективности согласованных состояний, в третьем – освещаются некоторые результаты В.Л.Макарова и В.А.Васильева по модели взаимодействия рыночного механизма и механизма рационирования.

Завершает работу четвертая глава, представляющая, в основном, изложение результатов по устойчивости некоторых социально-экономических процессов последовательного улучшения. Содержание ее первых двух параграфов составляет доклад В.А.Васильева, посвященный обобщенным решениям Неймана – Моргенштерна и достижимости ядер кооперативных игр. В третьем, заключительном параграфе излагаются результаты Г.Ю.Силкиной об асимптотической устойчивости монотонных траекторий обмена.

Авторы выражают признательность участникам Школы за предоставленные материалы и плодотворные обсуждения основных результатов предлагаемой работы.

ГЛАВА I. О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ ТЕОРИИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

Математическая теория экономического равновесия составляет ядро современной математической экономики и по праву считается одной из наиболее завершенных ее частей. Вместе с тем интерес к идее равновесия со стороны математиков и экономистов в последние годы не только не уменьшился, но и заметно возрос, что отчетливо проявилось и на Второй Новосибирской школе по математической экономике. По сравнению с Первой школой увеличилось число докладов, апеллирующих к идее равновесия, получила новое развитие привычная уже мысль о возможности использования моделей равновесного типа в планировании и управлении социалистической экономикой. В наиболее категоричной форме эта мысль была представлена в докладах Э.И.Вилкаса и В.С.Вубялиса, связывающих понятие равновесия с экономическими механизмами рыночного типа. При этом упор делался на необходимость использования таких механизмов для достижения эффективного состояния. Целым рядом авторов представлены математические конструкции, позволяющие распространить идеологию и технику равновесного анализа на игры многих лиц и нестандартные модели экономики, в том числе и бесконечные.

Интерпретация ряда результатов дана в том виде, в каком она излагалась в соответствующих выступлениях. Кроме того, нам хотелось, не разрушая идейного единства главы, сохранить авторские интонации каждого из докладчиков. В связи с этим внутри главы не достигнуто полной унификации терминологии.

§I. План и рынок

I.I. О необходимости и возможности использовиния равновесных цен. В настоящее время одной из наиболее актуальных задач математической экономики является изучение экономических механизмов с точки зрения их теоретической эффективности и практической реализуемости. Хотя практика показывает, что в экономике всегда одновременно действует несколько механизмов, регулирующих производство и распределение, наиболее важными среди них представляются механизмы, направленные на достижение равновесных цен. Роль равновесия, как известно, следует из теорем Г.Дебре об оптималь-

ности по Парето равновесных распределений экономики и о реализуемости оптимальных по Парето состояний при помощи равновесия. Исключительность роли равновесия в последнее время стала еще более очевидной с появлением теорем о необходимости равновесия цен для оптимальности по Парето состояний экономики, использующей денежные отношения. П. Наяк [67] доказал такую теорему для модели чистого обмена при стандартных предположениях теории равновесия, дополнительно потребовав дифференцируемости предпочтений. Несколько позднее Э. Вилкас доказал аналогичную теорему для модели с производством. Сформулируем этот результат несколько подробнее.

Пусть среди ресурсов производства и предметов потребления выделен труд, а бюджет потребителя α_i является функцией (кроме прочего) от его труда l_i. Если в экономике используются цены p, а состоянием является $(\hat{x}^i, \hat{l}_i, \hat{y}^k)$, то естественно считать, что $p \cdot \hat{x}^i = \alpha_i(\hat{l}_i)$ и $\sum\limits_i \alpha_i(\hat{l}_i) = \sum\limits_k p \cdot \hat{y}^k$. Кроме того, бюджетные функции в граничных точках совокупной технологии $(\hat{y}, \hat{l})$ должны удовлетворять неравенству

$$\alpha_i(l_i) - \alpha_i(\hat{l}_i) \leq q_i(l_i - \hat{l}_i),$$

где q_i – частные производные границы технологического множества по l_i в этой точке. Если при этом выполняются стандартные предположения модели Эрроу – Дебре, технология дифференцируема, предпочтения монотонны и хотя бы одно дифференцируемо, то неравновесность цен означает неоптимальность по Парето данного распределения, как только хотя бы один потребитель с дифференцируемым предпочтением кроме бюджета других ограничений в своем множестве потребления не имеет.

Таким образом, при использовании денежных отношений равновесность цен необходима, а вопрос о механизме обеспечения таких цен становится первостепенной проблемой. Эту проблему, конечно, надо решать совместно с проблемой определения бюджетов потребителей. Пока не известно другого практического механизма, приближающего к равновесию, кроме рынка. С другой стороны, известно, что в капиталистических странах рынок приводит к ряду общественно нежелательных явлений (монопольные цены, безработица и т.д.). Вопрос о последствиях использования рынка в социалистической экономике почти не исследовался, но, ввиду сказанного выше, имеет большое теоретическое и практическое значение. Наверняка можно найти такие формы рынка и такую политику воздей-

ствия на экономические рычаги (кредит, налоги и т.д.), что рынок с использованием преимуществ социализма окажется социально приемлемым эффективным экономическим механизмом. Выявлению роли плана в стабилизации рыночного регулирования посвящен излагаемый в следующем пункте результат В.Бубялиса. Такого типа результаты представляются чрезвычайно интересными.

Почти не исследованы проблемы совместного использования рынка и других механизмов, отличных от централизованного назначения планов, например контрактов между производителями и потребителями, государственных заказов и т.п. Еще больше трудных и интересных проблем в связи с равновесием (рынком) возникает в динамике, куда в этих условиях перемещается основная работа плановых и управленческих органов. Осмысление этих и подобных им проблем на уровне математических моделей кажется нам задачей чрезвычайной важности.

1.2. О сочетании плановой и рыночной экономик. Общеизвестно, что стандартная модель чисто рыночной экономики обладает рядом недостатков:

- имеет место множественность ситуаций равновесия;
- не обеспечивается сходимость к равновесию процесса "нащупывания";
- не обеспечивается непрерывность изменения равновесия при непрерывном изменении параметров экономики;
- если участники учитывают свое влияние на цены, то они заинтересованы в отклонениях от равновесия.

Оказывается, что от перечисленных недостатков можно избавиться путем введения в экономику плана.

Предлагаемая модель мало отличается от модели Эрроу – Дебре.

Потребитель $i \in M = \{1, \ldots, m\}$ характеризуется потребительским множеством $X_i \subseteq R^l$, функцией полезности $u_i : X_i \to R$ и начальной собственностью $w^i \in X_i$. Производитель $j \in N = \{1, \ldots, n\}$ характеризуется технологическим множеством $Y_j \subseteq R^l$. Кроме того, задана доля прибыли μ_{ij} производителя j, поступающая потребителю i.

Состояние экономики – это фактическое ($x^i \in X_i$) и плановое ($\bar{x}^i \in X_i - w^i$) потребление, определенное для каждого потребителя i, а также фактические и плановые производственные программы производителей $y^j, \bar{y}^j \in Y_j$ соответственно. Введем обозначения:

$$x=\sum_{i\in M} x^i, \quad \bar{x}=\sum_{i\in M} \bar{x}^i, \quad w=\sum_{i\in M} w^i,$$

$$y=\sum_{j\in N} y^j, \quad \bar{y}=\sum_{j\in N} \bar{y}^j.$$

Равновесием называется состояние экономики и цены $p\in R_+^\ell$, обладающие следующими свойствами:

1) план сбалансирован:

$$\bar{x}=\bar{y};$$

2) каждый производитель j максимизирует свою прибыль:

$$\alpha_j(y)=p\cdot(y^j-\bar{y}^j)^{*)};$$

3) каждый потребитель i максимизирует свою функцию полезности u_i на бюджетном множестве:

$$B_i(p)=\{x^i\in X_i \,/\, p\cdot x^i\leq p\cdot(w^i+\bar{x}^i)+\sum_{j\in N}\mu_{ij}\alpha_j(y)\};$$

4) экономика в целом сбалансирована:

$$x\leq y+w, \quad p\cdot x=p\cdot(y+w).$$

В [49] доказывается, что в экономиках чистого обмена равновесие единственно и процесс "нащупывания" сходится к нему, если начальные собственности достаточно близки к Парето-оптимальным. Следующую теорему можно рассматривать как обобщение этого результата.

ТЕОРЕМА I.I. *Пусть у всех потребителей множества потребления совпадают с положительным ортантом, функции полезности дважды дифференцируемы, строго квазивогнуты и кривые безразличия не имеют предельных точек вне множества потребления. Пусть технологические множества у всех производителей замкнуты, ограничены сверху и строго выпуклы. Если план*

---

*) Как и всюду, далее через $p\cdot x$ (иногда также через $\langle p, x\rangle$) обозначается скалярное произведение векторов p и x.

достаточно близок к Парето-оптимальному, то равновесие с таким планом единственно, процесс "нащупывания" сходится к нему и равновесие непрерывно зависит от плана, начальных собственностей и долей участия в прибылях.

I.3. Равновесные модели с непрерывным ценообразованием. К возникновению данной модели привели следующие соображения. Как известно, в обычных моделях равновесия управляющим параметром является цена, изменение которой свободно в некотором множестве (как правило, в симплексе). Однако в реальности очевидна тесная связь цены с себестоимостью (т.е. материальными и трудовыми производственными затратами) продукта. Исходя из этого, цена в предлагаемой модели – непрерывная функция ресурсов, вводимых в производство. Кроме того, модель обладает тем преимуществом, что многие известные модели являются ее частными случаями.

Заметим, что равновесие в предлагаемой модели в общем случае неоптимально по Парето. В этой ситуации налицо плохая согласованность цели производства и цен. Оказывается, что при достаточно разумном поведении производителя (когда ему лучше, если произведено больше) можно найти такую функцию цен, обеспечивающую существование равновесия, что любой равновесный спрос Парето-оптимален. Более того, если технологическое множество задано с помощью функции общественно необходимого труда, то такие цены равны нормированным дополнительным затратам общественно необходимого труда, осуществляемым при оптимальном производстве.

Рассматриваемая динамическая дискретная модель имеет вид:

$$\mathcal{E} = \langle N, T, G, W, \rho, \succcurlyeq_i^t, F_i^t \rangle,$$

где

$N = \{1, \ldots, n\}$ – множество потребителей,
T – количество рассматриваемых моментов времени,
$G \subseteq R^{T\ell}$ – компактное множество ресурсов,
$W: G \to 2^{R^{T\ell}}$ – замкнутое отображение производс...,
$\rho: G \to R^{T\ell}$ – непрерывная функция цен,

$\succcurlyeq_i^t(x)$ – предпочтение потребителя $i \in N$ на R_+^ℓ в момент времени t в состоянии $x \in G$,

$F_i^t : G \to R_+$ – непрерывная бюджетная функция потребителя в момент времени t.

Помимо стандартных требований выпуклости и непрерывности будем предполагать, что для каждого $i \in N$ и $t \in T$ отображение $\succcurlyeq_i^t : G \to 2^{R_+^\ell \times R_+^\ell}$ замкнуто. Кроме того, будем считать, что $W(G)$ – ограниченное множество и при этом для любых $x \in G$, $y, y' \in W(x)$ и $1 \leq t \leq T$ выполняются равенства:

$$\langle p^t(x), y(t) \rangle = \langle p^t(x), y'(t) \rangle ,$$

$$\sum_{i \in N} F_i^t(x) = \langle p^t(x), y(t) \rangle .$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пара $(\bar{x}, \bar{y})$ называется **общим равновесием** (ОР) модели $\mathcal{E}$, если $\bar{x} \in G$ и существуют $\bar{v}^i(t)$ $(i \in N, t = 1, \ldots, T)$ такие, что

1) $\bar{v}^i(t) \succcurlyeq_i^t(\bar{x})\, v^i(t)$, $\quad v^i(t) \in Q_i^t(\bar{x})$,

где $Q_i^t(\bar{x})$ – бюджетное множество $i \in N$ в момент t при ресурсах $\bar{x} \in G$;

2) $\bar{y} \in W(\bar{x})$;

3) $\sum_{i \in N} \bar{v}^i(t) \leq \bar{y}(t)$, $\ t = 1, \ldots, T$;

4) $\langle p^t(\bar{x}), \sum_{i \in N} \bar{v}^i(t) \rangle = \langle p^t(\bar{x}), \bar{y}(t) \rangle$, $\ t = 1, \ldots, T$.

Справедливы следующие теоремы существования.

ТЕОРЕМА 1.2. **Пусть в модели $\mathcal{E}$ выполнены следующие условия:**

1) $p^t(x) \in \operatorname{int} R_+^\ell$, $\ x \in G$, $\ t = 1, \ldots, T$;

2) **существует непрерывная функция** $f : \operatorname{int} R_+^{T\ell} \to \operatorname{int} R_+^{T\ell}$ **такая, что:**

а) $x \in \operatorname{int} R_+^{T\ell} \Rightarrow \check{x} \in G$, **где** $\check{x} = \left(\dfrac{x^k(t)}{f^{kt}(x)} \right)^+$;

б) **для множества** $\mathcal{U} = \{x \in \partial R_+^{T\ell} \mid \exists t\, [x(t) = 0\}$ **и любой последовательности** $\{x^s\}$, **для которой**

$$\lim x^s \in \partial R_+^{T\ell} \setminus \mathcal{U}, \quad x^s \in \operatorname{int} R_+^{T\ell}, \quad s = 1, \ldots,$$

выполняется соотношение:

$\inf f^{kt}(x^s) > 0, \quad k=1,\dots,\ell; \ t=1,\dots,T;$

в) для любой неограниченной последовательности $\{x^s\}$, для которой $\{\check{x}^s\}$ сходится, найдутся k и t такие, что $\lim \check{x}^{ks}(t) > 0$, а последовательность $x^{ks}(t)$ неограничена;

3) $[x \in G,\ x^k(t) = 0,\ y \in W(x)] \Rightarrow y^k(t) = 0.$

Тогда в модели $\mathcal{E}$ существует ОР.

ТЕОРЕМА I.3. Пусть в $\mathcal{E}$ выполнены условия:

I) $[x \in G,\ x^k(t) \geq 0] \Rightarrow \rho_k^t(x) > 0;\ x^k(t) = 0 \Rightarrow \rho_k^t(x) = 0;$

2) выполнено условие 2 теоремы I.2;

3) $F_i^t(x) > 0,\ x \in G,\ i \in N,\ t = 1,\dots,T.$

Тогда в модели $\mathcal{E}$ существует ОР.

Установим некоторые условия Парето-оптимальности ОР. Для большей простоты изложения рассмотрим статическую модель $\mathcal{E}$, когда $T = 1$.

Очевидно, что найти условия Парето-оптимальности равновесия для общей модели $\mathcal{E}$ чрезвычайно трудно. Но это удается для более частной модели $\mathcal{E}'$. Единственное, что отличает модель $\mathcal{E}'$ от $\mathcal{E}$ – это более конкретная форма отображения производства W':

$$W'(x) = \{\bar{y} \mid \theta(x,\bar{y}) = \max_{y \in H(x)} \theta(x,y)\} - \{K(x)\},$$

где $H(x),\ x \in G$ – выпуклое компактное технологическое множество, причем $H(G)$ ограничено, $\theta : G \times R_+^\ell \to R$ – непрерывная функция цели производителя, $K : G \to R_+^\ell$ – непрерывная функция накопления. Функция θ строго вогнута по y для каждого x, поэтому можно обозначить $W'(x) = y(x)_{max} - K(x)$, где $y(x)_{max} = \arg\max_{H(x)} \theta(x,y)$. Предполагается, что $y(x)_{max} \geq K(x),\ x \in G$.

Пусть, далее, $\partial H(x)$ – относительная граница $H(x)$ в R_+^ℓ, Π_ℓ – стандартный симплекс в R^ℓ.

ТЕОРЕМА I.4. Пусть в модели $\mathcal{E}'$ выполнены условия:

I) $\exists y \gg 0\ \forall x \in G\,[y \in H(x)]^{*)}$;

2) $\forall \bar{y} \in \partial H(x) \cap \operatorname{int} R_+^\ell$ существует единственный вектор $q(y) \in \Pi_\ell \cap \operatorname{int} R_+^\ell$ такой,

*) Здесь и далее $x \gg 0 \Leftrightarrow x \in \operatorname{int} R_+^\ell$

что $\langle q(\bar y),\bar y\rangle \geqslant \langle q(\bar y),y\rangle$ для всех $y\in H(x)$;

3) $\forall \bar y\in \partial H(x)\cap \partial R^l_+\ \forall x^s\to x,\ y^s\to \bar y$

$$[\forall s(y^s\geqslant 0,\ y^s\in \partial H(x^s))\Rightarrow \lim q(y^s)\geqslant 0];$$

4) технологическое отображение $H:G\to 2^{R^l_+}$ непрерывно по Какутани;

5) $[y',y''\in R^l_+,\ y'\geqslant y'']\Rightarrow[\forall x\in G(\theta(x,y')>\theta(x,y''))]$;

6) $[x\in G,\ x^k=0]\Longrightarrow[K_z(x)=y_z(x)_{max}]$.

Тогда существует функция цен $p(x)$, обеспечивающая существование такого ОР$(\bar x,\bar y)$, что равновесный спрос Парето-оптимален на множестве $\bar H(\bar x)=H(\bar x)-\{K(\bar x)\}$, и кроме того

$$\langle p(\bar x),\bar y\rangle=\max_{y\in \bar H(\bar x)}\langle p(\bar x),y\rangle.$$

Если множество $H(x)$ задано с помощью функции общественно необходимого труда

$$H(x)=\{y\,|\,h(x,y)\leqslant 0\},$$

то при некоторых стандартных условиях и функции цен

$$p_k(x)=\frac{h^k(x,y(x)_{max})}{\sum\limits_{k=1}^{l} h^k(x,y(x)_{max})},$$

где

$$h^k(x,y)=\partial h(x,y)/\partial y_k,\quad k=1,\dots,l,$$

остаются справедливыми все результаты теоремы I.4.

§2. Существование равновесия и обобщенные цены

Хорошо известно, что даже в простейших моделях экономики чистого обмена при выпуклых предпочтениях экономических агентов равновесие существует не всегда. Чтобы обеспечить его существование, нужны дополнительные условия невырожденности типа условия Слейтера, ресурсной связности, ненасыщаемости и т.п. (подробнее об этом см. в [3I]). Возникает естественный вопрос: имеем ли мы тут дело с кардинальным дефектом равновесного подхода или трудности вызваны неудачной, неадекватной математической формализацией интуитивного представления об эко-

номическом равновесии? Ко второму ответу на поставленный вопрос склоняются авторы работ [15,16], а также [17,35], результаты которых и составили основу настоящего параграфа.

2.1. Обобщенные цены. Понятие обобщенной цены используется в [15] при переносе понятия равновесия для случая кооперативных игр. По несколько иному поводу идея обобщенной цены высказывалась и раньше [17], но именно в [15] она оказалась напрямую связана с вопросом существования равновесия. Смысл этой идеи в расслоении, стратификации товаров и индивидов в иерархически организованные классы.

Напомним, что кооперативной игрой (без побочных платежей) называется система

$$\Gamma = (N, V),$$

где $N = \{1, \dots, n\}$ - множество игроков, а V - отображение, ставящее в соответствие каждой коалиции $S \subseteq N$ некоторое непустое замкнутое множество $V(S)$ в векторном пространстве R^S, т.е. арифметическом пространстве с координатами, соответствующими $i \in S$. Элементы $(x_i)_{i \in S}$ из $V(S)$ интерпретируются как достижимые коалицией S наборы полезностей ее членов.

В дальнейшем через x_S для вектора $x \in R^N$ обозначается его проекция на координатное пространство $R^S \subset R^n$. Символ e^S обозначает вектор из R^N с компонентами: $(e^S)_i = 1 (i \in S)$; $(e^S)_j = 0 (j \in N \setminus S)$.

Сбалансированной системой коэффициентов называется семейство $(\lambda_S)_{S \subseteq N}$ неотрицательных вещественных чисел такое, что $\sum\limits_S \lambda_S e^S = e^N$. Множество всех сбалансированных систем обозначим через Λ. Отметим, что для любого $x \in R^N$ выполнено $x = \sum\limits_S \lambda_S x_S$.

Для игры V через ΛV обозначим выпуклую оболочку множества $\sum\limits_S \lambda_S V(S)$ в R^N, где (λ_S) пробегает Λ. Игра V называется (сильно) сбалансированной, если $\Lambda V \subseteq V(N)$; в этом случае $\Lambda V \subseteq V(N)$. Иначе говоря, V сбалансирована, если множество $V(N)$ выпукло, и для любой сбалансированной системы коэффициентов (λ_S) выполняется включение $\sum\limits_S \lambda_S V(S) \subseteq V(N)$.

Перейдем теперь к понятию равновесия в кооперативной игре. Достижимым вектором полезностей, в зависимости от контекста,

естественно считать элемент множества $V(N)$ или ΛV. Так как полезность i-го игрока задается координатной функцией x_i, то линейный функционал ρ на R^N опорен к предпочтению i-го игрока тогда и только тогда, когда $\rho = \delta_i x_i$, где $\delta_i > 0$. Поэтому система "цен" p_i, нужная для задания равновесия в духе [51], определяется набором $\delta = (\delta_i)_{i \in N}$ положительных весов или коэффициентов решкалирования. Будем писать $\delta_s x = \sum_{i \in S} \delta_i x_i$.

Следуя [15], *равновесием* (соответственно *квазиравновесием*) в игре V будем называть пару (x, δ), где

а) $\delta \in R^N$ строго положителен,

б) $x \in V(N)$ (соответственно $x \in \Lambda V$),

в) для любого S и $y \in V(S)$ справедливо неравенство $\delta_S x \geq \delta_S y$.

Не вдаваясь в обсуждение этого определения, отметим только одно обстоятельство. А именно, требование строгой положительности весов далеко не безобидно и может быть причиной несуществования равновесия. Надо как-то компактифицировать множество весовых коэффициентов. Простейший и лежащий на поверхности способ состоит в том, чтобы δ был неотрицательным. Но тогда равновесный x может оказаться даже не индивидуально рациональным, так как при обращении в нуль некоторых весов δ_S для соответствующих коалиций S исчезнет условие в), т.е. $\delta_S (x-y) \geq 0$. Для преодоления этой трудности используется более тонкий способ компактификации, связанный с введением обобщенных цен. Смысл его состоит в том, что хотя δ_S обращается в нуль, сохраняется его направление и, следовательно, соответствующее ограничение в). Это оказывается возможным, так как вектор весов $\delta = (\delta_i)$ нужно знать только с точностью до умножения на положительное число.

Когерентной системой векторов (или обобщенными весами, или обобщенными ценами) называется семейство $(\delta_S)_{S \in N}$ ненулевых векторов $\delta_S \in R_+^S$ такое, что для любых $S \subset S'$ векторы δ^S и $(\delta^{S'})_S$ колинеарны*).

Например, если $\delta \in R_+^N$ – строго положительный вектор, то, полагая $\delta^S = \delta_S$, получаем когерентную систему; главное тут в том, что δ^S – ненулевые. Определение равновесия легко распространяется на обобщенные веса.

---

*) $(\delta^{S'})_S$ – сужение $\delta^{S'}$ на S.

Обобщенным равновесием в игре V называется дележ $x \in V(N)$ и когерентная система $\delta = (\delta^s)$ такие, что для любой коалиции S и $y \in V(S)$ справедливо неравенство $\delta^s x \geqslant \delta^s y$.

Очевидно, что обычное равновесие является обобщенным равновесием. Достоинство обобщенных равновесий связано с двумя свойствами: они принадлежат слабому ядру и "всегда" существуют.

ТЕОРЕМА 2.1 [15]. Если кооперативная игра сбалансирована и ограничена сверху, то обобщенное равновесие существует.

Под ограниченностью сверху здесь понимается существование положительного линейного функционала δ_0 на R^N и числа c таких, что для любого $x \in \Lambda V$ имеет место неравенство $\delta_0(x) \leqslant c$. Ограниченность игры, как и сбалансированность, не является необходимым условием существования равновесия, но близко к нему.

Наконец, нужно сказать о связи обобщенного равновесия с нечетким ядром [48]. Пусть дана игра V. Определим для вектора $\tau \in R^N_+$ (трактуемого как нечеткая коалиция) множество $\tilde{V}(\tau)$ как выпуклую оболочку множеств вида $\sum\limits_S \lambda_s V(S)$, где $\lambda_s \geqslant 0$ и $\sum\limits_S \lambda_s e^s \leqslant \tau$. Для сбалансированной игры $\tilde{V}(e^N) = V(N)$. Элемент $x \in V(e^N)$ принадлежит нечеткому ядру, если для любого $\tau \in R^N_+$ вектор $\tau x = (\tau_i x_i)_{i \in N}$ не принадлежит внутренности множества $\tilde{V}(\tau)$. Легко проверить, что обобщенное равновесие $\bar{x}$ принадлежит нечеткому ядру. (Обэн [48] устанавливает это для обычных равновесий.)

При некоторых дополнительных предположениях справедливо и обратное утверждение.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть V сбалансирована, и x принадлежит нечеткому ядру V. Тогда существует когерентная система (δ^s) такая, что $(x, (\delta^s))$ – обобщенное равновесие для V.

Так как нечеткое ядро непусто [48], теорема 2.2 следует из теоремы 2.1, доказательство которой имеется в [15].

2.2. Равновесие при меновых стоимостях.

Убедившись в полезности понятия обобщенных цен применительно к абстрактной кооперативной игре, естественно по-

пытаться использовать это понятие в экономических моделях. Это делается в [16] для обычной модели экономики чистого обмена и с некоторыми сокращениями воспроизводится ниже.

Чтобы подойти к нужному обобщению цены, рассмотрим простейший пример рынка, где обычные цены не дают равновесия. Это будет рынок двух товаров, на котором встречаются два торговца. Первый участник ценит лишь второй товар и безразличен к первому товару, его функция полезности u_1 имеет вид $u_1(x,y)=y$. Его начальный запас включает по единице первого и второго товара, $\omega^1=(1,1)$. Второй участник ценит оба товара, т.е. имеет функцию полезности $u_2(x,y)=x+y$, но владеет лишь первым, $\omega^2=(1,0)$. Пусть p и q - цены этих товаров. Если $p>0$, первый участник захочет продать свой первый товар и на вырученные деньги купить дополнительно p/q единиц второго товара, но этот товар отсутствует, поэтому цена $p>0$ не равновесная. Если же $p=0$, первый товар становится бесплатным, и его сколь угодно много запрашивает второй участник. Такая цена тоже не равновесна.

Дело в том, что когда стоимость товара падает до нуля и он становится бесплатным, цена уже не сдерживает спрос на этот товар. Неудача ценностного механизма в данном случае вызвана тем, что цены не способны обеспечивать плавное, непрерывное изменение бюджетных множеств, и происходит это при подходе к границе симплекса цен. Это говорит о необходимости ревизии понятия цены на границе - при "исчезновении" некоторых компонент цены. Мы хотим, чтобы цена обращалась в нуль, но ограничения оставались. Этого можно добиться, считая, что первый товар продается и покупается на какие-то "деньги", покупательная способность которых относительно второго товара нулевая.

Такое явление возвращает нас к понятию меновой стоимости, пропорциям обмена между товарами, с которых классики обычно и начинали анализ товарного хозяйства. Каждый товар как бы имеет стоимость в присущей ему валюте, но валюты могут оказаться имеющими разный уровень, и валюта более низкого уровня имеет нулевой обменный курс относительно более высокой. Можно говорить также об иерархических ценах. Конечно, это все абстрактные математические понятия, лишь в далеком пределе отражающие реальные процессы. Однако стоит отметить, что иерархия валют приводит к соответствующему расслоению участников.

Перейдем теперь к формальному определению меновой стоимости и равновесия в меновых стоимостях. Для этого зафиксируем конечное множество L видов товаров. Под набором товаров условимся понимать вектор из неотрицательного ортанта $X=\mathbb{R}^{\ell}_{+}$. Для каждых $j,k\in L$ зададим числа ρ_{jk}, указывающие пропорции, в которых товар вида k обменивается на товар j. Числа эти должны быть неотрицательны и могут принимать значения ∞. Кроме того, они связаны естественным соотношением

$$\rho_{jk}\rho_{k\ell}\rho_{\ell j}=1.$$

Если в этом соотношении какой-то сомножитель обращается в ∞, оно понимается в том смысле, что существует сомножитель, равный 0. Кроме того, $\rho_{jj}=1$ и, следовательно, $\rho_{jk}\rho_{kj}=1$.

Зафиксировав таким образом меновые стоимости, скажем, что $j\succcurlyeq k$, если $\rho_{jk}\neq\infty$. Легко видеть, что $\succcurlyeq$ – полное, рефлексивное и транзитивное отношение, упорядочивающее товары по различным уровням.

По меновой стоимости можно построить вектор цен ρ: фиксируем товар-соизмеритель j_0 и полагаем $\rho=(\rho_{j_0k})_{k\in L}$. При этом некоторые компоненты ρ могут обращаться в ∞. Чтобы избежать этого и работать с обычными векторами, для каждого множества $S\subset L$ определим вектор $\rho^{s}=(\rho^{s}_{j})\in\mathbb{R}^{S}_{+}$, полагая $\rho^{s}_{j}=\rho_{j_sj}$, где j_s – максимальный (относительно $\succcurlyeq$) элемент S. Тогда вектор ρ^{s} ненулевой и определен с точностью до умножения на положительное число. Кроме того, набор $(\rho^{s})_{S\subset L}$ удовлетворяет условию когерентности, введенному выше при определении обобщенных цен.

Таким образом, меновые стоимости можно задавать когерентной системой $\rho=(\rho^{s})_{S\subset L}$, которую называют также обобщенной ценой. Если норма всех ρ^{s} в ℓ-метрике равна единице, будем говорить о нормированной цене. Множество всех нормированных обобщенных цен обозначим через $\widetilde{\Delta}_{L}$ и назовем обобщенным симплексом или электоидом. Это замкнутое подмножество $\prod\limits_{S\subset L}\Delta_S$, где Δ_S – единичный симплекс в $\mathbb{R}^{S}_{+}$; снабдим $\widetilde{\Delta}_{L}$ индуцированной топологией. В терминах меновых стоимостей это означает, что две меновые стоимости близки, если близки пропорции ρ_{jk} и ρ'_{jk}.

Пусть теперь задан рынок с множеством участников N и товаров $L=\{1,\dots,\ell\}$. Каждый участник описывается отношением предпочтения $\succcurlyeq_i$ на $\mathbb{R}^{\ell}_{+}$ и вектором начальных запасов $\omega^{i}\in\mathbb{R}^{\ell}_{+}$.

Если интерпретировать ω^i как набор товаров, с которыми участник i выходит на рынок с ценами $p=(p^s)_{s<L}$, то в качестве бюджетного множества естественно взять

$$B(p,\omega^i)=\{x\in R_+^S \mid p^s x\leqslant p^s\omega^i\},$$

где

$$S=\{j\in L \mid \exists k,\ \omega_k^i>0\ \&\ k\geqslant j\}.$$

В частности, $S\supseteq supp\,\omega^i$ и $p^s\omega^i>0$. Иными словами, S - множество товаров, соизмеримых с ω^i, и торговец с номером i может купить любой набор товаров из R_+^s, стоящий по цене p^s не больше ω^i.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. М С - р а в н о в е с и е м называется набор $(p,x_i)_{i\in N}$, где $p\in\tilde{\Delta}_L$,

$$x^i\in h_i(p)=\{x\in B(p,\omega^i) \mid x\succ_i y,\ y\in B(p,\omega^i)\};\ i\in N,$$

и

$$\sum_{i\in I}x^i\leqslant\sum_{i\in I}\omega^i.$$

ТЕОРЕМА 2.3. Е с л и п р е д п о ч т е н и я $\succ_i$ н а R_+^l в ы п у к л ы и н е п р е р ы в н ы, т о М С - р а в н о в е с и е с у щ е с т в у е т.

Доказательство этой теоремы дано в [16] и следует обычной схеме. Сначала пространство R_+^l заменяется большим кубом $[0,N]^l$ и доказывается существование равновесия в этом кубе. Затем N устремляется к бесконечности и так как переменные x^i ограничены условием $\sum x^i\leqslant\sum\omega^i$, а обобщенный симплекс компактен, оказывается возможным перейти к пределу и получить настоящее равновесие. Решающий шаг доказательства состоит в том, что бюджетные множества торговцев непрерывно зависят от обобщенной цены.

В линейной модели обмена, когда функции полезности торговцев линейны, можно, видимо, в духе Гейла [57] чисто механически вычислять иерархию цен. Свяжем с участником i два множества: желательных для него товаров θ_i и имеющихся у него товаров Ω_i. Скажем, что товар j не ниже товара k ($j\succcurlyeq_0 k$), если существует торговец i такой, что $j\in\theta_i$ и $k\in\Omega_i$. Пусть $\succcurlyeq$ - транзитивное замыкание $\succcurlyeq_0$; по всей видимости [16], $\succcurlyeq$ - это и есть иерархический порядок равновесной обобщенной цены. Интересно также посмотреть, верно ли для МС-равновесий утверждение Гей-

ла об эквивалентности всех равновесных распределений.

Гипотезы о полноте и транзитивности отношений $\succ_i$ можно отбросить. Как видно из доказательства [16], нужно лишь, чтобы выбор участника из бюджетных множеств был выпуклозначным, непустым и полунепрерывно сверху зависел от бюджета.

МС-равновесие не обязательно оптимально по Парето. Связано это с тем, что каждый участник ориентируется только на себя, на свой начальный запас товаров w^i. Можно ли разумно организовать филантропию, чтобы равновесие было оптимально по Парето?

2.3. Равновесие при наличии эффекта внешних влияний. Термин "внешние влияния" применительно к модели обмена, означает, что уровень полезности экономических агентов определяется состоянием экономики в целом, а не только их собственным потреблением. Исследование моделей, обладающих этой особенностью, привело к рассмотрению индивидуальных цен участников экономики и определению с их помощью понятия равновесия (которое является обобщением равновесия по Вальрасу). Необходимость в новом понятии вызвана тем, что при эффекте внешних влияний равновесия других типов могут быть не оптимальны по Парето. По всей видимости, специалисты в области математической экономики осознали потребность введения индивидуальных цен агентов достаточно давно, при этом использовались различные подходы (например, так определяется линдаловское равновесие [66], см. также [31]). Однако оставался целый ряд вопросов, требующих дальнейшего исследования.

Излагаемые ниже результаты являются развитием идей, предложенных в работе [24]. Вводимое в дальнейшем понятие субравновесия впервые было рассмотрено А.Н.Козыревым [24] для одного частного, но важного случая функций распределения дохода. Здесь мы приведем оригинальную трактовку этого понятия, обобщим его на случай более общей модели и сформулируем теорему существования. Укажем также на работу [15], в которой для некоторого класса игр определяется "равновесие в исходах" (см. также начало этого параграфа). Оказывается, что если модель экономики свести к игре и рассмотреть в ее рамках упомянутое равновесие, то получится понятие, вообще говоря, очень близкое (но не эквивалентное) понятию субравновесия. Соответственно условия, при которых справедливы теоремы существования, также будут весьма похожими. В то же время формально ни один подход не приводит к более общим результатам, чем другой.

Под моделью экономики $\mathcal{E}$ будем понимать следующую совокупность данных:

$$\mathcal{E} = \langle N, \{X_i, \mathcal{P}_i, \alpha_i\}_{i\in N}, w\rangle .$$

Здесь $N = \{1, 2, \dots, n\}$ – номера участников (агентов), $X_i \subset R^l$ – их потребительские множества. Индивидуальной ценой i-го агента называется элемент $p_i \in (R^{ln})^* \simeq R^{ln}$, и соответственно набор $\pi = \{p_i\}_{i\in N}$ есть система индивидуальных цен. Пусть $X = \prod_{i\in N} X_i$ и $B \subset (R^{ln})^N$ – единичный шар в евклидовой норме. Пара (x, π), где $x \in X$, $\pi \in B$, называется состоянием экономики. Положим $Z = X \times B$. На Z определено отображение $\mathcal{P}_i : Z \to 2^X$, сопоставляющее вектору $z = (x, \pi)$ множество $\mathcal{P}_i(z) \subset X$ – наборы потребительских меню участников экономики, строго предпочитаемые агентом i набору x при системе цен π. В $\mathcal{E}$ заданы также функции распределения дохода $\alpha_i : Z \to R, i \in N$, и суммарные первоначальные запасы $w \in R^l$.

Состояние $z = (x, \pi)$ сбалансировано, если $\sum_{i\in N} x^i = w$ и существует $p \in R^l$ такой, что $\sum_{i\in N} p_i = \langle p, p, \dots, p\rangle$.

Состояние $z = (x, \pi)$ оптимально по Парето, если $\sum_{i\in N} x^i = w$ и не существует распределения $\tilde{x} \in X$ такого, что $\tilde{x} \in \bigcap_{i\in N} \mathcal{P}_i(z)$ и $\sum_{i\in N} \tilde{x}_i = w$.

Каждому оптимальному по Парето состоянию $z = (x, \pi)$ экономики $\mathcal{E}$ можно дать двойственную характеристику, которая состоит в следующем: найдется система индивидуальных цен $\bar{\pi} = \{\bar{p}_i\}_{i\in N}$ такая, что $\sum_{i\in N} \bar{p}_i = \langle \bar{p}, \bar{p}, \dots, \bar{p}\rangle$ для некоторого $\bar{p} \in R^l$ и

$$\langle \bar{p}_i, \mathcal{P}_i(z)\rangle \geq \langle \bar{p}_i, x\rangle \qquad (2.1)$$

для всех $i \in N$, причем хотя бы одно неравенство в (2.1) строгое. (Считаем $\langle h, \emptyset\rangle > \langle h, g\rangle$ для всех $h, g \in R^{ln}$.)

Достаточность характеристики (2.1) легко проверяется. Необходимость будет иметь место при дополнительных предположениях. Предположим, что: а) либо $x \in cl\, \mathcal{P}_i(x) \setminus \mathcal{P}_i(x)$, либо $\mathcal{P}_i(z) = \emptyset$; б) найдутся открытые выпуклые множества $U_i \subset R^{ln}$ такие, что $\mathcal{P}_i(z) = U_i \cap X$, $i \in N$; в) множество X выпукло и замкнуто.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. *При сделанных предположениях состояние $z = (x, \pi)$ Парето-оптимальное тогда и только тогда,*

когда существует сбалансированная система цен $\bar{\pi}=\{\bar{p}_i\}_{i\in N}$, удовлетворяющая условию (2.1).

Доказательство этого утверждения основано на применении теоремы Дубовицкого - Милютина [20].

С учетом (2.I) вводимое ниже понятие равновесия выглядит довольно естественно. По аналогии со случаем рыночной цены определяются бюджетные множества экономических агентов:

$$B_i(z)=\{x'\in X/p_i x'\leq \alpha_i(z)\},\quad z=(x,\pi),\ z\in Z,\ i\in N.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Сбалансированное состояние $\bar{z}=(\bar{x},\bar{\pi})$ называется **равновесием**, если оно достижимо:

$$\bar{x}\in B_i(\bar{z}),\quad i\in N,$$

и индивидуально рационально:

$$\mathcal{P}_i(\bar{z})\cap B_i(\bar{z})=\varnothing,\quad i\in N.$$

С содержательной точки зрения это определение можно интерпретировать различными способами [35]. Здесь мы не будем его подробно обсуждать.

Значительно более удобным в смысле реализуемости оказывается другое понятие - субравновесия. Чтобы дать его формальное определение, мы проделаем некоторые предварительные построения.

Пусть $F=\{f_i\}_{i\in N}$ - набор функционалов, $f_i\in R^{l_i}$ и $\Lambda=\{\lambda_i\}_{i\in N}$ - совокупность неотрицательных чисел. Говорим, что пара (F,Λ) ассоциирована с системой $\{p_i\}_{i\in N}$, если $p_i=\lambda_i f_i$, $i\in N$. На множестве $X\times B\times(0,1]^N=Y$ определим функции $d_i(\cdot)$ по формуле

$$d_i(x,F,\Lambda)=\alpha_i(x,\pi)/\lambda_i,\quad i\in N,$$

где пара (F,Λ) ассоциирована с системой π. Продолжим эти функции на замыкание Y, полагая

$$d_i(y)=\lim\{d_i(y')/y'\to y,\ y'\in Y\},\ y\in cl\,Y,\ i\in N.$$

В определении субравновесия будут фигурировать два типа бюджетных множеств. Первый из них задается формулой:

$$B_i^{(1)}(x,F,\Lambda)=\{x'\in X/x'f_i\leq d_i(x,F,\Lambda)\},\ (x,F,\Lambda)\in cl\,Y,\ i\in N.$$

Множества второго типа не зависят от выбора коэффициентов $\Lambda=\{\lambda_i\}_{i\in N}$:

$$B_i^{(2)}(x, F, \Lambda) = \{x' \in X | x' f_i \leq x f_i\}, (x, F, \Lambda) \in cl\, Y, \ i \in N.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Тройка $(\bar{x}, \bar{F}, \bar{\Lambda})$, ассоциированная со сбалансированным состоянием $\bar{\bar{z}} = (\bar{x}, \bar{\bar{\pi}})$, называется *субравновесием*, если $\bar{\Lambda} \neq O$, а состояние $\bar{\bar{z}}$ индивидуально эффективно:

$$\mathcal{P}_i(\bar{\bar{z}}) \cap B_i^{(2)}(\bar{x}, \bar{F}, \bar{\Lambda}) = \varnothing, \quad i \in N, \tag{2.2}$$

и индивидуально рационально:

$$\mathcal{P}_i(\bar{\bar{z}}) \cap B_i^{(1)}(\bar{x}, \bar{F}, \bar{\Lambda}) = \varnothing, \quad i \in N. \tag{2.3}$$

Попытаемся раскрыть содержательный смысл понятия субравновесия.

Если $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{\pi}})$ - равновесие экономики $\mathcal{E}$, то, по определению, распределение $\bar{\bar{x}}$ доставляет максимум удовлетворения каждому агенту на множестве распределений, достижимых для него, т.е. в рамках того, что ему позволяет бюджет. Реализуемость состояния $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{\pi}})$ обеспечивается балансовыми соотношениями: $\sum\limits_N \bar{\bar{x}}_i = w$, $\sum\limits_N \bar{p}_i = (\bar{p}, \bar{p}, \dots, \bar{p})$, $\bar{p} \in R^\ell$. Таким образом, если в $\mathcal{E}$ установлена равновесная система индивидуальных цен $\bar{\bar{\pi}}$, то участники независимо друг от друга выбирают одно и то же распределение $\bar{\bar{x}} \in X$. Однако способ нахождения такой системы цен в определение равновесия никак не заложен, и если система окажется неравновесной, то, ввиду эффекта внешних влияний, интересы агентов могут не совпасть и независимый выбор будет невозможен. Поэтому имеет смысл рассматривать процедуры достижения равновесных состояний, которые как раз бы и обеспечивали эту независимость.

В качестве такой, конечно, весьма условной процедуры можно предложить следующую. Предположим существование некоторого управляющего органа, который генерирует сбалансированное состояние $(x, \pi) \in Z$. Агенты оценивают это состояние следующим образом: они "соглашаются с ним", если в их бюджетном множестве нет "лучшего" распределения $\hat{x}$, а сам x там находится; в противном случае они "не соглашаются". Орган получает информацию, и если все агенты "согласны" с предложенным распределением и системой цен, то это и есть равновесие; если же хотя бы один агент "не согласен", то состояние корректируется и процедура повторяется. Можно заметить, что при таком способе функционирования экономики условие достижимости распределения x вряд ли необходимо (в отличие от рыночного равновесия), ибо агентам важен

лишь уровень их удовлетворенности. Действительно, финансовая реализуемость распределения x достигается совместными усилиями всех агентов. Последнее следует из балансовых соотношений на систему цен: $\sum_N p_i = (p,\dots,p)$. Поэтому кажется естественным заменить условие достижимости распределения x на его индивидуальную эффективность при системе цен π. Это требование означает невозможность агенту получить большее удовлетворение при тех же или меньших затратах. Формально оно выражается в отсутствии распределений "лучших" x в множестве $\{x' \in X \mid x'p_i \leq xp_i\}$ для всех $i \in N$.

Теперь рассмотрим вопрос, с какими распределениями следует "согласиться" участнику $i \in N$, если его индивидуальная цена нулевая. В состоянии равновесия такая цена может установиться лишь когда z является точкой насыщения этого агента (так как $B_i(z) = X$). Разумность такого положения кажется сомнительной, ибо, с одной стороны, агент не несет никакой финансовой нагрузки по реализации распределения, а с другой, предъявляет такие "жесткие" требования. На наш взгляд, более логично, если он будет поступать примерно так же, как в "близких состояниях". Именно в конкретизации понятия близости и мыслится ответ на поставленный выше вопрос.

Таким образом, необходимо надлежащим образом выбрать топологическое пространство, точкам которого соответствовали бы состояния экономики. Исходное пространство Z на эту роль не годится, так как требования агента, которому назначена нулевая цена, будут противоречивы (поскольку среди "близких" к нулевой индивидуальной цене есть цены p_i и $-p_i$) и их можно будет удовлетворить лишь когда z – его точка насыщения. Более подходящим является его пространство $\mathscr{Z} = X \times B \times [0,1]^N$. Точке (x, F, Λ) этого пространства соответствует ассоциированное состояние (x, π), где $\varphi_i = \lambda_i f_i$, $i \in N$. В этом случае близость точек пространства $\mathscr{Z}$ будет эквивалентна близости соответствующих состояний в топологии Z, если в наборе коэффициентов $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i \in N}$ нет нулей. В противном случае дело обстоит уже не так, и одни и те же состояния могут быть "по-разному" близки. Условие индивидуальной рациональности (2.3) и отражает эту идею "близкого поведения". Соответствующий вид принимает и условие индивидуальной эффективности (2.2). Отметим также, что с помощью понятия субравновесия удается обойти ту трудность, что бюджетное отображение $B_i : Z \to 2^X$ часто бывает разрывно в точках $(x, \pi) \in Z$,

где $\rho_i = 0$.

Прокомментировать определение субравновесия можно еще и так. Условимся считать величину $\|\rho_i\|$ "степенью влияния агента на экономическую ситуацию" или "коэффициентом участия в финансировании распределения", а вектор $\rho_i \in R^{\ell n}$ рассматривать как носитель двух типов информации – "коэффициента участия" $\|\rho_i\|$ и "направления" $\rho_i/\|\rho_i\|$. В теории рыночного равновесия, как правило, важно лишь направление вектора цен. Здесь же ситуация иная. Можно считать, что если коэффициент нулевой, то это не означает нулевого направления, хотя возможно и такое. В случае нулевого коэффициента участник как бы устраняется от расходов по реализации распределения, но его мнение не игнорируется, он "соглашается" с распределением, если оно удовлетворяет условиям (2.2) и (2.3). Соответственно нулевое направление может реализоваться лишь тогда, когда предлагаемое распределение будет точкой насыщения этого агента.

Перейдем к формулировке предположений, достаточных для существования субравновесий.

А1. (Выпуклость потребительских множеств). Множества $X_i \subset R^\ell$, $i \in N$, – выпуклые компакты.

А2. (Непрерывность предпочтений). Для любого $i \in N$ отображение $\mathcal{P}_i : Z \to 2^X$ имеет открытый график в $Z \times X$.

А3. (Иррефлексивность и выпуклость предпочтений). Для любого $i \in N$ справедливо $x \notin conv\,\mathcal{P}_i(z)$, $z = (x, \pi)$, $z \in Z$.

А4. (Непрерывность бюджетных множеств). Для любого $i \in N$ функция α_i непрерывна на Z и выполняется условие: если пара $(P, \Lambda) \in B \times [0,1]^N$ ассоциирована со сбалансированной системой цен π, то при $f_i \neq 0$, $\Lambda \neq 0$ и любом $\tilde{x} \in X$ должно быть $\inf\limits_{x \in X} x f_i < \alpha_i(\tilde{x}, P, \Lambda)$.

А5. (Закон Вальраса). Если $\pi \in B$ сбалансирована, т.е. $\sum\limits_N \rho_i = (\rho, \rho, \ldots, \rho)$, $\rho \in R^\ell$, то на X справедливо тождество $\sum\limits_N \alpha_i(x, \pi) = \rho \cdot w$.

ТЕОРЕМА 2.4 [35]. Если экономика $\mathcal{E}$ удовлетворяет предположениям А1–А5, то субравновесие существует.

Предположения А1–А3, А5 вполне стандартны. Предположение А4 фактически играет ту же роль, что и соответствующий пункт из [31], оно обеспечивает непрерывность бюджетных отображений первого типа в тех точках, где $f_i \neq 0$, $i \in N$.

Теорему существования равновесия можно получить из теоремы 2.4, но для этого необходимо сделать дополнительные предположения.

Пусть $E(X) = \{x \in X / \sum_N x^i = w\}$.

А6. (Сильная непрерывность бюджетных множеств). Для всех $i \in N$ функция α_i непрерывна на Z, и если пара (F, Λ), ассоциированная со сбалансированной системой π такова, что $f_i \neq 0, \Lambda \neq 0$, то при любом $\tilde{x} \in X$ должно быть $\inf_{x \in X} x f_i < d_i(\tilde{x}, F, \Lambda)$ для $\lambda_i \neq 0$ и $\sup_{x \in X} f_i x < d_i(x, F, \Lambda)$ или $\sup_{x \in E(X)} f_i x < d_i(\tilde{x}, F, \Lambda)$ при $\lambda_i = 0$.

А7. (Ненасыщаемость). Для любого $i \in N$ и сбалансированного $z \in Z$ должно быть $\mathcal{P}_i(z) \neq \emptyset$.

ТЕОРЕМА 2.5[35]. Если экономика $\mathcal{E}$ удовлетворяет А1–А3, А5–А7, то равновесие существует.

Отметим, что оптимальность по Парето равновесных состояний (как и субравновесных) вытекает из двойственной характеристики (2.1).

В заключение укажем на один важный случай функций распределения дохода, наглядно демонстрирующий различие между предположениями А4 и А6. Это будут функции вида $\alpha_i(x, \pi) = \langle p_i, \bar{w} \rangle$, где вектор $\bar{w} = (w^1, w^2, \ldots, w^n)$ удовлетворяет равенству $\sum_N w^i = w$. Теперь, если $\bar{w} \in \mathrm{int}\, X$, то А4 выполнено и субравновесие (при выполнении А1–А3) существует. Однако равновесие может не существовать. Это подтверждает пример однопродуктового рынка с двумя торговцами [24,31]: $X_1 = X_2 = [0,1]$, $u_1 = x_1 \cdot x_2$, $u_2 = x_2$ – функции полезности агентов, а $w^1 = 0{,}6$, $w^2 = 0{,}4$ – их первоначальные запасы. Субравновесию здесь будет отвечать распределение (0,5, 0,5), система функционалов $F = \{(1,1),(0,1)\}$ и коэффициенты $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$.

§3. Континуальные модели обмена с внешними влияниями

В этом параграфе будет рассмотрена модель экономики обмена с внешними влияниями, в которой совокупность экономических агентов представляется в виде пространства с мерой. В математической экономике такие модели (без внешних влияний) исследуются давно и интенсивно (см. [1,60]). Основная цель исследований состояла в установлении взаимосвязи между понятиями ядра и равновесия в рамках экономики с совершенной конкуренцией. Исследование вопроса представляет интерес и для экономик с внешним влия-

нием. Однако на пути такого исследования встают значительные концептуальные трудности. И прежде всего потому, что если в моделях без внешних влияний понятие доминируемости возникает вполне естественно и, главное, однозначно, то при внешних влияниях это уже не так.

В то же время, имея "прицел" на теорему эквивалентности ядра и множества равновесных состояний, представляется осмысленным начать с детального исследования самих равновесий. Причем не только в репликах конечных моделей (см.[30], а также следующий параграф), но и непосредственно в континуальных экономиках с внешним влиянием.

Разумеется, изучение условий совершенной конкуренции является далеко не единственным поводом для рассмотрения равновесных состояний в континуальных моделях обмена. Одним из важных мотивов является, например, необходимость развития техники равновесного анализа для экономических систем с большим числом участников (см., например,[1,60]).

Ниже дается определение равновесия в континуальной модели обмена с внешними влияниями и формулируется соответствующая теорема существования. В полном объеме излагаемые результаты содержатся в [36].

В рассматриваемой модели обмена $\mathcal{E}$ совокупность экономических агентов описывается как пространство с мерой $(\mathcal{A}, \mathcal{a}, \mu)$. Здесь $\mathcal{a}$ – заданная на множестве $\mathcal{A}$ σ-алгебра, μ-неотрицательная счетно-аддитивная мера. Измеримые отображения $x(\cdot)$ из $\mathcal{A}$ в R^l_+ будем называть р а с п р е д е л е н и я м и товаров ($l<+\infty$ – число их типов). Существенно ограниченные распределения называются допустимыми. Символом X обозначается совокупность всевозможных допустимых распределений, она совпадает с конусом неотрицательных элементов в $L_\infty(\mathcal{A},\mathcal{a},\mu, R^l)$.

Предпочтения агентов определены на X и описываются точечно-множественным отображением $\mathcal{P}:\mathcal{A}:X\to 2^X$. Здесь $\mathcal{P}(a,x)$ – распределения, "не менее предпочтительные", чем x для $a\in\mathcal{A}$, т.е. $\mathcal{P}(a,x)=\{y\in X / y\succsim_a x\}$. Мы будем также использовать обозначение $y\succ_a x$, которое означает, что $y\in\mathcal{P}(a,x)$ и $x\notin\mathcal{P}(a,y)$. Кроме того, в модели задано отображение $w\in X$, которое определяет "исходное распределение продуктов". Итак, рассматриваемая модель экономики имеет вид:

$$\mathcal{E}=\langle(\mathcal{A},\mathcal{a},\mu),\ \mathcal{P}(\cdot,\cdot),\ w(\cdot)\rangle.$$

Приведем пример такой экономики. Возьмем в качестве $\mathcal{A}$ отрезок $[0,1]$, $\mathcal{O}\!\!\!\!\mathcal{L}$ - борелевская σ -алгебра на нем, μ - мера Лебега. Предпочтения $\mathcal{P}$ определим с помощью функций полезности $u:[0,1]\times X \to R$, где число $u(a,x)=u_a(x)$ - уровень полезности распределения x для агента a. Функция u может быть представлена, например, в виде $u(a,x)=v(a,f_1(x),\ldots,f_\ell(x),f_{\ell+1}(a,x))$, где $v:[0,1]\times R^{\ell+1}\to R$ определяется по формуле $v(a,y)=\prod_{j=1}^{\ell+1} y_j^{t_j(a)}$, а t - некоторое измеримое отображение на $\mathcal{A}$ со значениями во множестве $int \sum^{\ell+1} = \{z\in R_+^{\ell+1} / z \geqslant 0, \sum_{j=1}^{\ell+1} z_j=1\}$.

Что касается функций f_j, то они задаются соотношениями

$$f_j(x)=\operatorname*{ess\,inf}_{a\in\mathcal{A}_s} x_j(a),\quad j=1,\ldots,\ell;$$

$$f_{\ell+1}(a,x)=\int_0^1 g(a,s,x(s))ds,$$

где $x_j(.)$ - j-я компонента векторнозначного отображения $x(.)\in X$, а функция g вогнута, не убывает по последнему аргументу и измерима по первым двум.

Таким образом, в приведенном примере уровень полезности $u(a,x)$ определяется с учетом как точечных, так и интегральных характеристик распределения x, "взвешенных" с помощью функций Кобба - Дугласа.

Перейдем теперь к понятию равновесия, которое так же, как и в конечном случае (и по тем же причинам), определяется на основе системы индивидуальных цен.

Системой индивидуальных цен будем называть скалярно μ - интегрируемое отображение[*] π из $\mathcal{A}$ в $(ba)^\ell$, где $(ba)^\ell$ - ℓ-кратное произведение пространства всех конечно-аддитивных функций множества $ba(\mathcal{A},\mathcal{O}\!\!\!\!\mathcal{L},\mu)$, абсолютно непрерывных относительно μ.

Состоянием экономики является пара (x,π), где x - допустимое распределение, а π - система индивидуальных цен.

---

[*] Отображение $f:\mathcal{A}\to\mathcal{X}^*$, действующее в сопряженное к банахову пространству $\mathcal{X}$, называется скалярно измеримым, если при всех $x\in\mathcal{X}$ измеримы отображения $\langle x,f(.)\rangle:\mathcal{A}\to R$. В этом случае интегралом (интегралом Гельфанда) называется такой элемент $x_f\in\mathcal{X}^*$, что $\int_{\mathcal{A}}\langle f(a),x\rangle d\mu(a)=\langle x_f,x\rangle$ для всех $x\in\mathcal{X}$ [55].

Будем говорить, что состояние (x, π) сбалансировано, если сбалансированы распределение x_ℓ: $\int x d\mu = \int w d\mu$ и система цен $\pi(.)$: существует $\rho \in R^\ell_+$ такой, что

$$\langle \int \pi(.) d\mu, y \rangle = \langle \rho, \int y d\mu \rangle, \; y \in X. \qquad (3.1)$$

Вектор $\rho \in R^\ell_+$, фигурирующий в (3.1), условимся называть общественной или рыночной ценой, согласованной с $\pi(.)$. (Можно считать, что $\langle \rho, \int w d\mu \rangle = 1$.)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Сбалансированное состояние $(\bar{x}, \bar{\pi})$, согласованное с ценой $\bar{\rho} \in R^\ell_+$, называется р а в н о в е с и е м, если для любого измеримого отображения $\text{æ} : \mathcal{A} \to X$ такого, что $\text{æ}(a) \succ_a \bar{x}$ для μ - п.в. $a \in \mathcal{A}$, выполняется неравенство

$$\langle \bar{\pi}(a), \text{æ}(a) \rangle \geq \langle \bar{\rho}, w(a) \rangle, \; \mu\text{-п.в.}\, a \in \mathcal{A}. \qquad (3.2)$$

При этом неравенство (3.2) строгое для μ - п.в. $a \in \mathcal{A}$, удовлетворяющих условию $\text{æ}(a) \succ_a \bar{x}$.

Условие (3.2) можно рассматривать как аналог принципа максимизации полезности экономическими агентами на бюджетных множествах. В данном случае эти множества представлены в виде

$$B(a, \bar{\pi}, \bar{\rho}) = \{ y \in X \mid \langle y, \bar{\pi}(a) \rangle \leq \langle \bar{\rho}, w(a) \rangle \}, \; a \in \mathcal{A}.$$

Заметим, что, вообще говоря, здесь нет полного совпадения, тем не менее аналогия достаточно прозрачна и можно говорить, что это понятие равновесия перенесено со случая моделей обмена с конечным числом участников (см. §2).

Перейдем теперь к предположениям, дающим теорему существования равновесия.

А1. Для μ - п.в. $a \in \mathcal{A}$: а) $\mathcal{P}(a, .)$ определяет полное, транзитивное, рефлексивное отношение предпочтения на X ; б) при любом $x \in X$ множество $\mathcal{P}(a, x)$ выпукло и замкнуто в топологии Макки пространства $L_\infty(R^\ell)$; в) при любом $x \in X$ справедливо включение $\mathcal{P}(a, x) + X \subset \mathcal{P}(a, x)$.

Пусть $X_w = \{ x \in X \mid \int x \leq \int w \}$. Символом $\ell_j(.)$ обозначим отображение из $\mathcal{A}$ в R^ℓ, определенное по формуле $\ell_j(a) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, $a \in \mathcal{A}$. Соответственно $\ell(.)$ определяется соотношением $\ell(a) = (1, 1, \dots, 1)$, $a \in \mathcal{A}$.

А2. Для μ - п.в. $a \in \mathcal{A}$ и любого $x \in int_{1,1_\infty} X$:
а) $int_{1,1} \mathcal{P}(a, x) = \{ y \in X \mid y \succ_a x \}$; б) существует $\delta = \delta(a, x) > 0$ такое, что $(\delta \cdot \ell + X) \cap X_w \supset \mathcal{P}(a, x) \cap X_w$; в) $x + \ell_j \succ_a x$ для всех $j = \overline{1, \ell}$.

Требования AI а) и A2 б) являются условиями на непрерывность $\mathcal{P}(a,.)$, $a \in \mathcal{A}$, а AI в) означает монотонность предпочтений. Предположение A2 б) можно трактовать как слабое условие желательности всех товаров для всех агентов. Фактически оно означает, что для любого $a \in \mathcal{A}$ и $x \in int_{1,1} X$ существует минимальный уровень $\delta(a,x) > 0$ потребления, единый для всех сбалансированных распределений, которые "не хуже" x для агента $a \in \mathcal{A}$. Предположение A2 в) представляет иной тип желательности, смысл его ясен из формального определения.

A3. При любом $x \in X$ отображение $\mathcal{P}(\cdot,x):\mathcal{A} \to 2^X$ измеримо относительно топологии $\sigma(L_\infty, L_1)$, индуцированной на X.

Это сугубо техническое предположение.

A4. Для μ-п.в. $a \in A$ имеет место $w(a) > 0$, причем $\int w \gg 0$.

Нижеследующее предположение можно назвать условием поточечной насыщаемости агентов. Если $y, z \in L_\infty(R^\ell)$, то символ $y \wedge z$ означает $\inf\{y,z\}$.

A5. Существует константа $K > 0$ такая, что для любого сбалансированного распределения $x \in X$ имеет место

$$x \wedge K \cdot \ell \succeq_a x \text{ для } \mu\text{- п.в. } a \in \mathcal{A}.$$

Константу K , фигурирующую здесь, можно экономически осмысливать как некий максимальный уровень потребления товаров, принятый в данной экономике. Формально же A5 означает, что если распределение сбалансировано, то его "обрезание" по некоторому достаточно большому уровню K не приводит к уменьшению полезности агентов.

ТЕОРЕМА 3.I. Если $\mathcal{A}$ – метрический компакт, μ – мера Радона на $\mathcal{A}$, а $\mathcal{E}$ удовлетворяет условиям AI–A5 , то равновесие существует.

В заключение отметим, что если в рассмотренном ранее примере экономики $\mathcal{E}$ функция $g:[0,1]^2 : R^\ell_+ \to R$ удовлетворяет дополнительным условиям:

1) существует число $M > 0$ такое, что для μ-п.в. $(a,s) \in [0,1]^2$ $g(a,s,y) = g(a,s,y_M) \le 1$, где $y_M = \inf\{y, M\cdot(1,1,\dots,1)\}$, $y \in R^\ell_+$;

2) для μ-п.в. $(a,s) \in [0,1]^2$ выполняется $g(a,s,0) = 0$;

то все условия теоремы существования будут выполнены (см. [36]).

§4. Информационные равновесия: существование, конечность и внутренняя характеризация

В настоящем параграфе продолжается обсуждение проблематики, связанной с исследованием свойств равновесия в условиях внешних влияний. При этом рассматриваются лишь различные варианты информационного равновесия, введенного для конечного случая в работах В.Л.Макарова (см.[29,31], а также [32]). В частности, дается и несколько иной по сравнению с предыдущим §3 континуальный аналог такого равновесия. Основное же содержание концентрируется вокруг вопросов существования, конечности и внутренней характеризации информационных равновесий для конечного числа участников. Значительное внимание уделяется также интерпретации соответствующих результатов в форме условий, обеспечивающих справедливость гипотезы Эджворта о стягиваемости ядер реплик к множеству информационных равновесий и равновесий Линдала.

4.1. Существование информационного равновесия. Суть предлагаемого подхода к доказательству теорем существования состоит (в отличие, например, от методов §2) в редукции к соответствующим вопросам для так называемых информационных расширений исходной модели [31,32]. Информационное расширение является уже стандартной моделью (без внешних влияний), что позволяет применять наиболее продвинутые методы современного равновесного анализа. Развиваемый подход базируется на обобщенной лемме Гейла - Никайдо - Дебре (см. [41], а также [8]) и включает в себя использование достаточно тонких характеристик стандартных моделей (типа нередуцируемости по Бёргстрему [56]) для "подтягивания" полуравновесных состояний до равновесных.

Всюду далее в этом параграфе будем предполагать для простоты, что предпочтения участников задаются функциями полезности (целевыми функционалами).

Вернемся к исследованию конечномерного прообраза равновесия, рассматривавшегося в предыдущем параграфе. Для полноты изложения приведем еще раз основные определения (применительно к моделям, включающим и производственную сферу).

Рассматриваемая модель имеет вид:

$$\mathcal{E} = \langle N, \{X_i, Y_i, w^i, u_i\}_{i\in N}\rangle, \tag{4.1}$$

где, как и в §2, $N=\{1,\dots,n\}$ – множество участников, $X_i\subseteq R^l$, $w^i\in R^l$ – потребительское множество и начальные запасы участника $i\in N$, а $Y_i\subseteq R^l$ и $u_i : \prod_N X_i\times Y_i \to R$ – его производственное множество и функция полезности соответственно.

Положим $Z_i = X_i\times Y_i$, $Z=\prod_N Z_i$, $Z(N)=\{z\in Z \mid \sum_N x^i = \sum_N w^i + \sum_N y^i\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.I [7,3I]. Состояние $\bar z\in Z(N)$ называется **информационным равновесием** $\mathcal{E}$, если существуют $\bar p_0\in R^l$, $\bar p^i, \bar\pi^i\in (R^l)^N$ ($i\in N$) такие, что

AI. $u_i(\bar z) = max\{u_i(z) \mid \bar p^i\cdot x \le \bar p_0 \cdot w^i + \bar\pi^i\cdot y,\ z=(x,y)\in Z\}$,

A2. $\sum_N \bar p^i = \sum_N \bar\pi^i = (\bar p_0,\dots,\bar p_0)$*).

Положим $\mathcal{D}=\{(j,k) \mid j,k\in N,\ j\ne k\}$, $\mathcal{D}_0=\{0\}\cup\mathcal{D}$.

Прелагаемая редукция осуществляется с помощью линейных операторов $\gamma_i : (R^l)^N \to (R^l)^{\mathcal{D}_0}$, действующих по формулам:

$$\gamma_i^d(x)=\gamma_i^d(x^1,\dots,x^n)=\begin{cases} x^i, & d=0,\\ -x^i, & d=(k,i),\\ x^k, & d=(i,k),\\ 0 & \text{в остальных случаях}.\end{cases} \tag{4.2}$$

Именно, положим $\mathcal{D}_{00}=\{(0,j,k) \mid (j,k)\in\mathcal{D}\}$ и через γ_i определим операторы $\gamma_{is} : (R^l)^N \to (R^l)^{\mathcal{D}_0\cup\mathcal{D}_{00}}$ ($i\in N$, $s=0,1$), где

$$\gamma_{i0}^d(x)=\begin{cases}\gamma_i^d(x), & d\in\mathcal{D}_0,\\ 0, & d\in\mathcal{D}_{00},\end{cases}$$

$$\gamma_{i1}^d(y)=\begin{cases}\gamma_i^d(y), & d\in\mathcal{D}_0,\\ \gamma_i^{(j,k)}(y), & d=(0,j,k)\in\mathcal{D}_{00}.\end{cases}$$

Обозначим $X=\prod_N X_i$, $Y=\prod_N Y_i$ и построим "информационные расширения" [3I] потребительских и производственных множеств

---

*) Как и ранее, через $p\cdot x$ обозначается скалярное произведение векторов p и x.

участников исходной модели $\mathcal{E}=\langle N,\{X_i, Y_i, w^i, u_i\}_{i\in N}\rangle$:

$$\bar{X}_i^{\Delta}=\gamma_{i0}(X),\quad \bar{Y}_i^{\Delta}=\gamma_{i1}(Y),\quad i\in N. \tag{4.3}$$

Далее, для каждого $i\in N$ через $\bar{w}_{\Delta}^i$ обозначим вектор из $(R^l)^{\mathcal{D}_0\cup\mathcal{D}_{00}}$ с компонентами:

$$(\bar{w}_{\Delta}^i)^{d}=\begin{cases} w^i, & d=0,\\ 0 & \text{в остальных случаях,}\end{cases} \tag{4.4}$$

а через $\bar{u}_i^{\Delta}:\bar{X}_i^{\Delta}\times\bar{Y}_i^{\Delta}\to R$ – функцию, определяемую по формуле:

$$\bar{u}_i^{\Delta}(\gamma_{i0}(x^1,\dots,x^n),\gamma_{i1}(y^1,\dots,y^n))=u_i(x^1y^1,\dots,x^ny^n). \tag{4.5}$$

Следуя [31,32], введем понятие информационного расширения модели $\mathcal{E}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Информационным расширением модели $\mathcal{E}=\langle N,\{X_i, Y_i, w^i u_i\}_{i\in N}\rangle$ называется модель

$$\mathcal{E}^{\Delta}=\langle N,\{\bar{X}_i^{\Delta},\bar{Y}_i^{\Delta},\bar{w}_{\Delta}^i,\bar{u}_i^{\Delta}\}_{i\in N}\rangle,$$

компоненты которой определяются в соответствии с формулами (4.3)-(4.5).

Из построения функций $\bar{u}_i^{\Delta}$ ясно, что $\mathcal{E}^{\Delta}$ представляет собой уже стандартную модель (без внешних влияний). Далее, если через $Z^{\Delta}(N)$ обозначить множество $\{z_{\Delta}\in\prod_N\bar{X}_i^{\Delta}\times\bar{Y}_i^{\Delta}/\sum_N x_{\Delta}^i=\sum_N\bar{w}_{\Delta}^i+\sum_N y_{\Delta}^i\}$ всех сбалансированных состояний $\mathcal{E}^{\Delta}$, а через $\bar{\gamma}_i:(R^{2l})^N\to(R^l)^{\mathcal{D}_0\cup\mathcal{D}_{00}}\times(R^l)^{\mathcal{D}_0\cup\mathcal{D}_{00}}$ – операторы, действующие по формуле

$$\bar{\gamma}_i(x^1y^1,\dots,x^ny^n)=(\gamma_{i0}(x^1,\dots,x^n),\gamma_{i1}(y^1,\dots,y^n)), \tag{4.6}$$

то, как нетрудно проверить, справедливо равенство

$$\bar{\gamma}(Z(N))=Z^{\Delta}(N), \tag{4.7}$$

где

$$\bar{\gamma}=(\bar{\gamma}_1,\dots,\bar{\gamma}_n).$$

Как вытекает из определения, $\bar{\gamma}$ представляет собой вложение пространства $(R^{2l})^N$ в $(R^l)^{\mathcal{D}_0\cup\mathcal{D}_{00}}\times(R^l)^{\mathcal{D}_0\cup\mathcal{D}_{00}}$.

Поэтому отображение $z\longmapsto(\bar{\gamma}_1(z),\dots,\bar{\gamma}_n(z))$ на основании

равенства (4.7) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между сбалансированными состояниями $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}^{\Delta}$. Более того, это же отображение устанавливает взаимно-однозначное соответствие и между множеством $IW(\mathcal{E})$ всех информационных равновесий и множеством $W(\mathcal{E}^{\Delta})$ вальрасовских равновесий $\mathcal{E}^{\Delta}$. Именно, из определения $IW(\mathcal{E})$, $W(\mathcal{E}^{\Delta})$ и строения $\bar{\gamma}$ вытекает равенство

$$\bar{\gamma}(IW(\mathcal{E})) = W(\mathcal{E}^{\Delta}).$$

Таким образом, вопрос о существовании информационных равновесий редуцируется к аналогичному вопросу для вальрасовских равновесий модели $\mathcal{E}^{\Delta}$.

Если перейти от принципиальных вопросов к техническим, то следует подчеркнуть, что исследование модели $\mathcal{E}^{\Delta}$ сопряжено со значительными трудностями ввиду ее "вырожденности" по целому ряду параметров (нетелесность множеств X_i^{Δ}, отсутствие нетривиальных включений $w_{\Delta}^{i} \in \bar{X}_i^{\Delta}$, разрывность бюджетных отображений и т.п.). Тем не менее, применение современного аппарата равновесного анализа позволяет устанавливать достаточно общие теоремы о непустоте $W(\mathcal{E}^{\Delta})$ даже в рамках традиционной схемы, базирующейся на обобщенной лемме Гейла - Никайдо - Дебре.

Ключевым моментом в установлении таких результатов является проверка так называемой коалиционной ненасыщаемости (нередуцируемости по Бёргстрему [56]) модели $\mathcal{E}^{\Delta}$. В терминах исходной модели $\mathcal{E}$ достаточно сильный вариант этого свойства можно сформулировать следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Будем говорить, что $\mathcal{E}$ коалиционно ненасыщаема, если для любой непустой коалиции $S \neq N$ и для любого $z \in Z(N)$ найдутся векторы $\tilde{z} = (\tilde{x}^i, \tilde{y}^i)_N \in (R^{2\ell})^N$ и $t = (t_i)_N \in (0,1]^N$ такие, что

$$u_i(\tilde{z}/t_i) > u_i(z), \quad i \in S,$$

$$\sum_N \tilde{x}^i = \sum_N \tilde{y}^i + \sum_N t_i \cdot w^i.$$

Приведем одну из теорем существования информационного равновесия, полученную описанным методом. Для простоты ограничимся случаем модели чистого обмена ($Y_i = \{0\}$, $i \in N$).

ТЕОРЕМА 4.1. Если $\mathcal{E}$ удовлетворяет условиям

(а) $X_i \neq R^\ell_+$, $w^i \in R^\ell_+$, $w^i \neq \mathbb{0}$ $(i \in N)$, $\sum_N w^i \gg \mathbb{0}$ *);

(б) функции u_i квазивогнутые, неубывающие, строго возрастающие по x^i и непрерывные по x;

то $IW(\mathcal{E}) \neq \emptyset$.

Подробное доказательство этой теоремы, иллюстрирующее вышеизложенный подход, имеется в [6]. В заключение отметим лишь, что в условиях теоремы 4.1 модель $\mathcal{E}$ коалиционно ненасыщаема, так как для любого сбалансированного распределения $x=(x^1,\dots,x^n)$ и непустой коалиции $S \neq N$ состояние $\tilde{x}=(\tilde{x}^1,\dots,\tilde{x}^n)$ с компонентами

$$\tilde{x}^i = \begin{cases} x^i + c^i, & i \in S, \\ 1/2\,(x^i + c^i), & i \notin S, \end{cases}$$

и вектор $t=(t_1,\dots,t_n)$, где

$$t_i = \begin{cases} 1/2, & i \in S, \\ 1, & i \notin S, \end{cases}$$

при $c \in (R^\ell_+)^N$ и $\sum_N c^i = \sum_{N \setminus S} w^i$, $c^i \neq \mathbb{0}$ $(i \in S)$ удовлетворяет всем требованиям определения 4.3.

4.2. Конечность множества информационных равновесий. Этот пункт посвящен обобщению известной теоремы Дебре о конечности числа равновесий в условиях гладкости функций спроса [52] на случай моделей чистого обмена с внешним влиянием. Таким образом, предполагается, что $Y_i = \{\mathbb{0}\}$ и $X_i = R^\ell_+$ для всех $i \in N$. Кроме того, будем считать, что функции $u_i : (R^\ell_+)^N \to R$ строго квазивогнуты. В этих условиях интересующая нас модель может быть задана в форме соответствующих функций спроса f_i. Налагая на

---

*) Здесь, как и ранее, $x=(x_k)_{k=1}^m \gg 0 \Leftrightarrow x_k > 0$ для всех компонент $x \in R^m$.

u_i необходимые условия гладкости и невырожденности, можно гарантировать гладкость функций f_i. Таким образом, мы оказываемся в ситуации, аналогичной условиям теоремы Дебре, за исключением того, что получающиеся функции спроса являются несколько более сложными объектами, чем их стандартные прообразы.

Отвлекаясь от происхождения функций f_i, можно сформулировать самостоятельное определение модели обмена с внешними влияниями в форме функций спроса. Для $\ell, n \geq 1$ обозначим через Ω внутренность $(R_+^\ell)^N$ и положим

$$P=\{p=(p^i)_N \in \Omega^n / \exists p_0 \in S_1 [\sum_N p^i = (p_0,\dots,p_0)]\},$$

где $S_1 = \{q \in R_+^\ell / \sum_N q_i = 1\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4. Моделью обмена с внешними влияниями, заданной в форме функций спроса, будем называть систему

$$\mathcal{E} = \langle N, \{f_i, w^i\}_{i \in N} \rangle,$$

где $N = \{1,\dots,n\}$ – множество участников, $w=(w^1,\dots,w^n) \in \Omega$ – их начальные запасы, а $f_i : P \times (0,\infty) \to \Omega$ – функции спроса.

Будем предполагать, что f_i удовлетворяют следующему аналогу закона Вальраса:

$$p^i \cdot f_i(p, \omega) = \omega \quad \text{для всех } p=(p^i) \in P,\ \omega \in (0,\infty). \qquad (4.8)$$

Несколько видоизменяя определение 4.1, будем говорить, что пара $(\bar{p}, \bar{x}) \in P \times X(N)$ является информационным равновесием $\mathcal{E}$, если для всех $i \in N$ выполняется равенство

$$f_i(\bar{p}, \bar{p}_0 \cdot w^i) = \bar{x},$$

где $X(N)=\{(x^i)_N \in \bar{\Omega} / \sum x^i = \sum_N w^i\}$, а $\bar{p}_0$ – отвечающий $\bar{p} \in P$ элемент из S_1^N.

Далее предполагается, что f_i – фиксированные гладкие отображения и, следовательно, отдельные представители рассматриваемого класса моделей обмена, заданных в форме функций спроса, отличаются лишь начальными запасами. Интересующий нас вопрос состоит в выяснении свойств f_i, гарантирующих конечность множества равновесных цен $I(w)$ для всех $w=(w^1,\dots,w^n)$ из некоторого открытого подмножества Ω полной меры. При этом, как обычно, под равновесными ценами понимаются проекции информационных равновесий $\mathcal{E}$ на P.

Будем говорить, что $\mathcal{E} = \langle N, \{f_i, w^i\}_N \rangle$ регулярна, если все элементы $I(w)$ являются невырожденными особенностями

отображения $\varphi : P \to (R^l)^{\mathcal{D}_o}$, определяемого формулой

$$\varphi(p) = \sum_{i} \gamma_i \circ f_i(p, p_o \cdot w^i) - \sum_{i} w_\Delta^i ,$$

где $\mathcal{D}_o$ и γ_i определяются так же, как и в п.4.I, а компоненты $w_\Delta^i \in (R^l)^{\mathcal{D}_o}$ имеют вид: $(w_\Delta^i)^d = w^i$ для $d = 0$ и $(w_\Delta^i)^d = 0$ для $d \neq 0$.

Упоминавшиеся свойства f_i оказываются вполне аналогичными суммарной ненасыщаемости для обычных моделей обмена [54] и имеют вид следующего граничного условия:

(А) $\lim \| \sum_{i} f_i(p_{(k)}, \omega_{(k)}) \| = \infty$

при $(p_{(k)}, \omega_{(k)}) \to (p_{(o)}, \omega_{(o)}) \in \partial P \times (0, \infty)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.I. Если функции спроса удовлетворяют закону Вальраса и условию (А), то множество регулярных моделей $\mathcal{E}$ открыто и имеет нулевое (по мере Лебега) дополнение в Ω.

Поскольку свойство (А) влечет компактность множеств $I(w)$, из предложения 4.I вытекает искомый аналог теоремы Дебре.

ТЕОРЕМА 4.2. При выполнении закона Вальраса и граничного условия (А) почти все модели $\mathcal{E}$ имеют конечное множество информационных равновесий, и эта конечность устойчива относительно малых возмущений Ω.

В заключение отметим, что рассматривавшаяся параметризация (в терминах функций спроса и начальных запасов) представляется наиболее естественной, поскольку множества равновесных состояний различных (в смысле п.4.I) моделей определяются именно с точностью до этих параметров.

4.3. Нечеткое блокирование и реплики моделей с внешними влияниями. Целью этого пункта является надлежащая формализация и проверка гипотезы Эджворта применительно к рассматриваемым способам учета эффекта внешних влияний. Предварительно устанавливается внутренняя характеризация информационных равновесий в терминах нечеткого блокирования.

Итак, вернемся к модели $\mathcal{E} = \langle N, \{X_i, Y_i, w^i, u_i\}_{i \in N} \rangle$, введенной в начале этого параграфа. Во избежание дополнительных усложнений всюду далее будем предполагать, что функции u_i - неубывающие. Это предположение согласуется, в частности, с традиционным допущением о нейтральности предпочтений по отношению к производству.

Напомним определение блокирования в $\mathcal{E}$ (см. [32], а также [7,8]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.5. Будем говорить, что состояние $\tilde{z} = (\tilde{x}^i, \tilde{y}^i)_N \in Z$ блокирует $z \in Z(N)$, если найдется коалиция $S \subseteq N$ такая, что

$$u_i(\tilde{z}) > u_i(z), \quad i \in S,$$

$$\sum_S \tilde{x}^i = \sum_S w^i + \sum_S \tilde{y}^i; \quad \tilde{z}^j = 0, \ j \in N \setminus S.$$

Как и в [32,48], элементы $t = (t_i)_N \in [0,1]^N \setminus \{0\}$ будем называть нечеткими коалициями, а величины t_i будем интерпретировать как степень участия i в коалиции

$$supp\ t = \{i \in N / t_i > 0\}.$$

Для $t = (t_i)_N$ и $z = (x^i, y^i)_N \in Z$ через $t \times z$ обозначим вектор $(t_1 z^1, \ldots, t_n z^n)$.

В приведенных обозначениях определение нечеткого блокирования, естественным образом обобщающее определение 4.5, формулируется следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.6. Состояние $\tilde{z} = (\tilde{x}^i, \tilde{y}^i)_N$ F-блокирует $z \in Z(N)$, если найдется нечеткая коалиция $t = (t_i)_N$ и $\tilde{z}_i \in Z$ ($i \in supp\ t$) такие, что

$$u_i(\tilde{z}_i) > u_i(z), \qquad i \in supp\ t;$$

$$t_i \tilde{z}_i = t \times \tilde{z}, \qquad i \in supp\ t;$$

$$\sum_N t_i \tilde{x}^i = \sum_N t_i w^i + \sum_N t_i \tilde{y}^i.$$

Обозначим через $IC(\mathcal{E})$ ($IC_F(\mathcal{E})$) множество всех неблокируемых (не F-блокируемых) состояний $z \in Z(N)$ и приведем условия, в которых гарантируется не только включение

$$IW(\mathcal{E}) \subseteq IC_F(\mathcal{E}),$$

но и совпадение множеств $IW(\mathcal{E})$ и $IC_F(\mathcal{E})$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 4.1. (а) X_i, Y_i – выпуклые подмножества R^{ℓ}_+; (б) $w^i \geq 0$, $w^i \neq 0$, $\sum_i w^i \gg 0$; (в) u_i – непрерывные, квазивогнутые, строго возрастающие по x^i; (г) каждый элемент из $Z(N)$ содержится в Z вместе с некоторой окрестностью из $(R^{\ell\ell}_+)^N$.

Приводимый ниже результат обобщает соответствующую теорему из [32] и дает внутреннее (в терминах самой модели) описание множества информационных равновесий для моделей с производством.

ТЕОРЕМА 4.3. Если для модели $\mathcal{E}$ выполняются условия предположения 4.1, то

$$IW(\mathcal{E}) = IC_F(\mathcal{E}).$$

Теорему 4.3 можно положить в основу формализации понятия "пренебрежимо малого" (в асимптотике) участника экономики с внешними влияниями. Для подтверждения этого тезиса сформулируем определение реплики для экономических моделей рассматриваемого типа и приведем надлежащую модификацию понятия нечеткого блокирования, обеспечивающую стягиваемость ядер реплик к множеству информационных равновесий.

Пусть $r \geq 1$ – произвольное натуральное число. Положим

$$N_{(r)} = \{(i,m) / i \in N,\ m = 1,\dots, r\}.$$

Для каждого элемента $(i,m) \in N_{(r)}$ реплицированного множества участников экономики $\mathcal{E} = \langle N, \{X_i, Y_i, w^i, u_i\}_N \rangle$ положим

$$X_{im} = X_i,\quad Y_{im} = Y_i,\quad w^{im} = w^i. \tag{4.9}$$

Наконец, для $(i,m) \in N_{(r)}$ и $z = (z^{ks})_{(k,s)\in N_{(r)}} \in Z_{(r)} = \prod_{N(r)} X_{ks} \times Y_{ks}$ введем обозначения:

$$z^{im}_{N(r)} = (z^{1im}_{N(r)}, \dots, z^{nim}_{N(r)}), \tag{4.10}$$

$$u^{(r)}_{im}(z) = u_i(z^{im}_{N(r)}), \tag{4.11}$$

где

$$z^{kim}_{N(r)} = 1/r \sum_{m=1}^{r} z^{km},\quad k \in N \setminus \{i\}, \tag{4.12}$$

$$z^{iim}_{N(r)} = z^{im}. \tag{4.13}$$

Говоря в терминах реплики множества Z, значение функции $u_{im}^{(z)}: Z_{(z)} \to R$ на элементе $z = (z^{ks})$ определяется как значение функции u_i на элементе $z_{N(z)}^{im}$ исходного множества состояний Z, все компоненты которого (за исключением i-й) получаются усреднением соответствующих однотипных компонент z, а i-я компонента равна z^{im}. При этом под однотипными понимаются те компоненты z^{ks}, $z^{k's'}$, для которых $k = k'$ (т.е. компоненты, характеризующие производство и потребление однотипных участников $N(z)$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.7. Репликой объема z модели $\mathcal{E} = \langle N, \{X_i, Y_i, w^i, u_i\}\rangle$ будем называть модель

$$\mathcal{E}_{(z)} = \langle N_{(z)}, \{X_{im}, Y_{im}, w^{im}, u_{im}^{(z)}\}_{(i,m)\in N(z)} \rangle,$$

компоненты которой определены в соответствии с формулами (4.9)-(4.13).

Определяющим моментом в построении блокирования в $\mathcal{E}_{(z)}$ является моделирование условий "совершенной конкуренции" при наличии в блокирующей коалиции $M \subseteq N_{(z)}$ нескольких участников одного и того же типа[ж]. Грубо говоря, уровень удовлетворенности участника такой коалиции будет определяться его собственной компонентой в новом распределении и усредненными (по числу однотипных ему членов M) значениями компонент других представителей M.

Перейдем к формальному определению блокирования в реплике $\mathcal{E}_{(z)}$. Пусть M - произвольная коалиция из $N_{(z)}$. Положим $M_i = \{m | (i,m) \in M\}$, $m_i = |M_i|$, и для каждого $(i,m) \in M$, $z = (z^{ks}) \in Z_{(z)}$ введем обозначения

$$z_M^{im} = (z_M^{1im}, \dots, z_M^{nim}),$$

$$u_{im}^M(z) = u_i(z_M^{im}),$$

где

$$z_M^{kim} = 1/m_i \sum_{m\in M_k} z^{km} \ (k \neq i), \quad z_M^{iim} = z^{im}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.8. Будем говорить, что состояние $\tilde{z} = (z^{ks}) \in Z_{(z)}$ (ж)-блокирует $z \in Z_{(z)}$ ($N_{(z)}$), если найдется коалиция $M \subseteq N_{(z)}$ такая, что

ж) Этот момент присутствует уже в определении функций $u_{im}^{(z)}$.

$$u^{M}_{im}(\tilde{z}) > u^{(r)}_{im}(z), \qquad (i,m) \in M,$$

$$\sum_{M} \tilde{x}^{im} = \sum_{M} w^{im} + \sum_{M} \tilde{y}^{im}.$$

Подчеркнем еще раз, что по сравнению с определением 4.5 (являющимся прямым обобщением традиционного) понятие (ж)-блокирования в $\mathcal{E}_{(r)}$ предполагает изменение предпочтений участников в зависимости от членства в той или иной блокирующей коалиции.

Множество всех состояний $z \in Z_{(r)}(N_{(r)})$, не являющихся (ж)-блокируемыми, обозначим через $C_*(\mathcal{E}_{(r)})$ и будем называть (ж)-ядром реплики $\mathcal{E}_{(r)}$.

Переходя к формулировке аналога теоремы Дебре – Скарфа для моделей с внешним влиянием, положим

$$C_r(\mathcal{E}) = \{z \in Z(N) / z_{(r)} \in C_*(\mathcal{E}_{(r)})\},$$

где $z_{(r)} = (z, z, \ldots, z) \in Z^r$ – r-реплика z.

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть $\mathcal{E}$ удовлетворяет условиям предположения 4.1 и, кроме того, $w^i + Y_i \subseteq X_i$ для всех $i \in N$. Тогда справедливо равенство

$$IW(\mathcal{E}) = \bigcap_{r=1}^{\infty} C_r(\mathcal{E}). \tag{4.14}$$

Отметим, что результаты, аналогичные теоремам 4.3–4.4, для моделей чистого обмена получены также в [32]. Принципиальное отличие между ними состоит в определении и трактовке понятий реплики и (ж)-блокирования.

Завершая этот пункт, укажем, что если в дополнение к условиям теоремы 4.4 функции u_i строго квазивогнуты, то множества $C_r(\mathcal{E})$, фигурирующие в равенстве (4.14), исчерпывают все (ж)-ядра $\mathcal{E}_{(r)}$ в том смысле, что $C_*(\mathcal{E}_{(r)}) = \{z_{(r)} / z \in C_r(\mathcal{E})\}$.

4.4. Нечеткое ядро и равновесие Линдала. В качестве иллюстрации к результатам предыдущего пункта приведем вкратце внутреннюю характеризацию линдаловских равновесий [66] и соответствующую теорему о стягиваемости ядер реплик экономических моделей с общественными блага-

ми. Не останавливаясь на формальном обосновании того факта, что линдаловское равновесие представляет собой частный случай информационного, дадим более или менее традиционные определения соответствующих понятий (см., например, [66]). При этом для простоты будем предполагать, что в производстве общественных благ сами эти продукты не используются.

Рассматриваемая модель экономики с общественными благами (модель Линдаля) имеет вид:

$$\mathcal{E} = \langle N, L, Q, \{X_i, Y_i, w^i, u_i\}_N, w_Q \rangle,$$

где

$N = \{1, \dots, n\}$ – множество участников;
$L = \{1, \dots, l\}$ – номенклатура продуктов частного пользования;
$Q = \{l+1, \dots, l+q\}$ – номенклатура общественных благ;
$X_i, Y_i \subseteq R^{l+q}$ – потребительские и производственные множества участника $i \in N$;
$u_i : X_i, Y_i \to R$ – функция полезности $i \in N$;
$w_L^i \in R^L$ – начальный запас продуктов частного пользования для $i \in N$;
$w_Q \in R^Q$ – начальный запас общественных благ.

Положим $Z_i = X_i \times Y_i$, $Z = \prod_N Z_i$ и для каждого элемента $z^i = (x^i, y^i) \in Z_i$ через $x_L^i, x_Q^i, y_L^i, y_Q^i$ будем обозначать сужения x^i и y^i на L и Q соответственно.

Состояние $z = (x^i, y^i)_N \in Z$ будем называть сбалансированным, если выполняются условия

$$\sum_N x_L^i = \sum_N w_L^i + \sum_N y_L^i,$$

$$x_Q^i = w_Q + \sum_N y_Q^i, \quad i \in N.$$

Совокупность всех сбалансированных состояний обозначим через $Z(N)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.9. Состояние $\bar{z} = (\bar{z}^i)_N \in Z(N)$ называется л и н д а л о в с к и м   р а в н о в е с и е м $\mathcal{E}$, если найдутся цены $\bar{p}_L \in R^L$, $\bar{p}_Q^i \in R^Q$ ($i \in N$) такие, что

$$u_i(\bar{z}^i) = \max \{u_i(z^i) / z^i \in B_i(\bar{p})\},$$

где

$$B_i(\bar p)=\{(x^i,y^i)\in Z_i \mid \bar p_L\cdot x_L^i+\bar p_Q^i\cdot x_Q^i\leq \bar p_L\cdot y_L^{(i)}+\bar p_Q^i\cdot w_Q+\bar p_Q\cdot y_Q^i\},$$

$$\bar p_Q=\sum_N \bar p_Q^i,\quad y_L^{(i)}=y_L^i+w_L^i.$$

Множество всех линдаловских равновесий $\mathcal{E}$ обозначим через $\mathcal{L}(\mathcal{E})$.

Введем понятие блокирования во множестве $Z(N)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.10. Будем говорить, что состояние $z\in Z(N)$ блокируется состоянием $\tilde z\in Z(N)$, если найдется коалиция $S\subseteq N$ такая, что

$$u_i(\tilde z^{iS})>u_i(z^i),\quad i\in S,$$

$$\sum_S \tilde x_L^i=\sum_S w_L^i+\sum_S \tilde y_L^i,$$

где

$$\tilde x_L^{iS}=\tilde x_L^i,\ \tilde y^{iS}=\tilde y^i,\ \tilde x_Q^{iS}=w_Q+\sum_S \tilde y_Q^j,\ i\in S.$$

Наряду с введенным блокированием, аналогичным стандартному [66] (хотя и несколько отличающимся от последнего в части возможностей коалиции в потреблении общественных благ), фундаментальную роль в дальнейшем играет его продолжение на нечеткие коалиции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.11. Будем говорить, что состояние $z\in Z$ F-блокируется состоянием $\tilde z\in Z$, если найдется нечеткая коалиция $t=(t_i)_N\in[0,1]^N\setminus\{0\}$ такая, что

$$u_i(\tilde z^{it})>u_i(z^i),\quad i\in \operatorname{supp} t,$$
$$\sum_N t_i\tilde x_L^i=\sum_N t_i\cdot w_L^i+\sum_N t_i\tilde y_L^i,$$

где

$$\tilde x_L^{it}=\tilde x_L^i,\ \tilde y^{it}=\tilde y^i,\ \tilde x_Q^{it}=w_Q+1/t_i\sum_N t_j\tilde y_Q^j.\quad i\in \operatorname{supp} t.$$

Множество состояний $z\in Z(N)$, неблокируемых в смысле определения 4.10 (определения 4.11), обозначим через $C(\mathcal{E})$ ($C_F(\mathcal{E})$) и будем называть ядром и нечетким ядром $\mathcal{E}$ соответственно.

Чтобы не усложнять изложение, в дальнейшем предполагается, что $X_i=X_{Li}\times X_{Qi}$, $Y_i=Y_{Li}\times Y_{Qi}$, где $X_{Li}, Y_{Li}\subseteq R^l$, X_{Qi},

$Y'_{Qi} \subseteq R^{Q}_{+}$.

Приведем условия, обеспечивающие совпадение множеств $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ и $C_f(\mathcal{E})$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 4.2. (а) X_i, Y_i – выпуклые, причем $X_{Li} \subseteq R^{\ell}_{+}$; (б) каждая точка проекции $Z(N)$ на $X = \prod X_i$ содержится в X вместе с некоторой окрестностью из $(R^{\ell+q}_{+})^N$; (в) $w^i_L \gg 0$ $(i \in N)$, $w_Q \gg 0$; (г) u_i – непрерывные, квазивогнутые и строго возрастающие по x^i; (д) $u_i(w^i_L, w_Q, 0) > u_i(x^i, y^i)$ для всех $(x^i, y^i) \in \hat{X}_i \times Y_i$, $(\hat{X}_i \triangleq X_i \cap \partial R^{\ell+q}_{+})$.

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть для модели Линдала $\mathcal{E}$ выполняются условия предположения 4.2. Тогда

$$\mathcal{L}(\mathcal{E}) = C_f(\mathcal{E}).$$

Теорема 4.5 позволяет сформулировать понятие реплики экономической модели с общественными благами и блокирования в ней, дающие "работоспособное" представление об убывающем (по мере роста числа участников) влиянии каждого из них на экономическую ситуацию в целом.

Итак, пусть $\mathcal{E} = \langle N, L, Q, \{X_i, Y_i, w^i, u_i\}_N, w_Q \rangle$ – произвольная модель Линдала, $z \geq 1$ – некоторое натуральное число. Для каждого $(i,m) \in N(z)$ положим

$$X_{im} = X_{Li} \times z X_{Qi},\ Y_{im} = Y_i,\ w_L^{im} = w^i,\ w_Q^{(z)} = z \cdot w_Q, \tag{4.15}$$

$$u^{(z)}_{im}(x^{im}, y^{im}) = u_i(x^{im}_L, x^{im}_Q / z, y^{im}),\ (x^{im}, y^{im}) \in Z_{im},$$

где, как и в п.4.3, $N_{(z)} = N \times \{1, \ldots, z\}$, $Z_{im} = X_{im} \times Y_{im}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.12. Репликой объема z модели $\mathcal{E} = \langle N, L, Q, \{X_i, Y_i, w^i, u_i\}, w_Q \rangle$ будем называть модель Линдала

$$\mathcal{E}_{(z)} = \langle N_{(z)}, L, Q, \{X_{im}, Y_{im}, w_L^{im}, u^{(z)}_{im}\}_{N(z)}, w_Q^{(z)} \rangle,$$

компоненты которой определены в соответствии с формулами (4.15).

Ключевую роль в предлагаемом ниже определении блокирования в реплике $\mathcal{E}_{(z)}$, как и в п.4.3, играет учет изменений в "статусе" участника в зависимости от структуры коалиции, в которую он вступает.

Приведем формальное определение. Пусть M – произвольная коалиция из $N_{(z)}$. Положим, как и в п.4.3, $M_i = \{m \mid (i,m) \in M\}$, $m_i = |M_i|$ и для каждого $(i,m) \in M$, $z^{im} \in X_{Li} \times m_i X_{Qi} \times Y_i$ введем обозначения:

$$z^{im,M}=(x_L^{im},\, x_Q^{im}/m_i,\, y^{im}),$$

$$u_{im}^{M}(z^{im})=u_i(z^{im,M}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.13. Будем говорить, что состояние $\tilde{z}\in Z_{(z)}=\prod_{N(z)} Z_{im}$ (ж)-блокирует $z\in Z_{(z)}$, если найдется коалиция $M\subseteq N_{(z)}$ такая, что

$$u_{im}^{M}(\tilde{z}^{imM})>u_{im}^{(z)}(z^{im}),\quad (i,m)\in M,$$

$$\sum_{M}\tilde{x}_L^{im}=\sum_{M} w_L^{im}+\sum_{M}\tilde{y}_L^{im},$$

где

$$x_L^{imM}=\tilde{x}_L^{im},\ \tilde{y}^{imM}=\tilde{y}^{im},\ \tilde{x}_Q^{imM}=m_i w_Q+\sum_{M}\tilde{y}_Q^{im}.$$

Таким образом, предпочтения участника меняются не только вместе с изменением объема реплик (как это предлагалось Р.Ауманом [66]), но и вместе с изменением числа однотипных ему участников при переходе от одной блокирующей коалиции к другой.

Множество всех состояний $z\in Z_{(z)}(N_{(z)})$, не являющихся (ж)-блокируемыми, обозначим через $C_*(\mathcal{E}_{(z)})$ и будем называть (ж)-ядром реплики $\mathcal{E}_{(z)}$.

Для того чтобы привести соответствующий аналог теоремы Дебре - Скарфа, введем следующие обозначения:

$$C_z(\mathcal{E})=\{\, z\in Z(N)/z_{(z)}\in C_*(\mathcal{E}_{(z)})\},$$

где $z_{(z)}=(z,\dots,z)$ - z-реплика z.

ТЕОРЕМА 4.6. *Пусть $\mathcal{E}$ удовлетворяет условиям предположения 4.2 и дополнительному требованию строгой квазивогнутости функций u_i. Тогда имеет место равенство*

$$\mathcal{L}(\mathcal{E})=\bigcap_{z=1}^{\infty} C_z(\mathcal{E}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Требованиям теоремы 4.6 удовлетворяет, в частности, контрпример к гипотезе Эджворта, приводимый в [66] для рассматриваемого там более грубого понятия блокирования.

В заключение этого пункта отметим, что в условиях теоремы 4.6 множества $C_z(\mathcal{E})$ исчерпывают все (*)-ядра $\mathcal{E}_{(z)}$ в том смысле, что $C_*(\mathcal{E}_{(z)})=\{z_{(z)}\,/\,z\in C_z(\mathcal{E})\}$.

4.5. Об одном аналоге информационного равновесия в континуальной модели обмена. Ввиду того, что прямое обобщение вводимых ниже понятий на случай моделей с производством не представляет каких-либо затруднений, ограничимся обсуждением континуальных моделей обмена.

Начнем с описания предлагаемого варианта модели, учитывающего, в отличие от §3, и классический случай отсутствия внешних влияний. Как и во всех рассмотрениях подобного типа, совокупность экономических агентов задается в виде пространства с мерой $\mathcal{A}=(A,\mathcal{Q},\mu)$, где A – множество участников, $\mathcal{Q}$ – алгебра допустимых коалиций $e\subseteq A$, μ – неотрицательная счетно-аддитивная мера такая, что $\mu(A)=1$. При этом величина $\mu(e)$ истолковывается как доля участников типа e во всем множестве A. Потребительские возможности экономических агентов описываются точечно-множественным отображением $X(\cdot)$, действующим из A в R^ℓ: $X(a)\subseteq R^\ell$ является потребительским множеством для $a\in A$. В соответствии со стандартными представлениями, идущими от первых работ в этой области [I,60], под допустимыми состояниями будем понимать интегрируемые вектор-функции $x(\cdot):A\to R^\ell$, являющиеся селекторами отображения $X(\cdot)$ $(x(a)\in X(a),\ a\in A)$*). Совокупность всех допустимых состояний обозначим через X' (чтобы отличать от $X=L^+_\infty(A,\mathcal{Q},M,R^\ell)$ из § 3).

Далее, будем предполагать, что предпочтения участников $a\in A$ определяются не только классами эквивалентности функций $x\in X'$, но и их "личной компонентой" $x(a)$. Говоря формально, функции полезности заданы на множествах $\mathcal{T}_a=X(a)\times X'$ и по последней компоненте зависят от соответствующих классов эквивалентности. Наконец, в модели зафиксирована функция $w\in L_1(A,\mathcal{Q},\mu,R^\ell)$, характеризующая начальные запасы участников.

---

*) Здесь и далее все точечные соотношения в A понимаются с точностью до множеств μ-меры 0.

Таким образом, рассматриваемый вариант модели с внешними влияниями имеет вид:

$$\mathcal{E} = \langle (A, \mathcal{A}, \mu), \{X(a), u_a, w(a)\}_{a \in A} \rangle, \tag{4.16}$$

где $u_a = u(a,\cdot,\cdot): X(a) \times X^1 \to R$ – упоминавшиеся функции полезности экономических агентов $a \in A$.

Понятие информационного равновесия в модели (4.16) представляет собой следующую модификацию определения 4.1. Для системы индивидуальных цен, представляющих из себя скалярно-измеримое отображение $p: A \to L_\infty(A, \mathcal{A}, \mu, R^\ell)$ и для вектора $p_0 \in R^\ell$ определим бюджетные множества участников $a \in A$ по формуле:

$$B_a(p_0, p) = \{(x(a), x) \in \mathcal{X}_a \mid p_0 \cdot x(a) + \langle p(a), x \rangle \leq p_0 \cdot w(a)\},$$

где, как обычно, $x(a)$ – значение x в точке a, $\langle p(a), x \rangle = \int p(a) \cdot x \, d\mu$ – значение функционала $p(a)$ на элементе $x \in X^1$. Далее, для сопоставимости с формулировками §3 через $\int p(\cdot)\, d\mu$ будем обозначать такой элемент $\tilde{p} \in L_\infty(A, \mathcal{A}, \mu, R^\ell)$, для которого $\int \langle p(a), x \rangle d\mu(a) = \langle \tilde{p}, x \rangle$ для всех $x \in L_1(A, \mathcal{A}, \mu, R^\ell)$.

Положим $X^1(A) = \{x \in X^1 \mid \int\limits_A x \, d\mu = \int\limits_A w \, d\mu\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.14. Состояние $\bar{x} \in X^1(A)$ будем называть *информационным равновесием* модели (4.16), если найдется вектор $\bar{p}_0 \in R^\ell$ и система индивидуальных цен p такие, что

$$u_a(\bar{x}(a), \bar{x}) = \max\{u_a(x(a), x) \mid (x(a), x) \in B_a(\bar{p}_0, \bar{p})\},$$

$$\int \bar{p}(\cdot)\, d\mu = 0.$$

Ясно, что если для почти всех $a \in A$ функции u_a не зависят от состояния в целом, то стандартное равновесие будет равновесием и в смысле определения 4.14. В конечном же случае ($|A| < \infty$) в ситуации, когда функции u_a не зависят от первой компоненты ("личного потребления"), как сама модель, так и определения равновесия идентичны соответствующим понятиям из п.4.1.

Переходя к рассмотрению вопросов блокирования, для простоты будем предполагать, что для модели $\mathcal{E}$ выполняются условия, обеспечивающие следующее свойство равновесных цен $(\bar{p}_0, \bar{p})$:

$$\langle \int_e \rho(\cdot)d\mu, x\rangle \leq 0, \quad e\in\mathcal{U}, x\in X_e^1, \tag{4.17}$$

где $X_e^1=\{x\in X^1/x(a)=0,\ a\in A\setminus e\}$.

Условие (4.17) выполняется, в частности, для всех моделей чистого обмена ($X(a)=R_+^l,\ a\in A$), удовлетворяющих подходящему требованию желательности продуктов (например, аналогичному условиям монотонности предпочтений из §3).

Итак, определим бесконечномерный аналог блокирования, введенного ранее в п.4.3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.15. Будем говорить, что состояние $\tilde{x}\in X^1$ блокирует $x\in X^1(A)$, если найдется коалиция $e\in\mathcal{A}$ такая, что $\mu(e)>0,\ \tilde{x}\in X_e^1$, и, кроме того,

$$u_a(\tilde{x}(a),\tilde{x})>u_a(x(a),x),\quad a\in e,$$

$$\int_e \tilde{x}d\mu=\int_e w d\mu.$$

Как и в п.4.3, наряду с обычными коалициями, будем рассматривать и нечеткие, под которыми в данном случае понимаются вещественнозначные неотрицательные измеримые функции t на A такие, что $\|t\|_\infty\leq 1$ и $\mu(supp\ t)>0$ *). Для нечеткой коалиции t и состояния $x\in X^1$ через $t\times x$ обозначим функцию, определенную по формуле:

$$t\times x(a)=t(a)\cdot x(a),\quad a\in A.$$

Продолжение блокирования на нечеткие коалиции имеет следующий вид.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.16. Состояние $\tilde{x}\in X^1$ F-блокирует $x\in X^1(A)$, если найдутся нечеткая коалиция t и $\tilde{x}_a\in X^1$ ($a\in supp\ t$) такие, что

$$u_a(\tilde{x}_a(a),\tilde{x}_a)>u_a(x(a),x),\quad a\in supp\ t,$$

$$t(a)\cdot\tilde{x}_a=t\times\tilde{x},$$

$$\int_A t\times\tilde{x}d\mu=\int_A t\times w d\mu.$$

Как и ранее, через $IC(\mathcal{E})$ ($IC_F(\mathcal{E})$) будем обозна-

*) $supp\ t=\{a\in A/t(a)\neq 0\}$.

чать множество всех неблокируемых (не F-блокируемых) состояний $x \in X'(A)$. Из условия (4.17) и непосредственно из определений 4.14–4.16 вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Справедливы включения

$$IW(\mathcal{E}) \subseteq IC_F(\mathcal{E}) \subseteq IC(\mathcal{E}).$$

Ключевую роль в установлении условий, обеспечивающих совпадение ядра $IC(\mathcal{E})$ и множества информационных равновесий $IW(\mathcal{E})$, играет теорема Ляпунова о выпуклости значений неатомической векторнозначной меры [26]. Соответствующее исследование целесообразно проводить в два этапа. На первом из них анализируются требования, при которых с помощью подходящей теоремы отделимости можно установить равенство:

$$IW(\mathcal{E}) = IC_F(\mathcal{E}). \tag{4.18}$$

На втором этапе с привлечением необходимого варианта теоремы Ляпунова устанавливаются условия совпадения ядра $IC(\mathcal{E})$ и нечеткого ядра $IC_F(\mathcal{E})$.

При этом неатомичность меры μ играет существенную роль лишь на последнем этапе, в то время как на первом достаточно надлежащей непрерывности функций u_a и, вообще говоря, некоторых дополнительных требований, гарантирующих необходимое представление отделяющего функционала – "кандидата" на роль равновесных цен.

Предлагаемый подход представляется перспективным и в более широком контексте внутренней характеризации равновесных состояний в континуальных моделях как с конечным, так и с бесконечным числом продуктов. В частности, он дает новое прозрачное доказательство известной теоремы Аумана о совпадении ядра и равновесий для стандартной неатомической модели чистого обмена. В этом случае, кроме рутинной проверки равенства $W(\mathcal{E}) = C_F(\mathcal{E})$ достаточно убедиться в эквивалентности обычного и нечеткого блокирования*). Искомая эквивалентность следует из того, что для любой нечеткой коалиции t и состояния $\tilde{x} \in X'$ таких, что $\int_A t \times \tilde{x}\, d\mu = \int_A t \times w\, d\mu$, найдется коалиция $e \in \mathcal{A}$, удовлетворяющая условиям:

---

*) Здесь, модифицируя определение 4.16, будем говорить, что $\tilde{x} \in X'$ F-блокирует $x \in X'(A)$, если найдется такая t, что $u_a(\tilde{x}(a)) > u_a(x(a))$ ($a \in \operatorname{supp} t$) и $\int t \times \tilde{x}\, d\mu = \int t \times w\, d\mu$; $C_F(\mathcal{E})$ – множество неблокируемых в этом смысле состояний из $X'(A)$.

$$e = supp\, t, \quad \int_e \tilde{x}\, d\mu = \int_e w\, d\mu. \qquad (4.19)$$

Действительно, при неатомичности меры μ соотношения (4.19) немедленно вытекают из конечномерной теоремы Ляпунова, примененной к векторнозначной мере $e \longmapsto (\int_e x, \int_e w)$, что и завершает доказательство равенства $W(\mathcal{E}) = C(\mathcal{E})$.

Что касается вальрасовских равновесий в моделях с бесконечным числом продуктов (к таковым вложением типа γ из п.4.I можно привести и информационные равновесия для бесконечного числа участников), то наиболее целесообразным представляется исследование специальных классов неатомических моделей, допускающих тот или иной аналог теоремы Ляпунова. Естественным примером такого рода являются континуальные экономики "конечномерного типа", функции полезности которых имеют вид:

$$u_a(x^\circ, x) = \bar{u}_a(x^\circ, \int_{A_1} x\, d\mu, \ldots, \int_{A_m} x\, d\mu), \ (x^\circ, x) \in \mathcal{X},$$

где $\{A_1, \ldots, A_m\}$ - некоторое фиксированное (не зависящее от $a \in A$) измеримое разбиение A , а $\bar{u}_a$ - функции соответствующего числа переменных. Здесь предпочтения участников определяются собственным потреблением и усредненным потреблением "основных групп населения", описываемых множествами A_k . Помимо того, что эти модели представляют определенный интерес в содержательном плане, в техническом отношении вопрос о совпадении их информационных равновесий и ядер (при некоторых дополнительных предположениях) может быть редуцирован к аналогичному вопросу для стандартных континуальных моделей обмена. При этом редукция осуществляется, в основных чертах, на том же пути, что и для конечномерного случая (см. п.4.I).

В заключение подчеркнем еще раз два существенных, на наш взгляд, обстоятельства. Первое состоит в том, что феномен эквивалентности ядер и равновесий в значительной мере определяется применимостью соответствующей формы теоремы Ляпунова. Второе, в определенной степени вытекающее из первого, - важность исследования нечетких ядер в разного рода бесконечных экономических моделях. И не только потому, что нечеткие ядра - удобный инструмент изучения обычных, но также ввиду из значительно большей универсальности в вопросах внутренней характеризации равновесных состояний. Среди исследований, подтверждающих эту точку зрения, отметим работы [32,48,70].

Содержание настоящей главы демонстрирует применение методологии равновесного анализа к постановке и решению некоторых задач многокритериальной оптимизации. Наряду с типичными моделями согласования интересов рассматриваются и нестандартные ситуации, не укладывающиеся в привычные схемы теории экономического равновесия.

§1. Уравновешенные состояния в задачах векторной оптимизации

Здесь исследуется задача отыскания точки Парето, удовлетворяющей дополнительным условиям типа равенства. Полученные результаты используются для решения задач распределения ресурсов при фиксированных ценах.

1.1. У р а в н о в е ш е н н ы е с о с т о я н и я . Пусть на множестве состояний $X \subset R^{\ell}$ заданы m отображений $U_k : X \to 2^X$, $k \in M = \{1, \ldots, m\}$. Каждое из них описывает некоторое предпочтение (обобщенный критерий оптимальности), если интерпретировать множество $U_k(x)$ как совокупность состояний, строго лучших, чем x. Всюду в дальнейшем считаем выполненными

ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ. A1. Множество X - непустой выпуклый компакт.

A2. Для любого $k = 1, \ldots, m$ отображение U_k иррефлексивно (т.е. $x \notin U_k(x)$ для всех $x \in X$) и его график открыт в $X \times X$; множества $U_k(x)$ либо пусты, либо выпуклы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Состояние $x \in X$ называют П а р е т о - о п т и м а л ь н ы м , е с л и

$$\bigcap_{k \neq r} \bar{U}_k(x) \cap U_r(x) = \emptyset, \quad r \in M,$$

где $\bar{U}_k(x)$ - замыкание множества $U_k(x)$.

При постановке задач многокритериального выбора возникает трудный методологический вопрос: как определить понятие решения, чтобы соответствующее множество содержало "не слишком много элементов". Требование Парето-оптимальности решения представляется естественным, но множество всех оптимальных по Парето точек часто оказывается практически столь же необозримым, как и исходное множество альтернатив, т.е. допустимых решений.

Далеко не всегда ясно, какую из точек Парето следует предпочесть. Чтобы преодолеть указанную трудность, обычно стараются использовать дополнительную информацию о задаче. Для некоторых специальных ситуаций разработаны системы аксиом, определяющие функции выбора [72]. Во многих работах с этой же целью предлагается использовать экспертов [25,61].

В ряде случаев необходимая дополнительная информация о желательном выборе может быть задана с помощью числовых функций. Будем интерпретировать соотношения:

$$g_j(x) = \min_{k \in M} g_k(x) < g_r(x) = \max_{k \in M} g_k(x),$$

где g_k - числовая функция на X как указание эксперта на то, что выбор состояния x означал бы недостаточный учет предпочтения g_j по сравнению с предпочтением g_r. Тем самым для каждого x выделяются критерии, "увеличение" которых наиболее или наименее важно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.2. Состояние $x \in X$ назовем **уравновешенным**, если оно Парето-оптимально и удовлетворяет условиям:

$$g_k(x) = g_r(x), \quad k, r \in M.$$

Подчеркнем, что Парето-оптимальность состояния на множестве

$$X_0 = \{x \in X / g_k(x) = g_r(x), \quad k, r \in M\}$$

относительно отображений $U_k(x) \cap X_0$ необходима, но отнюдь не достаточна для уравновешенности. Различие между этими двумя случаями становится особенно ясным из следующих эвристических соображений. Если размерность X больше, чем $2m-2$, то в "общей ситуации" следует ожидать, что размерность границы Парето для множеств X и X_0 одинакова и равна $m-1$ (см., например, [75]), в то время как совокупность уравновешенных состояний "скорее всего" имеет нулевую размерность.

Пусть $J \subset M$. Состояние $x \in X$ назовем J-уравновешенным, если при замене M на J оно оказывается уравновешенным.

Введем еще два предположения.

А3. Функции g_k непрерывны.

А4. Для любого $J \subset M$ всякое J-уравновешенное, но не уравновешенное состояние x удовлетворяет условию

$$g_v(z) > \min_{k\in M} g_k(z), \quad v \in J.$$

Последнее, наиболее ограничительное допущение характеризует ситуацию как конфликтную. Оно означает, что достижение уравновешенности для любого собственного подмножества критериев неизбежно связано с "ущемлением" некоторых других предпочтений. В некоторых случаях оказывается удобным отказаться от этого предположения, одновременно заменив понятие решения более слабым, о чем будет подробнее сказано ниже.

ТЕОРЕМА I.I. Если выполнены предположения AI-A4, то уравновешенное состояние существует.

Доказательство этой теоремы дано в [46]. В докладе В.М. Полтеровича упоминался и более общий результат, в формулировке которого числовые функции g_k заменяются точечно-множественными отображениями.

По-видимому, уравновешенное состояние, "как правило"", единственно. Но пока эта гипотеза доказана лишь в двух очень частных случаях [45,50].

Если предпочтения заданы функциями полезности $u_k : X \to R$, для вычисления уравновешенного состояния естественно использовать процесс

$$\frac{d\gamma_k}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{z=1}^{m} g_z(\xi(\gamma)) - g_k(\xi(\gamma)), \quad k\in M,$$

где $\xi(\gamma)$ - решение задачи

$$\sum \gamma_k u_k(x) \to \max, \quad x \in X,$$

при $\gamma = (\gamma_k)$. Однако этот процесс (допускающий, как легко понять, многочисленные модификации) обоснован лишь для очень простой модели [45]).

Если $g_k(x) = u_k(x)$, то при оговоренных условиях предлагаемая постановка задачи векторной оптимизации эквивалентна хорошо известной: максимизировать функцию $\min u_k(x)$ при $x \in X$. Более содержательные примеры рассматриваются ниже.

I.2. Распределние ресурсов при фиксированных ценах. Пусть n видов ресурсов распределяются между m участниками и допустимое множество имеет вид:

$$X = \{x = \{c_k\}_{k=1}^{m} \mid \sum_{k=1}^{m} c_k \in Y, \quad c_k \in R_+^n\},$$

где $c_k = (c_{ki})$ – вектор, потребляемый агентом k, Y – множество допустимых векторов чистого выпуска, $Y \subset R_+^n$. Символом $\{c_k\}_{k=1}^{m}$ обозначена последовательность $(c_{11},\dots,c_{1n},\dots$ $\dots,c_{m1},\dots,c_{mn})$ такая, что $X \subset R_+^{mn}$.

Предпочтения участников описываются, как и выше, отображениями U_k, определенными на X. Вектор цен на ресурсы фиксирован и равен $p = (p_i) \in R_+^n$. Правило распределения доходов между участниками задается системой скалярных функций $\varphi_k(\beta)$, $k \in M$, $\beta \in R_+$, где β – суммарная величина дохода.

Нижеследующее определение обобщает близкие понятия BCPE-распределения и p-оптимума, введенные соответственно в [45,50].

Распределение ресурсов $x^* = \{c_k^*\}_{k=1}^{m}$ называется p-оптимальным [45], если оно Парето-оптимально для системы отображений U_k, $k \in M$, на множестве X и сверх того удовлетворяет бюджетным ограничениям

$$pc_k^* = \varphi_k(p \cdot \sum_{z=1}^{m} c_z^*), \quad k \in M.$$

Наряду с А1-А4 будем использовать следующие предположения.

А5. $x' \in U_z(x)$, при любых $x = \{c_k\}_{k=1}^{m}$, $x' = \{c_k'\}_{k=1}^{m}$ из X таких, что $c_z' > c_z$, $c_z' = c_z$.

А6. Множество Y – выпуклый компакт в R_+^n.

А7. Функции φ_k непрерывны, неотрицательны и удовлетворяют тождеству

$$\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(\beta) = \beta, \quad \beta \in R_+.$$

Условие А5 вместе с предположением А2 фактически означает, что предпочтение участника z определяется лишь количествами имеющихся у него ресурсов.

ТЕОРЕМА 1.2. *Пусть $p > 0$ и выполнены условия А2,А5-А7. Тогда p-оптимальное распределение существует.*

Приведем доказательство этого факта, основанное на применении теоремы 1.1. Для производного $x \in X$ положим:

$$g_k(x) = p \cdot c_k - \varphi_k(p \cdot \sum_{k=1}^{m} c_k).$$

Из предположения А5 следует, что уравновешенное состояние

в этой ситуации является ρ-оптимальным. Поэтому достаточно проверить применимость теоремы I.I.

Выполнение условий AI-A3 очевидно. Убедимся в справедливости предположения A4. Если состояние $x=\{c_k\}_{k=1}^{m}$ $\mathcal{J}$-уравновешено, $\mathcal{J}\neq M$, то в силу допущений A2, A5

$$c_k=0_m,\ k\in M\setminus\mathcal{J}.$$

Если $\varphi_k(p\cdot\sum_{k=1} c_k)=0,\ k\in\mathcal{J}$, то состояние x уравновешено. В противном случае найдется $t\in\mathcal{J}$, для которого $g_t(x)<0$, что и требовалось доказать.

Для случая, когда Y содержит единственный вектор и φ_k линейны, существование ρ-оптимальных распределений было доказано в [45,50,63]. В [50] предпочтения описывались гладкими возрастающими квазивогнутыми функциями полезности; в [45] гладкость не предполагалась. В [63] предпочтения были подчинены условиям A2 и A5. Модель с производством рассматривалась в [45], но в несколько ином варианте.

Помимо рассмотренной здесь задачи распределения ресурсов при фиксированных ценах в [50] рассматривалась проблема оптимального перспективного планирования с конечным горизонтом и заданными отношениями стоимости потребляемых за каждый год материальных благ ко всем имеющимся ресурсам. Существование решения этой задачи при ряде естественных ограничений также получается из теоремы I.I. Тем самым демонстрируется наличие широкого спектра задач, сводимых к отысканию уравновешенного решения некоторой многокритериальной задачи.

§2. Обратные функции спроса и равновесие

Излагаемая ниже проблематика в основном примыкает к рассмотренной в предыдущем параграфе. Отличительной чертой является задание дополнительных условий в форме неравенств. Кроме того, используется специфический способ описания критериев, интерпретируемый далее как обратный спрос. Приводятся примеры, поясняющие экономический смысл используемых математических конструкций.

2.I. Обратные функции спроса и уравновешенные состояния. С момента зарождения теории экономического равновесия предпочтения экономических агентов описывались с помощью функции спроса либо с

помощью функций полезности. Позже для этой цели стали использовать предпорядки [41] и точечно-множественные отображения, сопоставляющие каждому состоянию или набору потребительских благ все более предпочтительные с точки зрения соответствующего экономического агента [58]. При всей универсальности этого способа его использование в моделях планирования, опирающихся на реально имеющуюся информацию, может оказаться весьма затруднительным ввиду неполноты информации о предпочтениях агентов. Кроме того, предпочтения экономических агентов могут зависеть от текущих цен и даже полностью определяться ценами. В таких случаях предпочтения удобно описывать в виде обратных функций спроса [62] или их естественных обобщений [4]. В этих же терминах можно описывать и классические модели равновесия, заменяя функции полезности их субдифференциальными отображениями, а функции спроса - точечно-множественными отображениями, сопоставляющими каждому вектору спроса множество всех векторов цен, порождающих этот спрос. Дальнейшее формальное изложение использует результаты работы [23].

Пусть X - выпуклый компакт в R^ℓ, называемый далее множеством альтернатив, w - выделенная альтернатива, а $\{G_k\}_{k=1}^m$ - набор точечно-множественных отображений $G_k : X \to 2^{R^\ell}$. Относительно каждого из отображений G_k предполагается выпуклость и компактность образов $G_k(x)$ при всех $x \in X$, полунепрерывность сверху и (в некоторых случаях) монотонность. Последнее означает, что для любых $x_1, x_2 \in X$ и $y_1 \in G_k(x_1), y_2 \in G_k(x_2)$ выполняются неравенства

$$\langle (y_1 - y_2), (x_1 - x_2) \rangle \leq 0,$$

где остроугольные скобки означают скалярное произведение. Если из условия $x_1 \neq x_2$ следует строгое неравенство, то G_k называется строго монотонным. Через A обозначим стандартный симплекс в R^m с элементами $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Тройка $(\bar{x}, \{y_k\}_{k=1}^m, \alpha)$, где $\bar{x} \in X, y_k \in G_k(\bar{x})$ для каждого $k = \overline{1,m}$ и $\alpha \in A$, называется р а в н о в е с и е м, если выполняются неравенства

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot y_k \cdot (x - \bar{x}) \leq 0, \quad x \in X; \quad y_k (w - \bar{x}) \leq 0, \quad k \in M.$$

Определяемое таким образом равновесие представляет собой естественное обобщение понятия квазиравновесия [24]. Основные отличия заключаются в более универсальном способе задания пред-

почтений и самого множества альтернатив. В [24] используются функции полезности, заданные на прямом произведении выпуклых компактов. Это не уменьшает технических трудностей, но существенно сужает возможности применения модели. С другой стороны, можно рассматривать равновесие как обобщение понятия наиболее предпочтительной точки [4]. В самом деле, если положить $m=1$, т.е. рассмотреть задачу с единственным точечно-множественным отображением $G: X \to 2^{R^\ell}$, то равновесием естественно считать пару $(\bar{x}, \bar{y})$, где $\bar{x} \in X$ и $\bar{y} \in G(\bar{x})$, удовлетворяющую неравенству $\bar{y}(x-\bar{x}) \leq 0$ при всех $x \in X$. Единственное отличие от [4] в знаке неравенства связано с тем, что здесь выписано естественное обобщение точки максимума вогнутой функции, а в [4] - минимума выпуклой.

ТЕОРЕМА 2.1. *При монотонных критериях G_k, $k=\overline{1,m}$, равновесие существует.*

Доказательство этого утверждения есть в [23], но, по всей видимости, утверждение остается верным и без предположения монотонности критериев. В частном случае, когда вместо точечно-множественных отображений G_k заданы точечно-точечные G_k, существование равновесия следует из теоремы I.I. Иными словами, справедлива

ТЕОРЕМА 2.2. *Если функции $f_k: X \to R^\ell$ непрерывны, то найдутся $\bar{x} \in X$ и $\alpha \in A$ такие, что*

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k f_k(\bar{x})(x-\bar{x}) \leq 0, \quad x \in X; \quad f_k(\bar{x})(w-\bar{x}) \leq 0, \quad i \in M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $g_k(x) = f_k(x)(x-w)$ и

$$U_k(x) = \{y \in X / g_k(x)(y-x) > 0\}$$

для каждого $k \in M$. Легко убедиться в том, что условия A1-A3 теоремы I.I выполняются. Следовательно, существует J-уравновешенное состояние $\bar{x} \in X$, удовлетворяющее неравенствам

$$f_k(\bar{x})(w-\bar{x}) \leq f_r(\bar{x})(w-\bar{x}) = 0, \quad k \in M / J, \quad r \in J.$$

В самом деле, если условие A4 теоремы I.I выполняется, то существует уравновешенное состояние и в качестве J можно взять M. Если же условие A4 не выполняется, то это буквально и означает существование J-уравновешенного состояния с нужными свойствами. Далее, если не существует $\alpha \in A$ такого, что

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k f_k(\bar{x})(x-\bar{x}) \le 0, \quad x \in X,$$

то по теореме Дубовицкого - Милютина найдется $y \in X$, для которого

$$f_k(\bar{x})(y-\bar{x}) > 0 \quad \text{для всех } k,$$

а это противоречит Парето-оптимальности $\bar{x}$. Следовательно, найдется $\alpha \in A$ с нужными свойствами, что и требовалось для завершения доказательства теоремы.

Как уже отмечалось, условие А4 теоремы I.I означает конфликтность интересов, подлежащих согласованию. В следующем пункте рассматривается экономический пример, в котором антагонизма заведомо нет, но существует равновесие в смысле определения, сформулированного выше.

2.2. Одновременное построение плана, цен и рентных оценок земли. Для иллюстрации общей схемы выбора решения, изучавшейся в п.2.I, ниже строится равновесная модель одновременного получения плана использования посевных площадей, рентных оценок земли и системы закупочных цен на сельскохозяйственную продукцию. В качестве основного составляющего элемента предлагаемой равновесной модели используется схема вычисления закупочных цен и рентных оценок земли при заданной структуре посевных площадей, аналогичная описанной в [II] и [22]. Эта схема предложена В.А.Булавским и опробована на реальной статистической информации. Результаты расчетов практически полностью совпадают с полученными ранее Л.В.Канторовичем и его учениками [II,22].

Пусть имеется n сельскохозяйственных культур, выращиваемых в m различных по качеству земли районах или хозяйствах. Площадь, занятую под посевы культуры i в районе k условимся обозначать через x_{ki} , тогда для каждого k суммарная занятая площадь постоянна. Учитывая неотрицательность площадей, отсюда можно сделать вывод, что

$$X = \{x = (x_{11}, \ldots, x_{mn}) \in R_+^{mn} \,|\, \sum_{i=1}^{n} x_{ki} = \sum_{i=1}^{n} w_{ki},\ k = \overline{1,m}\},$$

где w - сложившаяся структура посевных площадей. Единые для всех районов закупочные цены $u = (u_1, \ldots, u_n)$ и рентные оценки земли $v = (v_1, \ldots, v_m)$, свои в каждом отдельном районе, вычис-

ляются на основе информации об урожайности всех культур a_{ki} и полных затратах по их выращиванию s_{ki} (в расчете на гектар). Помимо этого заданными считаются единый норматив прибыли $\rho > 0$ и некоторая структура посевных площадей x, не обязательно совпадающая с w. В основу расчета полагаются такие принципы, как:

получение заданной нормативной прибыли по совокупности районов в целом:

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} u_i a_{ki} \cdot x_{ki} = (1+\rho) \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_{ki} s_{ki} ;$$

отсутствие сверхприбыльных районов:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ki} (a_{ki} u_i - v_k - s_{ki}) = 0, \quad k = \overline{1,m} ;$$

и сверхприбыльных сельскохозяйственных культур:

$$\sum_{k=1}^{m} x_{ki} (a_{ki} u_i - v_k - s_{ki}) = 0, \quad i = \overline{1,n} .$$

Получаемая в результате система с $m+n$ переменными состоит из $m+n+1$ уравнений, среди которых не более чем $m+n$ независимых, и потому разрешима. Для простоты условимся считать, что на всем множестве X эта система разрешима однозначно. Помимо чисто технических причин для такого предположения существует и экономическое обоснование. Дело в том, что в исходном состоянии w разрешимость должна быть однозначной (иначе можно рассматривать несколько отдельных задач). Следовательно, однозначная разрешимость имеет место и в некоторой окрестности состояния w ; с другой стороны, обычно возможны лишь незначительные изменения посевных площадей с сохранением тех же удельных затрат и урожайностей, поэтому множество X можно считать содержащимся в рассматриваемой окрестности состояния w .

Таким образом, каждому допустимому распределению посевных площадей x однозначно сопоставляется $m+n$ -мерный вектор $(u(x), v(x))$, причем $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно зависят от коэффициентов уравнений, т.е. от x . Полагая

$$(f_k(x))_{ki} = a_{ki} u_k(x) - v_k(x) - s_{ki} ; \quad (f_k(x))_{ji} = 0, \; k \neq j,$$

для каждого $k = \overline{1,m}$, получим набор непрерывных на X векторных полей f_k , $k = \overline{1,m}$, со значениями в пространстве R^m . При фиксированном $\bar{x}$ линейный функционал $f_k(\bar{x})$ сопоставляет каждому состоянию x из X прибыль района k , вычисленную в ценах, соответствующих $\bar{x}$, т.е.

$$f_k(\bar{x})\cdot x=\sum_{i=1}^{n} x_{ki}\,(\alpha_{ki}\,u_i(\bar{x})-v_k(\bar{x})-s_{ki}).$$

Состояние $\bar{x}$ из X условимся называть равновесным, если найдется набор коэффициентов $\alpha\in A$ такой, что

$$\sum_{k=1}^{m}\alpha_k f_k(\bar{x})(x-\bar{x})\leqslant 0$$

для всех $x\in X$ и $f_k(w-\bar{x})\leqslant 0$ для $k\in M$.

Существование равновесного состояния следует из теоремы I.2.

Содержательный смысл соотношений, фигурирующих в определении равновесного состояния, заключается в том, что невозможно при заданных (равновесных) ценах и рентных оценках земли увеличить прибыль сразу всех районов, а прибыль каждого отдельного района в исходном состоянии не выше, чем в равновесном. Последнее достаточно важно, так как в противном случае некоторые районы оказываются экономически заинтересованы в сохранении исходной, возможно, не оптимальной по Парето структуры посевных площадей. Заметим еще, что обычно имеется жесткое задание по каждой культуре (по району в целом), т.е. для каждого $i=\overline{1,n}$ имеем

$$\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ki}\,x_{ki}\geqslant\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ki}\,w_{ki}\,.$$

Это условие будет выполняться автоматически, если ввести еще n функционалов $f_{k+m}(x)$, положив

$$(f_{k+m}(x))_{ki}=\alpha_{ki}\,;\quad (f_{k+m}(x))_{ji}=0,\ j\neq k,$$

и добавив в определение равновесного состояния соответствующие неравенства. Такой подход имеет некоторые преимущества чисто вычислительного плана.

Наряду с рассмотренной выше возможна и несколько иная модель равновесного типа, использующая для построения критериев оптимальности то же самое векторное поле закупочных цен u и рентных оценок v . В этой модели носителями экономических интересов можно считать монокультурные отрасли.

§3. Оптимальная стратегия обновления фондов и модель экономического равновесия

Вопрос о выборе пропорций между потреблением и накоплением в классических неймановских моделях динамики разрешается теоремами о магистралях, которые утверждают, в частности, что все оптимальные на бесконечном горизонте планирования траектории асимптотически приближаются к "магистральной" траектории со стационарной структурой. Такие же выводы при различных предпосылках получены и для моделей с потреблением и невоспроизводимостью некоторых ресурсов (моделей рамсеевского типа). При переменной технологии магистраль оказывается нестационарной, но "магистральный эффект" не пропадает. Кроме того, известно, что для каждой оптимальной траектории существует траектория равновесных цен (стимулирующие цены) такая, что если каждый производитель будет максимизировать прибыль в этих ценах, то будет реализована оптимальная траектория (см. обзор в [47]). Упомянутые результаты получены в условиях выпуклости производственных множеств.

Поставим вопрос о том, сохраняются ли эти выводы, если в модели с потреблением и с невоспроизводимостью части ресурсов (труда) производственные функции имеют следующий вид:

$$y_i(t)=\alpha_i^{t}\int_0^{S_i(t)}\alpha_i^{-\tau}\beta_i^{\tau}a_i x_i(t-\tau)\,d\tau. \qquad (3.1)$$

Здесь $y_i(t)$ – выпуск i-й отрасли; $x_i(t)$ – капиталовложения в нее; a_i – коэффициент продуктивности; $\alpha_i>1$ – коэффициент роста продуктивности (технического прогресса); $\beta_i<1$ – коэффициент падения продуктивности (физического старения оборудования); $S_i(t)$ – срок службы оборудования (оборудование старше этого срока не используется в момент t).

При этом общий объем используемых во всех отраслях фондов в каждый момент ограничен объемом имеющихся трудовых ресурсов при фиксированной пропорции между трудом и капиталом. Имеющаяся взаимозаменяемость этих факторов отражается введением различных отраслей (предприятий), выпускающих один и тот же продукт.

Подобные модели называются моделями с материализованным техническим прогрессом. Асимптотика стационарных по структуре траекторий исследуется в [37].

Для модели с непрерывным временем, включающей две отрасли ("конечный продукт" и "оборудование", причем производство оборудования описывалось упрощенно) удалось показать оптимальность стационарной по структуре траектории $(x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t), s_1(t), s_2(t))$ и вывести формулу для вычисления оптимального срока обновления оборудования, который на этой траектории постоянен. Из этих результатов вытекает, что периодически колеблющееся обновление оборудования при равномерном техническом прогрессе не является более предпочтительным по сравнению с постоянной траекторией.

Технические трудности доказательства соответствующих утверждений состоят в том, что допустимое множество невыпукло по переменным $s(t)$ и теоремы экономической динамики не применимы. Применить же теорию оптимального управления также не удается из-за сложного вида интегральных уравнений (уравнения с запаздыванием). Это не позволило получить утверждение магистрального типа. Доказательство же оптимальности стационарной траектории получено построением ступенчатой вариации и прямой проверкой условий первого и второго порядка.

Для непрерывной модели найдена также равновесная траектория в игре типа экономического равновесия. В этой игре продавец труда покупает "конечный продукт", максимизируя функцию полезности, а производители "конечного продукта" и "фондов" максимизируют прибыль. Если игроки предполагают сохранение текущих цен неизменными, то равновесным оказывается упоминавшееся выше оптимальное решение. Более сильные результаты такого характера получены для модели с дискретным временем, двумя продуктами, но многими производственными способами в обеих отраслях, описанными дискретными аналогами соотношения (3.I). Оказывается, что эта модель довольно просто сводится к рамсеевской модели, уже обладающей выпуклостью, но имеющей некоторые особенности (наличие подмоделей и др.). Эти особенности приводят к тому, что применение упоминавшихся теорем экономической динамики оказывается возможным лишь после дополнительных усилий. Тем не менее удается установить теоремы о характеристике (равновесных или стимулирующих ценах) и при отсутствии технического прогресса в фондообразующей отрасли теоремы о магистралях. Без последнего условия магистральный эффект в такой модели, видимо, также имеет место, но магистраль должна оказаться переменной во времени.

§4. Операторы агрегирования, сохраняющие экстремальные свойства сбалансированных распределений

Один из типичных приемов свертывания информации в системах с большим числом участников состоит в рассмотрении некоторых групп этих участников в виде единого целого, представляющего собой подходящий агрегат составляющих его частей. Ниже рассматриваются некоторые способы агрегирования характеристик участников экономического обмена, сохраняющие такие свойства распределений, как эффективность, неблокируемость и равновесность. Кроме того, устанавливается линейность и невырожденность операторов "укрупнения", переводящих множество сбалансированных распределений исходной модели обмена во множество сбалансированных распределений ее агрегата.

Рассмотрим стандартную модель обмена:

$$\mathcal{E} = \langle N, \{X_i, w^i, \alpha_i\}_{i\in N} \rangle,$$

где $\alpha_i \subset X_i \times X_i$ - бинарные отношения, определяющие предпочтения участников $i\in N$ на их потребительских множествах X_i.

Агрегирование исходной модели $\mathcal{E}$ определяется разбиением множества N на непересекающиеся группы участников $S_1,\dots,S_m \subset N$ такие, что $S_j \neq \emptyset$ для всех $j=1,\dots,m$. Соответствующие операторы агрегирования потребительских наборов и предпочтений этих групп имеют вид:

$$f=(f_1,\dots,f_m), \qquad \Phi=(\Phi_1,\dots,\Phi_m),$$

где

$$f_j : \prod_{i\in S_j} X_i \to \tilde{X}_j ;$$

$$\Phi_j : \prod_{i\in S_j} \mathcal{P}(X_i) \to \mathcal{P}(\tilde{X}_j).$$

Здесь $\tilde{X}_j = f_j(\prod_{i\in S_j} X_i)$, а через $\mathcal{P}(X_i)$ ($\mathcal{P}(\tilde{X}_j)$) обозначается множество всех бинарных отношений на X_i ($\tilde{X}_j$).

Положим $M=\{1,\dots,m\}$, $\tilde{w}^j = f_j(w^{S_j})$, $\tilde{\alpha}_j = \Phi_j(\alpha_{S_j})$, где $w^{S_j} = \prod_{i\in S_j} w^i$; $\alpha_{S_j} = \prod_{i\in S_j}\alpha_i$ и построим новую модель обмена $\mathcal{E}^A$, отвечающую разбиению $\{S_1,\dots,S_m\}$ и оператору агрегирования $A=(f,\Phi)$:

$$\mathcal{E}^A = \langle M; \{\tilde{X}_j, \tilde{w}^j, \tilde{\alpha}_j\}_{j\in M} \rangle.$$

Согласно определению, агрегированная модель $\mathcal{E}^A$ получается заменой каждой группы участников S_j единственным участником j, характеризующимся потребительским множеством $\tilde{X}_j = f_j(\prod_{i\in S_j} X_i)$, начальным запасом $\tilde{w}^j = f_j(w^{S_j})$ и предпочтением $\tilde{\alpha}_j = \varphi_j(\alpha_{S_j})$. Способ задания операторов f и φ отражает форму учета исходной информации об участниках групп S_j, $j = 1,\dots,m$.

Всюду в дальнейшем предполагается, что $X_i = R^l_+$ для всех $i \in N$ и, кроме того,

$$\sum_{i\in N} w^i \gg 0.$$

Обозначим через $X(N)$ ($X_A(N)$) множество сбалансированных распределений модели $\mathcal{E}$ ($\mathcal{E}^A$) и дадим характеристику одного класса операторов f, удовлетворяющих условию

$$f(X(N)) = X_A(N). \qquad (4.1)$$

Напомним, что оператор f называется монотонным, если из $x \geq x'$ вытекает неравенство $f(x) \geq f(x')$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть оператор агрегирования состояний $f = (f_1,\dots,f_m)$ непрерывен и монотонен. Тогда равенство (4.1) имеет место тогда и только тогда, когда для всех $j \in M$

$$f_j(\prod_{i\in S_j} x^j) = \psi(\sum_{i\in S_j} x^i),$$

где ψ – невырожденный положительный линейный оператор, обладающий положительным обратным оператором ψ^{-1}.

Перейдем к рассмотрению оператора агрегирования предпочтений $\varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_m)$. В дальнейшем относительно φ используются следующие

ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ. A1. Анонимность. Если $\sigma_j : S_j \to S_j$ – произвольная перестановка S_j, то $\varphi_j(\alpha_{S_j}) = \varphi_j(\alpha^{\sigma_j}_{S_j})$, где $\alpha^{\sigma_j}_{S_j} = \prod_{i\in S_j} \alpha_{\sigma_j(i)}$.

A2. Единогласие. Если $\alpha_i = \alpha$ для всех $i \in S_j$, то $\varphi_j(\alpha_{S_j}) = \alpha$.

A3. Монотонность. Если $x^i \alpha_i x'^i$ для всех $i \in S_j$, то $f_j(x^{S_j}) \tilde{\alpha}_j f_j(x'^{S_j})$. Если при этом $x^i \alpha^{\circ}_i x'^i$ для некоторого

$i_0 \in S_j$, то $f_j(x^{S_j}) \tilde{\alpha}_j^{\circ} f(x'^{S_j})$*.

Условия А1–А3 хорошо известны, их подробное обсуждение можно найти в работах по теории группового выбора (в таких, например, как [18,74]). Отметим лишь, что условие А3 несколько видоизменено по сравнению со стандартным ввиду того, что в рассматриваемом случае агрегированные предпочтения определяются на агрегированном потребительском множестве.

Следующее предложение показывает, что при выполнении условий А1–А3 агрегирование неэффективных распределений не может дать эффективных распределений в $\mathcal{E}^A$.

Обозначим через $\Theta(\mathcal{E})$ ($\Theta(\mathcal{E}^A)$) множество Парето-оптимальных распределений модели $\mathcal{E}$ ($\mathcal{E}^A$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть $f(X(N)) = X_A(N)$ и оператор Φ удовлетворяет предположениям А1–А3. Тогда из $x \in \Theta(\mathcal{E})$ вытекает $f(x) \in \Theta(\mathcal{E}^A)$.

Обозначим через $f^{-1} = (f_1^{-1}, \dots, f_m^{-1})$ точечно-множественное отображение дезагрегирования, действующее из $\prod_{j \in M} X_j$ в $\prod_{i \in N} X_i$. Здесь f_j^{-1} ($j \in M$) определяются следующим образом:

$$f_j^{-1}(\tilde{x}^j) = \{x^{S_j} \in \prod_{i \in S_j} X_i \mid f_j(x^{S_j}) = \tilde{x}^j\}.$$

В дальнейших рассмотрениях наряду с А1–А3 будем использовать следующее предположение относительно операторов Φ.

А4. Эффективность. Если $\tilde{x}^j \tilde{\alpha}_j \tilde{y}^j$ ($j \in M$), то для каждого $y^{S_j} \in f_j^{-1}(\tilde{y}^j)$ существует $x^{S_j} \in f_j^{-1}(\tilde{x}^j)$ такое, что $x^i \alpha_i y^i$ ($i \in S_j$), причем в случае $\tilde{x}^j \tilde{\alpha}_j^{\circ} \tilde{y}^j$ среди элементов S_j найдется участник i_0, для которого $x^{i_0} \alpha_{i_0}^{\circ} y^{i_0}$.

Выполнение условия А4 для операторов f и Φ означает, что если в агрегированной модели $\mathcal{E}^A$ состояние $\tilde{y}^j$ более предпочтительно для участника $j \in M$, чем состояние $\tilde{x}^j$, то при любом дезагрегировании x^{S_j} состояния $\tilde{x}^j$ можно так дезагрегировать состояние $\tilde{y}^j$, что при этом каждый из участников группы S_j в исходной модели не ухудшает (а может быть, и улучшает) свое состояние по сравнению с x^{S_j}.

Следующее утверждение является уточнением предложения 4.1.

---

*) Здесь, как обычно, $x \alpha y \Leftrightarrow (x,y) \in \alpha$, $x \alpha^{\circ} y \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x,y) \in \alpha \ \& \ (y,x) \notin \alpha$, $x^{S_j} = \prod_{i \in S_j} x^i$.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $f(X(N))=X_A(N)$ и оператор $\Phi=(\Phi_1,\dots,\Phi_m)$ удовлетворяет условиям преположений А1-А4. Тогда имеет место равенство

$$f(\theta(\mathcal{E}))=\theta(\mathcal{E}^A).$$

Приведем некоторые результаты о сохранении таких более тонких экстремальных свойств, как неблокируемость и равновесность. Как обычно, через $C(\mathcal{E})$ и $C(\mathcal{E}^A)$ обозначим ядра (множества неблокируемых распределений) моделей $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}^A$ соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Если $f_j(x^{S_j})=k\sum_{i\in S_j}x^i$ для всех $j\in M$, $k>0$ и оператор Φ удовлетворяет условиям А1-А4, то выполняется включение

$$f(C(\mathcal{E}))\subseteq C(\mathcal{E}^A).$$

Аналогичный результат справедлив и для множества $W(\mathcal{E})$ равновесных распределений модели $\mathcal{E}$. Именно, агрегаты распределений из $W(\mathcal{E})$ содержатся в множестве $W(\mathcal{E}^A)$ равновесных состояний модели $\mathcal{E}^A$ даже при более слабых предположениях, нежели в предложении 4.2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Пусть f удовлетворяет требованиям предложения 4.2, а для Φ выполняются условия А1-А3. Тогда справедливо включение

$$f(W(\mathcal{E}))\subseteq W(\mathcal{E}^A).$$

В заключение отметим, что "работоспособность" приведенных результатов в значительной степени зависит от решения типичных задач теории группового выбора: выяснение области реализуемости соответствующих правил агрегирования предпочтений, построение конкретных правил такого типа и т.п. В частности, открытым остается вопрос о сколько-нибудь общих свойствах предпочтений α_i, допускающих агрегирование, удовлетворяющее условиям А1-А4.

§5. Экономическая интерпретация декомпозиционных алгоритмов

Ниже обсуждаются возможности экономической интерпретации ряда декомпозиционных алгоритомв, а также результаты расчетов по оптимизации большой экономической системы, допускающей естественное разбиение на две подсистемы.

Модель, на которой демонстрируются основные идеи алгоритмов, формально описывается в виде двухблочной задачи линейного программирования со связующими переменными:

$$c_A z_A + c_B z_B \to min,$$

$$A_A z_A + B_A x \le b_A,$$

$$A_B z_B + B_B x \le b_B.$$

Выделяя подзадачи

$$f_A(x) = min\, c_A z_A,\ A_A z_A \le b_A - B_A x \tag{5.I}$$

и

$$f_B(x) = min\, c_B z_B,\ A_B z_B \le b_B - B_B x, \tag{5.2}$$

эту задачу можно переформулировать как задачу отыскания оптимального значения x^* связующих переменных

$$v^* = min\{f_A(x) - f_B(x)\} = f_A(x^*) + f_B(x^*).$$

Переменные z_A и z_B можно рассматривать как внутренние переменные подзадач (5.I) и (5.2) соответственно со значениями, которые становятся известными после решения этих подзадач при фиксированном значении связующих переменных. Функции $f_A(x)$ и $f_B(x)$ кусочно-линейны и могут принимать бесконечные значения при тех x, которым соответствуют пустые множества допустимых решений (5.I) или (5.2).

Соотношения обычной выпуклой двойственности в применении к задаче отыскания оптимального x^* приводят к следующему равенству:

$$\min_x \{f_A(x) + f_B(x)\} = -\min_p \{h_A(-p) + h_B(p)\},$$

где через $h_A(-p)$ обозначена функция, сопряженная к $f_A(x)$, т.е.

$$h_A(-p)=\sup_x\{-px-f_A(x)\}=-x_p p-f_A(x_p)=$$

$$=\min\{c_A z_A+px \mid A_A z_A+B_A x\leq b_A\}.$$

Сопряженную функцию можно интерпретировать как платеж, получаемый в подзадаче при заданных ценах p на связующие переменные x.

К задаче отыскания x^* можно применить два различных декомпозиционных алгоритма. Первый из них основан на идее замены исходной задачи последовательностью задач

$$\min_x\{f_A(x)+f_B^k(x)\}=v_k\leq v^*,$$

где $f_B^k(x)$ – аппроксимация функции $f_B(x)$, полученная на k-й итерации.

Предполагается, что эта аппроксимация получается путем конструирования кусочно-линейной функции, опорной к $f_B(x)$, с использованием значения этой функции и ее субградиента, вычисляемого при решении вспомогательной задачи. Данная аппроксимация постепенно уточняется, направляя последовательность решений вспомогательных задач к решению исходной.

Получаемый в результате алгоритм вполне удовлетворительно справляется с задачами малой и средней размерности. Применяя его к двойственной части задачи, т.е. к

$$-\min_p\{h_A(-p)+h_B(p)\},$$

можно использовать оптимальное решение, полученное в результате одной большой итерации, в качестве начального базиса для следующей, благодаря чему число внутренних симплексных итераций быстро убывает.

Тем не менее этот алгоритм не полностью использует информацию, получаемую в процессе оптимизации. Другой недостаток его состоит в том, что на каждом шаге получается лишь односторонняя оценка оптимума: либо верхняя; либо нижняя, что затрудняет оценку скорости сходимости.

К тому же во многих практических случаях значения двойственных переменных, которые могут быть интерпретированы как теневые цены на связующие переменные, оказываются полезными для качественного анализа модели. Однако описанный алгоритм не поз-

поляет получить значения двойственных переменных немедленно, если решена прямая задача. Если же применить его к двойственной задаче, то потребуются дополнительные усилия для получения решения прямой.

Эти соображения наталкивают на идею другого алгоритма, который основан на одновременном использовании аппроксимации как прямой, так и двойственной задачи, что приводит к получению верхней и нижней оценок решения на каждом шаге алгоритма и, как показали численные эксперименты, лучшую сходимость по сравнению с первым.

Теоретическое обоснование алгоритма дано в [68], здесь же только объясняется используемая идея.

Основной шаг алгоритма включает решение двух вспомогательных задач:

$$\min_x \{f_A(x)+f_B^k(x)\} = f(x^k)+f_B^k(x^k) = v_k \tag{5.3}$$

и

$$\min_p \{h_A^k(-p)+h_B(p)\} = h_A^k(-p^{k+1})+h_B(p^{k+1}) = -u_k, \tag{5.4}$$

где решение (5.3) используется для модернизации аппроксимации функции $h_A(-p)$:

$$h_A^k(-p) = \max\{h_A^{k-1}(-p),\ -x^k p - f_A(x^k)\},$$

а решение задачи (5.4) – для модернизации аппроксимации функции

$$f_B^k(-x) = \max\{f_B^{k-1}(x),\ xp^k - h_B(p^k)\}.$$

Если решена вспомогательная задача (5.4), полученное оптимальное решение можно использовать в качестве исходной точки для следующего шага, похожим образом можно использовать и решение задачи (5.4). Обе стратегии приводят к резкому сокращению числа симплексных итераций внутри каждого шага.

Оба рассмотренных выше алгоритма допускают прозрачную экономическую интерпретацию. Первый из них можно рассматривать как поэтапное согласование планов двух (или более) связанных между собой экономических агентов. Алгоритм естественным образом распространяется на случай, когда число блоков (или участников) больше двух. Его специфической чертой является наличие у каждого экономического агента некоторого упрощенного представления о других агентах, т.е. наличие некоторой модели ситуации, изменяющейся во времени. Следует,однако,заменить, что при увеличе-

нии числа блоков скорость сходимости алгоритма (или процесса корректировки плана) резко снижается.

Второй из рассмотренных алгоритмов можно понимать как диалог двух экономических агентов, одного из которых естественно называть продавцом, а другого - покупателем. Наиболее естественная ситуация, когда продавец назначает цены, а покупатель - объем покупок, но в принципе возможна и противоположная ситуация. При решении задачи оптимизации энергоснабжения в большой системе [69] в качестве продавца различных видов электроэнергии выступал блок производителей энергии, а в качестве покупателя - блок потребителей. При смене ролей, т.е. переходе к аппроксимации двойственной задачи в блоке потребителей энергии резко падала скорость сходимости процесса, что дает определенные основания считать естественным реально существующее распределение ролей.

ГЛАВА 3. ЭКОНОМИЧЕСКИЕ МЕХАНИЗМЫ РАЦИОНИРОВАНИЯ: РЕАЛИЗУЕМОСТЬ, ЭФФЕКТИВНОСТЬ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Реально наблюдаемые экономические системы обнаруживают в себе черты трех принципиально различных способов организации и функционирования экономики.

Один из них полностью характеризуется наличием централизованного планирования, когда каждому экономическому агенту задается план выпуска продукции и соответствующий план материально-технического снабжения. При этом доход участников определяется функциями, зависящими, главным образом, от их производственной деятельности и действующих в экономике цен.

Другой способ соответствует доминированию экономических механизмов рыночного типа, где цены определяются , в основном, в процессе уравнивания спроса и предложения товаров и услуг. В этом случае, как правило, нет планов производства и материально-технического снабжения в натуральных показателях. Государственное регулирование осуществляется с помощью экономических рычагов типа нормативов отчислений от прибыли, порядка отчетов перед финансовыми органами и т.п.

Наконец, третий способ организации и функционирования присущ экономической деятельности, запрещенной существующими в системе законами. Это может быть, например, производство и торговля наркотиками, игорный бизнес, различные формы рэкета (т.е. то, что называется обычно теневой или подпольной экономикой).

Выделение и изучение в чистом виде упомянутых способов и отвечающих им экономических механизмов является обычным приемом, используемым в теоретическом анализе. Настоящая глава посвящена рассмотрению некоторых механизмов рационирования, превалирующих в экономике централизованного планирования. Наряду с выяснением условий существования и эффективности согласованных состояний затрагиваются также некоторые вопросы взаимодействия (симбиоза) рыночных механизмов и механизмов рационирования.

§I. Механизмы рационирования и существование согласованных состояний

Достаточно общая модель экономики централизованного планирования задается с помощью следующей информации:

$$\mathcal{E} = \langle N, \{X_i, Y_i, u_i, a^i, b^i, A_i, B_i\}_N, Q \rangle, \quad (I.I)$$

где $a^i \in R^l_+$ – плановое задание для участника $i \in N$, $b^i \in R^l_+$ – план его обеспечения ресурсами, A_i, B_i – множества используемых в экономике функций распределения доходов α_i : $\prod_N Y_i \times Q \to R$ и функций рационирования в сфере потребления β_i : $\prod_N Y_i \to X_i$ ($i \in N$), $Q \subseteq R^l$ – множество допустимых цен, а составляющие $N = \{1, \ldots, n\}$, $X_i, Y_i \subseteq R^l$ и $u_i : \prod_N X_i \times \prod_N Y_i \to R$, как и ранее, характеризуют множество участников, их потребительские и производственные множества и функции полезности (целевые функции).

Один из главных вопросов, на который необходимо получить ответ в первую очередь, состоит в том, как данный механизм обеспечивает баланс производства и потребления и, в частности, каким способом происходит распределение произведенных продуктов.

В рассматриваемой модели баланс между производством и потреблением может быть достигнут с помощью нескольких средств. В первую очередь, это функции распределения дохода α_i, далее, функции, задающие способ рационирования предметов потребления β_i, и, наконец, планы производства и материально-технического снабжения.

Ниже анализируются первые две возможности.

I.I. М а т е р и а л ь н о е с т и м у л и р о в а н и е . Рассмотрим сначала способ уравнивания производства и потребления с помощью функций α_i. Для этого определим частный случай модели (I.I):

$$\mathcal{E}_{q,\alpha} = \langle N, \{X_i, Y_i, u_i, A_i\}_N, q \rangle, \quad (I.2)$$

где $q \in Q$ – некоторый фиксированный вектор цен.

Для простоты всюду далее будем считать, что функции u_i зависят лишь от переменных x^i, y^i.

Введем понятие согласованного состояния, которое можно трактовать как некий аналог состояния равновесия в классичес-

кой модели рыночной экономики. Во-первых, в согласованном состоянии достигается баланс между производством и потреблением по всем продуктам, а во-вторых, каждый экономический агент обеспечивает себе максимальное значение функций полезности на множестве переменных, которые он контролирует. Последнее условие есть не что иное, как условие баланса (согласования) интересов всех участников системы.

Положим $B_i(\alpha, y) = \{(\tilde{x}^i, \tilde{y}^i) \in X_i \times Y_i \,/\, q\tilde{x}^i \leq \alpha_i(y/\tilde{y}^i, q)\}$ *) $(\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \prod_N A_i)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.I. Состояние $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\alpha}) \in \prod_N X_i \times \prod_N Y_i \times \prod_N A_i$ называется согласованным, если выполняются соотношения

$$u_i(\bar{x}^i, \bar{y}^i) = \max \{u_i(x^i, y^i) \,|\, (x^i, y^i) \in B_i(\bar{\alpha}, \bar{y})\},$$

$$\sum_N \bar{x}^i = \sum_N \bar{y}^i.$$

Сформулируем условия, обеспечивающие существование согласованных состояний.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ I.I. Модель $\mathcal{E}_{I,\alpha}$ удовлетворяет условиям.

AI. X_i, Y_i – выпуклые компакты для всех $i \in N$.

A2. $\sum_N X_i \subseteq \sum_N Y_i$.

A3. u_i – непрерывные вогнутые функции.

A4. Для любых $i \in N$ и $(x^i, y^i) \in \tilde{X}_i \times \tilde{Y}_i$ найдется $\tilde{x}^i \in X_i$ такой, что $u_i(x^i, y^i) < u_i(\tilde{x}^i, y^i)$, где $\tilde{X}_i \times \tilde{Y}_i = Pr_{Z_i} Z(N)$.

A5. Для любых $i \in N$, $\tilde{y}^i \in Y_i$ и $a \in R_+$ существует функция $\alpha_i \in A_i$ такая, что $\alpha_i(y^1, \dots, y^n) \neq 0 \Leftrightarrow y^i = \tilde{y}^i$, причем $\alpha_i(y/\tilde{y}^i) = a$.

Для каждого $z \in \mathcal{Y} = \sum_N X_i$ положим $M(z) = \{y \in \prod_N Y_i \,/\, \sum_N y^i = z\}$. Далее, для $y \in M(z)$ и $\lambda \in [0,1]$ введем обозначения:

$$\mathcal{X}_i(y, \lambda) = \operatorname{Arg} \max_{p\tilde{x}^i \leq \lambda p z/n} u_i(\tilde{x}^i, y^i), \quad i \in N.$$

Применяя теорему Какутани к точечно-множественному отображению

$$F(z) = co\Big(\bigcup_{y \in M(z)} \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \sum \mathcal{X}_i(y, \lambda)\Big), \quad z \in \mathcal{Y},$$

---

*) Как обычно, для $y = (y^1, \dots, y^n)$ через $y/\tilde{y}^i$ обозначается вектор $(y^1, \dots, \tilde{y}^i, \dots, y^n)$.

убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 1.1. (Существование согласованных состояний). Если для модели $\mathcal{E}_{I,\alpha}$ выполнены условия предположения 1.1, то согласованные состояния существуют при любом $q \gg 0$.

Таким образом, использование функций распределения доходов, стимулирующих точное выполнение производственных планов, гарантирует достижение материального баланса. Большой интерес, на наш взгляд, представляют и другие (не столь жесткие) формы стимулирования, обеспечивающие существование согласованных состояний.

Ясно, что существуют отдельные сферы человеческой деятельности, где принципы согласования, используемые в $\mathcal{E}_{I,\alpha}$, можно наблюдать почти в чистом виде. В первую очередь речь идет об организации и управлении в малых коллективах, особенно когда номенклатура выпускаемой и потребляемой продукции также невелика.

В качестве конкретного примера экономики $\mathcal{E}_{I,\alpha}$ рассмотрим задачу об оптимальной организации небольшого коллектива по выполнению однородной работы, которую можно измерить одним показателем - объемом ее выполнения.

Итак, пусть имеется бригада в количестве n человек, выполняющая однородную работу, объем которой можно измерять одним числом (например, выемки грунта, погрузка, уборка картофеля и т.д.).

Целевая функция участника $i \in N=\{1,\dots,n\}$ есть $u_i(x_i, y_i)$, где x_i - количество денег, получаемых $i \in N$, y_i - объем выполняемой им работы. Далее, $\alpha_i(y)$ представляет собой функцию оплаты объема работы (y/y_i) для $i \in N$. Тогда рациональная (оптимальная) реакция участника i на ситуацию (y, α_i) есть

$$y_i(y,\alpha_i) = \arg\max_{\bar{y}^i \in Y_i} u_i(\alpha_i(y/\bar{y}_i), \bar{y}_i). \qquad (1.3)$$

Можно считать, что функции $y_i(y, \alpha_i)$ не определяются из решения экстремальных задач, а известны заранее, как первичная информация (подобно тому, как вместо функций полезности используются функции спроса).

Обозначим через $\bar{y}(\alpha)=(\bar{y}_1(\alpha),\dots,\bar{y}_n(\alpha))$ такие объемы выполняемых работ, что

$$y_i(\bar{y}(\alpha), \alpha_i) = \bar{y}_i(\alpha), \quad i \in N.$$

Задача руководителя описанного коллектива заключается в том, чтобы назначить функции оплаты труда $\alpha = (\alpha_i)_{i \in N}$ из заданного множества A таким образом, чтобы были выполнены соотношения:

$$\sum_N \alpha_i(\bar{y}(\alpha)) \le M, \tag{I.4}$$

$$\sum_N \bar{y}_i(\alpha) \to max, \tag{I.5}$$

где M - сумма денег, которая выделена руководителю для оплаты работы. Неравенство (I.4) говорит о том, что руководитель может выплатить работникам не более заданной суммы денег. При этом функции оплаты труда должны быть назначены таким образом, чтобы объем выполняемой работы был наибольшим (условие (I.5)).

Укажем вид оптимальных функций оплаты труда для двух человек, выполняющих заданную работу, если их целевые функции определяются формулами:

$$u_1(x_1, y_1) = x_1 \cdot (1 + \varepsilon - y_1),$$
$$u_2(x_2, y_2) = x_2 \cdot (1 + \varepsilon - y_2), \qquad (\varepsilon > 0)$$

а максимальный объем работы, который в принципе может выполнить каждый из участников, равен I.

Тогда оптимальные (отвечающие условию (I.5))функции оплаты труда для первого и второго участника симметричны и выглядят следующим образом:

$$\alpha_1(y_1, y_2) = \begin{cases} M, & y_1 > y_2, \\ M/2, & y_1 = y_2, \\ 0, & y_1 < y_2, \end{cases}$$

$$\alpha_2(y_1, y_2) = \begin{cases} M, & y_2 > y_1, \\ M/2, & y_2 = y_1, \\ 0, & y_2 < y_1. \end{cases}$$

Как легко видеть, эти функции воплощают в себе принцип соревнования для этих двух людей. Тот, кто выполнит больший объем работы, получает всю сумму денег, а второй не получает ничего. Если объем работы, выполненный обоими участниками, окажется одинаковым, то сумма денег делится пополам.

I.2. Рационирование в сфере потребления. Другой способ получения сбалансированного состояния экономики (I.I) состоит в использовании способов рационирования продуктов в сфере потребления. Рассмотрим соответствующий частный случай, обозначая его через $\mathcal{E}_{I,\beta}$.

По определению, система $\mathcal{E}_{I,\beta}$ имеет вид:

$$\mathcal{E}_{I,\beta} = \langle N, \{X_i, Y_i, u_i, \beta_i\}_N \rangle,$$

где $N, X_i, Y_i, u_i : \lambda_i \times Y_i \to R$ имеют стандартную интерпретацию, а функции $\beta_i \ : \prod_N Y_i \to X_i$ показывают верхнее ограничение на потребление продуктов. Эти величины зависят как от собственной производственной деятельности экономических агентов, так, вообще говоря, и от деятельности всех других участников. Фактически с помощью функций β_i осуществляется способ распределения произведенных продуктов y между участниками экономики $\mathcal{E}_{I,\beta}$.

Например, в качестве таких функций могут быть взяты:

$$\beta_i(y/\bar{y}^i) = \sum_{j\neq i} y^j/n + \bar{y}^i/n, \quad y \in \prod_N Y_i.$$

Это означает, что каждый участник получает одинаковое количество продуктов из общей суммы. При этом очевидно, что чем больше число участников, тем меньше влияние каждого на общую величину произведенных продуктов и, стало быть, тем меньше влияние собственной производственной деятельности на получаемые для потребления объемы продуктов.

Другим примером функций рационирования β_i являются функции:

$$\beta_i(y/\bar{y}^i) = \bar{y}^i, \quad y \in \prod_N Y_i.$$

Это означает, что весь произведенный участником i продукт остается у него же. Это возможно только тогда, когда $\bar{y}^i \geq 0$, т.е. отсутствует разделение труда, например, в условиях натурального хозяйства.

Еще одним примером таких функций являются функции

$$\beta_i(y/\tilde{y}^i)=(\rho(\tilde{y}^i)/\sum_{j\neq i}\rho(y^j)+\rho(\tilde{y}^i))\cdot(\sum_{j\neq i}y^j+\tilde{y}^i),$$

где получаемые продукты пропорциональны вкладу каждого участника, измеряемому с помощью функции ρ.

В рассматриваемой экономике $\mathcal{E}_{I,\beta}$ согласованное состояние $(\bar{x},\bar{y})$ определяется следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.2. Состояние $(\bar{x},\bar{y})\in\prod_N X_i\times\prod_N Y_i$ называется (β)-согласованным, если выполняются условия:

$$(\bar{x}^i,\bar{y}^i)\in \operatorname{Arg}\max_{x^i\in\beta_i(\bar{y}/y^i)} u_i(x^i,y^i),\quad i\in N, \tag{I.6}$$

$$\sum_N\bar{x}^i=\sum_N\bar{y}^i. \tag{I.7}$$

Следует отметить, что в этом варианте экономики (I.I) цены вообще не играют никакой роли. Они никак не участвуют ни в процессе производства, ни в процессе потребления, ни в процессе распределения. Экономика построена на чисто натуральных отношениях.

Приведем условия, обеспечивающие существование (β)-согласованных состояний.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ I.2. Модель $\mathcal{E}_{I,\beta}$ удовлетворяет условиям.

А1. X_i, Y_i - выпуклые компакты для всех $i\in N$.

А2. $\sum_N\beta_i(y^i)=\sum_N y^i$ для всех $y=(y^1,\dots,y^n)\in Y=\prod_N Y_i$.

А3. β_i полунепрерывны сверху и вогнуты.

А4. Функции u_i монотонны вверх.

Рассматривая неподвижные точки точечно-множественного отображения $G:Y\to 2^Y$, определяемого по формуле

$$G(y)=\prod_N \mathcal{Y}_i(y),$$

где

$$\mathcal{Y}_i(y)=\{\bar{y}^i\in Y_i/\exists\bar{x}^i\in X_i\ [u_i(\bar{x}^i,\bar{y}^i)=$$
$$=\max\{u_i(\bar{x}^i,\bar{y}^i)/\bar{x}^i\leq\beta_i(y/\bar{y}^i)\}]\},$$

с учетом дополнительных требований, накладываемых на $\mathcal{E}_{I,\beta}$, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА I.2. (Существование (β)-согласованных состояний). Если для модели $\mathcal{E}_{I,\beta}$ выполнены

у с л о в и я   п р е д п о л о ж е н и я   I.2   и   у с л о в и я   AI–A3   п р е д п о л о ж е н и я   I.1, т о (β) – с о г л а с о в а н н ы е   с о с т о я н и я   с у щ е с т в у ю т .

§2. Эффективность согласованных состояний

Ограничимся исследованием моделей рационирования в сфере потребления:

$$\mathcal{E}_{I,\beta} = \langle N, \{X_i, Y_i, u_i, \beta_i\}_N \rangle$$

и рассмотрим условия, при которых существуют согласованные состояния, обладающие дополнительными экстремальными свойствами типа равновесности, неблокируемости или Парето-оптимальности.

Введем сокращения $X = \prod_N X_i$, $Y = \prod_N Y_i$, $Z = X \times Y$ и через $Z(N)$ и B_β будем обозначать множество всех сбалансированных и (β)-сбалансированных состояний $\mathcal{E}_{I,\beta}$:

$$Z(N) = \{(x,y) \in Z \,/\, \sum_N x^i = \sum_N y^i\},$$

$$B_\beta = \{(x,y) \in Z \,/\, x^i = \beta_i(y^i),\ i \in N\}.$$

Как и в предыдущем параграфе, на механизм рационирования $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ накладывается условие сбалансированности:

$$\sum_N \beta_i(y) = \sum_N y^i, \tag{2.1}$$

влекущее включение $B_\beta \subseteq Z(N)$.

Далее, множество (β)-согласованных состояний (определенных в соответствии с (I.6)–(I.7) будем обозначать через $A = A(\mathcal{E}_{I,\beta})$, а множество Парето-оптимальных элементов $Z(N)$ – через $\theta = \theta(\mathcal{E}_{I,\beta})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Состояние $\bar{z} \in Z$ называется э ф ф е к т и в н ы м , если $\bar{z} \in \theta \cap B_\beta$.

Совокупность $\theta \cap B_\beta$ всех эффективных состояний обозначим через $E = E(\mathcal{E}_{I,\beta})$.

Ясно, что множество

$$A_E = A \cap \theta$$

всех эффективных согласованных состояний содержится в E .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Состояние $\bar{z} \in Z$ будем называть с о с т о я н и е м   р а в н о в е с и я   (в $\mathcal{E}_{I,\beta}$), если:

(а) $\bar{z} \in B_\beta$,

(б) существует такой вектор $\bar{p} \in \mathbb{R}^\ell_+$, что для всех $i \in N$

$$u_i(\bar{x}^i, \bar{y}^i) = \max\{u_i(x^i, y^i) \mid \bar{p}\cdot x^i \leq \bar{p}\cdot \beta_i(\bar{y}/y^i)\}.$$

Множество всех состояний равновесия обозначим через $W(\mathcal{E}_{I,\beta})$. Непосредственно из определений вытекает включение:

$$W(\mathcal{E}_{I,\beta}) \subseteq A(\mathcal{E}_{I,\beta}).$$

Как будет видно из дальнейшего, существование эффективных согласованных состояний в $\mathcal{E}_{I,\beta}$ тесно связано с существованием состояний равновесия и в ряде случаев выполняется противоположное включение:

$$A_E(\mathcal{E}_{I,\beta}) \subseteq W(\mathcal{E}_{I,\beta}).$$

Наряду с условием сбалансированности β (условие (2.I)) всюду далее предполагаются выполненными следующие требования.

I°. $X_i, Y_i \subseteq \mathbb{R}^\ell$ – выпуклые компакты, причем X_i "достаточно велики" в том смысле, что для любых $z = (x, y) \in Z(N)$

$$x^i - (x^i - \beta_i(y))^+ \in X_i, \quad x^i + (x^i - \beta_i(y^i))^+ \in X_i, \quad i \in N^{*)}.$$

2°. Отображения $\beta_i : Y \to X_i$ непрерывны и при любых $p \in \mathbb{R}^\ell_+$, $y \in Y$ функции $y^i \mapsto p\cdot\beta_i(y/y^i)$ на Y_i вогнуты.

3°. Функции $u_i : X_i \times Y_i \to \mathbb{R}$ непрерывны и вогнуты.

4°. Существует такое состояние $z^0 = (x^0, y^0) \in Z$, что

$$\sum_N x^{0i} \ll \sum_N y^{0i}.$$

5°. Для любых $y \in Y$, $i \in N$ существуют такие $\tilde{x}^i \in X_i, \tilde{y}^i \in Y_i$, что

$$\tilde{x}^i \ll \beta_i(y/\tilde{y}^i).$$

6°. Функции $u_i(x^i, y^i)$ строго возрастают по x^i при любом $y^i \in Y_i$.

2.I. Необходимые условия существования эффективных согласованных состояний. Прежде всего установим при несколько более сильных предположениях необходимые условия существования эффективных согласованных состояний.

---

* Как обычно, $(z_1, \ldots, z_m)^+ = (z_1^+, \ldots, z_m^+)$, где $z_i^+ = \max\{z_i, 0\}$.

Начнем со следующего замечания: если множества X_i, Y_i имеют непустые внутренности и для всех $i \in N$ отображения $\beta_i : Y \to X_i$ переводят внутренность Y во внутренность X_i, а функции u_i в дополнение к $3^0, 6^0$ для всех $i \in N$ строго убывают по y^i, то в "типичных" (относительно u_i) случаях должно быть

$$A(\varepsilon_{I,\beta}) \subseteq int\, Z.$$

Исходя из вышесказанного, сосредоточим основное внимание на свойствах эффективных согласованных состояний из Z^o ж).

Будем говорить, что $\bar{p} \in R^l_+$ - вектор цен в Парето-оптимальном состоянии $\bar{z} \in Z(N)$, если $\bar{z}$ является решением задачи

$$\sum_N \lambda_i u_i(x^i, y^i) \longrightarrow max,$$

$$\bar{p} \cdot \sum_N (x^i - y^i) \leq 0, \quad (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) \in Z,$$

при некоторых весовых коэффициентах $\{\lambda_i\}_o$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}) \in A^o_E$ и для всех $i \in N$ функции u_i дифференцируемы в точках $(\bar{x}^i, \bar{y}^i)$, а функции β_i дифференцируемы в точке $\bar{y}$. Тогда если $\bar{p}$ - вектор цен в $\bar{z}$, то $\bar{z}$ - состояние равновесия с этим вектором цен, и, кроме того, для всех $i \in N$ функции β_i обладают следующим свойством:

$$\bar{p} \cdot \beta_i(\bar{y}/y^i) \leq \bar{p} \cdot \beta_i(\bar{y}) + \bar{p} \cdot (y^i - \bar{y}^i), \quad y^i \in Y_i. \tag{2.2}$$

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Если функккции u_i, β_i дифференцируемы на соответствующих проекциях множества θ, то

$$A^o_E(\varepsilon_{I,\beta}) \subseteq W(\varepsilon_{I,\beta}) \cap \theta \triangleq W_E(\varepsilon_{I,\beta}),$$

и для всех $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}) \in A^o_E(\varepsilon_{I,\beta})$ имеем

$$\bar{p} \cdot \sum_N \beta_i(\bar{y}/y^i) \leq \bar{p} \cdot \sum_N y^i, \quad y = (y^i)_N \in Y, \tag{2.3}$$

где $\bar{p}$ - вектор цен в $\bar{z}$.

ж) Здесь и далее $X^o = int\, X$.

Заметим, что свойство (2.3) эквивалентно свойству (2.2).

Действительно, соотношение (2.2) вытекает из (2.3), если положить в этом последнем $y^j = \bar{y}^j$ при $j \neq i$ и воспользоваться условием (2.I).

Свойство (2.3) или его усиленный вариант

$$\sum_N \beta_i(y/\bar{y}^i) \leq \sum_N \bar{y}^i \qquad \text{для всех } \bar{y} \in Y \qquad (2.4)$$

выражает более сильную, чем свойство (2.I), сбалансированность механизма рационирования β, не позволяющую получить дополнительные возможности потребления за счет других участников. Свойствами (2.2)-(2.4) обладают, например, механизмы рационирования вида

$$\beta_i(y) = y^i + \varphi_i(y^{-i}), \qquad y \in Y,$$

где $\sum_N \varphi_i(y^{-i}) \leq 0, y^{-i} = (y^k)_{k \neq i}$. Примером рационирования, не удовлетворяющего требованиям (2.2)-(2.4) является механизм деления поровну $\beta_i(y) = \sum_N y^i / |N|$.

Принципиальным моментом доказательства предложения 2.I является установление тождеств

$$\bar{p}_j = \sum_{k=1}^{\ell} \bar{p}_k \cdot \partial \beta_{ik} / \partial y_j^i (\bar{y}), \qquad i \in N, j = 1, \ldots, \ell. \qquad (2.5)$$

Эти тождества вместе с условием (2.2) дают полезный инструмент для построения примеров, когда все согласованные состояния не эффективны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Будем называть механизм β с е п а р а б е л ь н ы м, если для всех i, j компонента $\beta_{ij}(y)$ вектора $\beta_i(y)$ зависит только от компонент y^k_j векторов $y^k, k \in N$.

Для сепарабельного механизма $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ соотношение (2.5) означает просто, что $\partial \beta_{ij} / \partial y_j^i (\bar{y}) = 1$ для всех $i \in N$, $j = 1, \ldots, \ell$. Но из этих равенств вытекает, что ни для какого механизма распределения в фиксированных пропорциях

$$\beta_i(y) = \alpha_i \cdot \sum_N y^k, \ \alpha_i \in [0, 1], \ \sum_N \alpha_i = 1,$$

в экономике $\mathcal{E}_{I,\beta}$ не существует эффективных согласованных состояний.

В частности, при $|N| \geq 2$ механизм деления поровну

$$\beta_i(y) = \sum_N y^i / |N|$$

всегда не эффективен и поэтому имеет место следующий любопытный факт. Пусть $u_i(x^i,y^i)=u(x^i,y^i)$, $X_i=X$, $Y_i=Y$ одни и те же для всех $i\in N$. Тогда в $\mathcal{E}_{I,\beta}$ существует симметричное эффективное состояние $\bar{z}=(\bar{x}^i,\bar{y}^i)_N$, в котором для каждого $i\in N$ пара $(\bar{x}^i,\bar{y}^i)$ (одна и та же для всех $i\in N$) является решением задачи

$$u_i(x^i,y^i)\to\max_{x^i\le y^i}.$$

Но в $\mathcal{E}_{I,\beta}$ существует также и симметричное согласованное состояние $z^*=(x^{*i},y^{*i})_N$ ((x^{*i},y^{*i}) одни и те же для всех $i\in N$). Поскольку z^* не эффективно, то $u_i(\bar{x}^i,\bar{y}^i)>u_i(x^{*i},y^{*i})$ для всех $i\in N$. Таким образом, если одинаковые во всех отношениях участники поставлены в условия "уравниловки", то они будут работать хуже (получать меньшую полезность), чем даже если бы каждый из них работал только на себя, независимо от других.

2.2. Равновесность и неблокируемость эффективных согласованных состояний. Приводимая ниже теорема устанавливает (при условии (2.4)) тесную связь между эффективными и равновесными состояниями $\mathcal{E}_{I,\beta}$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть модель $\mathcal{E}_{I,\beta}$ удовлетворяет условиям 1°–6° и, кроме того, для всех $i\in N$ функции u_i строго вогнуты. Если $\bar{z}=(\bar{x},\bar{y})\in E$ – такое эффективное состояние $\mathcal{E}_{I,\beta}$, что $\sum_N \beta_i(\bar{y}/y^i)\le\sum_N y^i$ $(y\in Y)$, то $\bar{z}\in W(\mathcal{E}_{I,\beta})$ и тем самым $\bar{z}\in A(\mathcal{E}_{I,\beta})$.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть $\mathcal{E}_{I,\beta}$ удовлетворяет 1°–6°, функции u_i для всех $i\in N$ строго вогнуты и для любого Парето-оптимального состояния $z=(x,y)$ при всех $\bar{y}\in Y$ выполняется неравенство

$$\sum_N \beta_i(y/\bar{y}^i)\le\sum_N \bar{y}^i. \qquad (2.6)$$

Тогда

$$E(\mathcal{E}_{I,\beta})=A_E(\mathcal{E}_{I,\beta})=W_E(\mathcal{E}_{I,\beta}).$$

Оказывается, что если в соотношении (2.6) потребовать выполнения равенства, то множество $W_E = W \cap E$ будет лежать в ядре экономики $\mathcal{E}_{I,\beta}$, определяемом следующим образом.

Для любого непустого $S \subseteq N$ обозначим через B^S множество всех таких наборов $z^S = (x^{iS}, y^{iS})_S \in \prod_{i\in S} X_i \times Y_i$, что $\sum_{i\in S} x^{iS} = \sum_{i\in S} y^{iS}$ и при любом $y \in Y$ найдется такой элемент $z' = (x'^j, y'^j)_{N\setminus S} \in \prod_{j\in N\setminus S} X_j \times Y_j$, что

$$\sum_{j\in N\setminus S} (x'^j - y'^j) = 0, \quad \sum_{j\in N\setminus S} x'^j = \sum_{j\in N\setminus S} \beta_j (y/y'^j). \qquad (2.7)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Будем говорить, что коалиция S блокирует состояние $z \in Z(N)$, если существует такой элемент $z^S \in B^S$, что

$$u_i(x^{iS}, y^{iS}) > u_i(x^i, y^i), \quad i \in S.$$

Условие (2.7) означает гарантированную возможность выбора блокирующей стратегии z^S. Эта возможность ограничивается, таким образом, свойствами механизма β. В случае, когда $0 \in X_i$, $0 \in Y_i$ и $\beta_i(y/0) = 0$ для всех $i \in N$, $y \in Y$, такие ограничения выполняются автоматически, и мы получаем обычное определение блокирования.

Определим ядро C_β модели $\mathcal{E}_{I,\beta}$ как множество всех состояний $z \in Z(N)$, не блокируемых (в смысле определения 2.4) никакой коалицией $S \subseteq N$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Если для всех $z = (x, y) \in Z(N)$ при любом $\tilde{y} \in Y$ выполняется соотношение

$$\sum_N \beta_i(y/\tilde{y}^i) = \sum_N \tilde{y}^i, \qquad (2.8)$$

то $W(\mathcal{E}_{I,\beta}) \subseteq C(\mathcal{E}_{I,\beta})$.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть $\mathcal{E}_{I,\beta}$ обладает свойством 1°-6°, функции u_i строго вогнуты и механизм β всюду на $Z(N)$ удовлетворяет соотношению (2.8) при любом $\tilde{y} \in Y$. Тогда

$$A_E(\mathcal{E}_{I,\beta}) = W(\mathcal{E}_{I,\beta}) = C(\mathcal{E}_{I,\beta}) \cap B_\beta.$$

2.3. **Достаточные условия существования эффективных согласованных состояний.** Условие сильной сбалансированности механизма рационирования, фигурирующее в следствии 2.2, вообще говоря, не обеспечивает существования эффективных согла-

сованных состояний. Однако для одного важного класса функций β подходящие аналоги этого требования уже доставляют искомый результат.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Будем говорить, что механизм рационирования слабо рационален (по отношению к набору функций полезности $\{u_i\}_N$), если для любого $z=(x,y)\in\Theta$ найдется $i\in N$ такой, что

$$u_i(\beta_i(y), y^i) \geq u_i(x^i, y^i).$$

Существует класс наборов функций полезности $\{u_i\}_N$, по отношению к которым механизм β слабо рационален. Действительно, если найдутся такой вектор $p\in R^l$, $p\gg 0$ и такие функции $v_i: R^1\times R^l\to R^1$, не убывающие по первому аргументу, что для всех $i\in N$, $(x^i, y^i)\in Z_i$ будет

$$u_i(x^i, y^i) = v_i(p\cdot x^i, y^i),$$

то свойство слабой рациональности произвольного механизма β по отношению к такому набору $\{u_i\}_N$ немедленно следует из соотношения $\sum_N p\cdot\beta_i(y) = \sum_N p\cdot x^i$. В частности, свойство слабой рациональности автоматически выполняется в однопродуктовом случае ($l=1$).

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть модель $\mathcal{E}_{I,\beta}$ удовлетворяет условиям 1^0–6^0 и следующим дополнительным требованиям:

а) функции $u_i(x^i, y^i)$ строго вогнуты для всех $i\in N$;

б) для любого Парето-оптимального состояния $z=(x,y)\in\Theta$ и вектора цен p в z при всех $\bar{y}\in Y$ выполняется соотношение

$$p\cdot\sum_N \beta_i(y/\bar{y}^i) \leq p\cdot\sum_N \bar{y}^i; \qquad (2.9)$$

в) механизм β слабо рационален.

Тогда в модели $\mathcal{E}_{I,\beta}$ существует эффективное согласованное состояние.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Если в формулировке теоремы 2.2 условие б) заменить требованием

б$'$) для любого Парето-оптимального состояния $z=(x,y)\in\Theta$ выполня-

ются неравенства

$$\sum_N \beta_i(y/\bar{y}^i) \le \sum_N \bar{y}^i, \quad \bar{y} \in Y,$$

то заключение теоремы остается справедливым.

В заключение этого параграфа приведем условия, при которых для любого Парето-оптимального состояния $\bar{z}$ из Z^0 найдется механизм рационирования β, обеспечивающий равенство

$$A_E(\mathcal{E}_{I,\beta}) = \{\bar{z}\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть модель $\mathcal{E} = \langle N, \{X_i, Y_i, u_i\}_N \rangle$ такова, что $X_i = R^\ell$ для всех $i \in N$, множества Y_i выпуклы и компактны и, кроме того, $\mathcal{E}$ удовлетворяет требованиям $3^0, 6^0, 4^0$. Пусть $\bar{z}$ – внутреннее состояние в $\Theta(\bar{z} \in \Theta \cap Z^0)$. Тогда, если функции u_i строго вогнуты, дифференцируемы в точках $(\bar{x}^i, \bar{y}^i)$ и $\partial u_i / \partial y^i_j (\bar{x}^i, \bar{y}^i) < 0$ для всех $i \in N$, $j = 1, \ldots, \ell$, то существует сепарабельный механизм рационирования β, при котором $\bar{z}$ является единственным эффективным согласованным состоянием в $\mathcal{E}_{I\beta}$.

Нетрудно проверить, что нужными свойствами обладает механизм рационирования, определяемый по формулам

$$\beta_{ij}(y) = \bar{y}^i_j + \varphi_{ij}(y^i_j) + \sum_{k \in N \setminus i} (y^k_j - \bar{y}^k_j - \varphi_{kj}(y^k_j)) / n-1,$$

где

$$\varphi_{ij}(y^i_j) = [u_i(\bar{x}^i, \bar{y}^i / y^i_j) - u_i(\bar{x}^i, \bar{y}^i)] / \frac{\partial u_i}{\partial y^i_j}(\bar{x}^i, \bar{y}^i).$$

§3. Об одной модели взаимодействия рыночного механизма и механизма рационирования

В настоящем параграфе продолжается исследование взаимодействия рыночного механизма и механизма рационирования, начатое в [30]. Основное внимание уделяется уточнению условий, обеспечивающих применимость классической схемы доказательства существования равновесия, базирующейся на обобщенной лемме Гейла – Никайдо – Дебре [41,56]. Всюду далее предполагается, что

функция распределения доходов α_i и функции рационирования β_i зависят от цен (для α_i) и лишь от собственного уровня производства и потребления участника $i \in N$. Отметим сразу, что это требование и составляет одно из основных условий "работоспособности" упомянутой схемы доказательства.

Рассматриваемая модель взаимодействия задается с помощью следующей информации:

$$\mathcal{E} = \langle N, \{X_i', X_i'', Y_i, u_i, \alpha_i, \beta_i\}_N, q, P \rangle, \qquad (3.1)$$

где $q \in R^l$ – фиксированный вектор цен, $P \subseteq R^l$ – множество допустимых (гибких) цен, $X_i' \subseteq R^l$ – совокупность потребительских наборов, доступных $i \in N$ по фиксированным ценам q , $X_i'' \subseteq R^l$ – множество потребительских наборов, доступных для этого участника по гибким ценам из P , $Y_i \subseteq R^l$ – производственное множество, а $u_i : X_i' \times X_i'' \times Y_i \to R$, $\alpha_i : Y_i \times P \to R$, $\beta_i : Y_i \to X_i'$ – его функции полезности, основного дохода и рационирования соответственно. Как и в §§1,2, возможные начальные запасы $i \in N$ учтены при формировании производственных множеств Y_i ($Y_i = \bar{Y}_i + w^i$).

Таким образом, в $\mathcal{E}$ предполагается наличие двух рынков продуктов. На одном из них действуют фиксированные (жесткие) цены q и механизм рационирования β , а на другом цены p устанавливаются с помощью уравнивания спроса и предложения (в рамках возможностей, предоставляемых P).

Переходя к определению соответствующих бюджетных множеств участников $\mathcal{E}$, подчеркнем еще раз, что в отличие от §1 функции α_i представляют лишь основной доход участников $i \in N$, определяемый ценами $p \in P$ и уровнем их производственной активности $y^i \in Y_i$. Что касается полного (суммарного) дохода, которым располагает экономический агент $i \in N$ для приобретения интересующих его продуктов, то он складывается из основного $\alpha_i(y^i, p)$ и дополнительного $(p-q)^+ \cdot (\beta_i(y^i) - x'^i)$, где, как и ранее, z^+ – положительная вариация вектора z ($z_i^+ = max\{z_i, 0\}$). Другими словами, предполагается, что каждый участник $i \in N$ полностью выкупает на первом рынке причитающийся ему набор $\beta_i(y^i)$ по фиксированным ценам q , а излишек (по сравнению с его действительной потребностью x'^i) реализует по ценам $p \in P$ на втором рынке. Разумеется, реализуются лишь те продукты, номера которых содержатся в множестве

$$K_p = \{ k / p_k \geq q_k \}. \tag{3.2}$$

В соответствии с вышесказанным, бюджетные множества $B_i^q(p)$ участников $i \in N$ при ценах $p \in P$ определяются следующим образом:

$$B_i^q(p) = \{(x^{\prime i}, x^{\prime\prime i}, y^i) \in Z_i(\beta) / q \cdot x^{\prime i} + p x^{\prime\prime i} \leq$$
$$\leq \alpha_i(y^i, p) + (p-q)^+ \cdot (\beta_i(y^i) - x^{\prime i})\},$$

где

$$Z_i(\beta) = \{(x^{\prime i}, x^{\prime\prime i}, y^i) \in X_i^{\prime} \times X_i^{\prime\prime} \times Y_i / x^{\prime i} \leq \beta_i(y^i)\}.$$

В дальнейшем наряду с бюджетными отображениями $p \mapsto B_i^q(p)$ рассматриваются отображения спроса $p \mapsto \mathcal{D}_i(p)$ и избыточного спроса $p \longmapsto E_i(p)$, определяемые по формулам

$$\mathcal{D}_i(p) = \operatorname{Arg} \max_{B_i^q(p)} u_i(x^{\prime i}, x^{\prime\prime i}, y^i),$$

$$E_i(p) = \{g^i \in R^l / \exists (x^{\prime i}, x^{\prime\prime i}, y^i) \in \mathcal{D}_i(p) [g^i = x^{\prime i} + x^{\prime\prime i} - y^i]\}.$$

В принятых обозначениях понятие равновесного состояния в $\mathcal{E}$ формулируется следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.I. Состояние $\bar{z} = (\bar{x}^{\prime i}, \bar{x}^{\prime\prime i}, \bar{y}^i)_N \in \prod_N X_i^{\prime} \times X_i^{\prime\prime} \times Y_i$ называется р а в н о в е с н ы м , если существует вектор цен $\bar{p} \in P$ такой, что

$$(\bar{x}^{\prime i}, \bar{x}^{\prime\prime i}, \bar{y}^i) \in \mathcal{D}_i^q(\bar{p}), \quad i \in N,$$

и при этом

$$\sum_N \bar{x}^{\prime i} + \sum_N \bar{x}^{\prime\prime i} = \sum_N \bar{y}^i.$$

Вектор $\bar{p}$, фигурирующий в определении 3.I, будем называть равновесными ценами $\mathcal{E}$.

Непосредственно из определений явствует, что равновесные цены $\bar{p}$ являются нулями точечно-множественного отображения

$$E(p) = \sum_N E_i(p), \quad p \in P.$$

Некоторые достаточные условия разрешимости включения

$$0 \in E(p) \qquad (p \in P) \tag{3.3}$$

дает упоминавшаяся выше обобщенная лемма Гейла – Никайдо – Дебре. Важнейшим из этих условий (помимо выпуклозначности и

полунепрерывности сверху для E) является следующее требование:

$$\forall p \in S \exists z \in E(p) [p \cdot z \leq 0], \tag{3.4}$$

где $S = \partial P \cap R^{\ell}_{+}$.

Ясно, что в рассматриваемом случае для справедливости (3.4) достаточно выполнения указываемых ниже включений для агрегированных рационируемых и "гибких" бюджетных множеств

$$\sum_{N} B^{q}_{i}(p) \subseteq B_{N}(p), \quad p \in S, \tag{3.5}$$

где

$$B_{N}(p) = \{(x'^{i}, x''^{i}, y^{i})_{N} \in \prod_{N} Z_{i}(p) / p \cdot \sum_{N}(x'^{i} + x''^{i}) \leq p \cdot \sum_{N} y^{i}\}.$$

Переходя к выяснению условий , гарантирующих непустоту множеств $B^{q}_{i}(p)$ и справедливость соотношений (3.5), сформулируем следующее предположение относительно функций основного дохода.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3.I. Для любых $p \in P \cap R^{\ell}_{+}$ и $y^{i} \in Y_{i}$ ($i \in N$) справедливо равенство

$$\sum_{N} \alpha_{i}(y^{i}, p) = \sum_{i \in N} \sum_{k \in K_{p}} q_{k} \cdot \beta_{ik}(y^{i}) + \tag{3.6}$$
$$+ \sum_{k \in K_{p}} p_{k} \cdot (y_{(k)} - \sum_{i \in N} \beta_{ik}(y^{i})) + \sum_{k \in L \setminus K_{p}} p_{k} \cdot y_{(k)},$$

где $y_{(k)}$ – обозначение для k-й компоненты вектора $y = \sum_{N} y^{i}$, а $L = \{1, \ldots, \ell\}$.

Тождество (3.6) представляет собой закон Вальраса для рассматриваемой экономики с двумя рынками. Не останавливаясь на его содержательном истолковании, имеющемся в [30], приведем пример функций основного дохода, удовлетворяющих предположению 3.I:

$$\alpha^{0}_{i}(y^{i}, p) = p \cdot y^{i} - (p - q)^{+} \cdot \beta_{i}(y^{i}), \quad i \in N. \tag{3.7}$$

Действительно, соотношения (3.6) можно переписать в виде:

$$\sum_{N} \alpha_{i}(y^{i}, p) = p \cdot \sum_{N} y^{i} - (p - q)^{+} \cdot \sum_{N} \beta_{i}(y^{i}), \tag{3.8}$$

откуда очевидным образом вытекает, что функции α^{0}_{i} удовлетворяют сформулированному закону Вальраса.

В дальнейшем для простоты будем считать, что $P = \{p \in R^{\ell} / \sum |p_{k}| \leq 1\}$, причем $q \in P \cap \operatorname{int} R^{\ell}_{+}$. Ясно, что в этом случае

$$S=\{p\in R^{\ell}_{+} / \sum p_k=1\}.$$

Кроме того, будем предполагать, что

$$X'_i \subseteq R^{\ell}_{+}, \quad i\in N, \tag{3.9}$$

$$0\in \bigcap_N X''_i. \tag{3.10}$$

Введем некоторые дополнительные обозначения. Для каждого $i\in N$ и $y^i\in Y_i$ положим $X'_i(y^i)=\{x'^i\in X'_i / x'^i\leq \beta_i(y^i)\}$ и через $\bar{\alpha}_i$, δ_i и ν обозначим функции, определяемые по формулам:

$$\bar{\alpha}_i(y^i,p)=\alpha_i(y^i,p)+(p-q)^{+}\cdot\beta_i(y^i), \tag{3.11}$$

$$\delta_i(y^i,p)=\inf_{x'^i\in X'_i(y^i)}(q\vee p)\cdot x'^i, \tag{3.12}$$

$$\nu(p)=\inf_{x'\in \sum_N X'_i}(p-q)^{-}\cdot x', \tag{3.13}$$

где, как обычно, $(z^{-})_k=\max\{-z_k,0\}$, $(z\vee\tilde{z})_k=\max\{z_k,\tilde{z}_k\}$.

Используя введенные обозначения, приведем некоторые условия, обеспечивающие непустоту множеств $B^q_i(p)$ и выполнение соотношений (3.5).

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3.2. Для любых $i\in N$ и $p\in P\cap R^{\ell}_{+}$ существует $y^i\in Y$ такой, что

$$\bar{\alpha}_i(y^i,p)\geq\delta_i(y^i,p), \tag{3.14}$$

причем для $p\in S$ неравенство строгое.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3.3. Для любых $y=(y^1,\ldots,y^n)\in\prod_N Y_i$ и $p\in S$ справедливо неравенство

$$\sum_N\alpha_i(y^i,p)\leq p\cdot\sum_N y^i-(p-q)^{+}\cdot\sum_N\beta_i(y^i)+\nu(p). \tag{3.15}$$

Учитывая, что бюджетные множества $B^q_i(p)$ могут быть представлены в виде

$$B^q_i(p)=\{(x'^i,x''^i,y^i)\in Z_i(p) / (p\vee q)\cdot x'^i+p\cdot x''^i\leq\bar{\alpha}_i(y^i,p)\},$$

а также тот факт, что функции α_i не зависят от x'^i, имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Если для модели $\mathcal{E}$ выполняется предположение 3.2, то $B^q_i(p)\neq\emptyset$ для всех $i\in N$, $p\in P\cap R^{\ell}_{+}$. Если, кроме того, для $\mathcal{E}$ выполняется предположение 3.3, то для агрегированных бюджетных множеств вы-

полняются (нетривиальные) включения (3.5).

СЛЕДСТВИЕ 3.I. Если для функций α_i выполняется закон Вальраса, то отображение $p \mapsto E(p)$ удовлетворяет требованию (3.4).

Требование (3.4) выполняется, в частности, для упоминавшихся функций $\overset{\circ}{\alpha}_i(y^i, p) = p \cdot y^i - (p-q)^+ \beta_i(y^i)$, для которых бюджетные множества имеют вид:

$$B_i^q(p) = \{(x'^i, x''^i, y^i) \in Z_i(\beta) \mid (p \vee q) \cdot x'^i + p \cdot x''^i \leq p \cdot y^i\}.$$

Что касается непустоты $B_i^q(p)$, то в этом случае достаточно потребовать, чтобы выполнялись соотношения:

$$\mathbb{O} \in \bigcap_N X'_i, \quad S \cap Y_i^o = \varnothing \quad (i \in N),$$

где $Y_i^o = \{p \in R^l \mid p \cdot y^i \leq 0, \ y^i \in Y_i\}$.

Отметим, что ввиду включений $X'_i \subseteq R^l_+$, значения $\psi(p)$ неотрицательны. Поэтому в качестве достаточных (а при $\mathbb{O} \in \bigcap_N X'_i$ и близких к необходимым) условий выполнения включений (3.5) можно использовать следующую модификацию предположения (3.I):

$$\forall p \in S \ \exists y \in \prod_N Y_i \left[\sum_N \bar{\alpha}_i(y^i, p) \leq p \cdot \sum_N y^i\right].$$

Жестким, но содержательно более осмысленным аналогом требования (3.14) является следующее условие "обеспеченности потребления по рациону":

$$\forall p \in P \cap R^l_+ \ \exists y^i \in Y_i \left[\alpha_i(y^i, p) \geq \inf_{x''^i \in X'_i(y^i)} q x''^i\right] \qquad (3.16)$$

(для $p \in S$ неравенство строгое).

Приведенные замечания характеризуют, на наш взгляд, необременительность упоминавшихся требований к агрегированному отображению избыточного спроса $p \mapsto E(p)$.

Сформулируем теперь дополнительное предположение, гарантирующее включение (3.3).

Положим $Z(N) = \{z \in \prod_N Z_i(\beta) \mid \sum_N (x'^i + x''^i - y^i) = \mathbb{O}\}$ и для каждого $i \in N$ введем обозначения:

$$\tilde{X}''_i = Pr_{X''_i} Z(N),$$

$$\mathcal{P}_i(z^i) = \{\tilde{z}^i \in Z_i(\beta) \mid u_i(\tilde{z}^i) > u_i(z^i)\}.$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3.4. A1. Для всех $i \in N$ множества X_i' выпуклы и замкнуты, а множества X_i'', Y_i выпуклы и компактны.

A2. Функции α_i, β_i, u_i непрерывны по совокупности аргументов.

A3. Для всех $i \in N$ и $k = 1, \ldots, l$ функции α_i, β_{ik} вогнуты по y^i, а функции u_i строго квазивогнуты по совокупности аргументов.

A4. Существует $i_0 \in N$ такой, что $\tilde{X}_{i_0}''$ содержится в X_{i_0}'' вместе с некоторой окрестностью из $R_+^{l^{i_0}}$, причем u_{i_0} строго возрастающая по x^{m_0}.

A5. Для всех $i \in N$ и $z \in Z(N)$ множества $\mathcal{P}_i(z^i)$ не пусты.

Условие A.4 означает, что существует участник i_0, имеющий достаточно "большое" потребительское множество в гибких ценах, причем все продукты из этого множества для него желательны. Остальные требования предположения 3.4 стандартны.

Используя лемму Гейла - Никайдо - Дебре, с учетом специфики рассматриваемой модели получаем следующую теорему существования.

ТЕОРЕМА 3.I. *Если модель (3.I) удовлетворяет условиям предположений 3.I, 3.2, 3.4, то она обладает равновесными ценами $\bar{p} \in P$ и равновесным состоянием $\bar{z} = (\bar{x}^n, \bar{x}^m, \bar{y}^i)_N$, причем для любой равновесной пары $(\bar{p}, \bar{z})$ выполняется условие*

$$q_k > \bar{p}_k \Rightarrow \forall i \in N \, [\bar{x}_k^{ri} = 0]. \tag{3.17}$$

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Если модель (3.I) такова, что хотя бы для одного из участников $X_i' \subseteq \mathrm{int}\, R_+^l$, то для любого равновесного вектора цен выполняется соотношение $\bar{p} \geq q$.*

Нетрудно видеть, что следствие 3.2 (как и характеристика равновесных пар в теореме 3.I) вытекает непосредственно из определения равновесия. Отметим здесь же, что в силу следствия 3.2 и соответствующих результатов работы [30] наличие хотя бы одного участника, "отделенного" от границы R_+^l, га-

рантирует эффективность (и даже принадлежность ядру) равновесных состояний рассматриваемой модели.

Наряду с дальнейшим изучением проблемы эффективности и неблокируемости равновесных состояний в модели (3.I) важной задачей, на наш взгляд, является сравнительный анализ введенных равновесий и вальрасовских (когда в качестве бюджетных множеств берутся $B_i(p)$). В частности, интересна асимптотика следующего процесса регулирования жестких цен:

$$q_1 = q, \; q_{m+1} = \bar{p}_m, \; m = 1, \ldots, \qquad (3.I8)$$

где $\bar{p}_m$ - равновесные (в смысле определения 3.I)) цены в модели (3.I), полученные при $q = \bar{p}_{m-1}$ $(\bar{p}_0 \triangleq q)$. Ясно, что предельные точки последовательности (3.I8) являются вальрасовскими равновесными ценами. Имеют ли они какие-либо дополнительные достоинства (типа устойчивости и т.п.)?

ГЛАВА 4. ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЙМАНА – МОРГЕНШТЕРНА И УСТОЙЧИВОСТЬ НЕКОТОРЫХ ПРОЦЕССОВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО УЛУЧШЕНИЯ

Настоящая глава посвящена анализу устойчивости таких принципов оптимальности теории игр и математической экономики, как ядро и граница Парето. При этом в отличие от традиционных постановок сравнительной статики (поведение решений при малых вариациях модели), устойчивость трактуется в смысле теории динамических систем. Реализации рассматриваемых принципов оптимальности представляются в виде ядер подходящих бинарных отношений и исследуется асимптотика соответствующих процессов последовательного улучшения. Допуская некоторую вольность речи, процессом последовательного улучшения мы называем точечно-множественную динамическую систему, финальное множество которой совпадает с ядром рассматриваемого отношения α , а переходная функция генерирует лишь улучшающие (в смысле α) состояния фазового пространства изучаемой модели.

Ниже конструируется и исследуется несколько динамических систем такого рода для кооперативных игр и игр, порожденных моделями экономического обмена. В ряде случаев устанавливается глобальная устойчивость финальных множеств и тем самым достижимость [30] соответствующих ядер. Кроме того, изучаются некоторые смежные вопросы, связанные с существованием и характеризацией обобщенных решений Неймана – Моргенштерна : решений, объединяющих идеи динамики и устойчивости. В целом материал этой главы непосредственно примыкает к соответствующему разделу предыдущего обзора (см. [30], §3.2).

Переходя к подробному изложению, отметим, что рассматриваемые далее принципы оптимальности изначально определяются в терминах ядер бинарных отношений доминирования. Поэтому предлагаемые исследования можно интерпретировать как анализ динамики переговоров (образование блокирующих коалиций, угрозы, контругрозы и т.п.) и рекомендации по установлению таких рамок этих переговоров, которые обеспечивают стабилизацию рассматриваемых процессов.

§I. Обобщенные НМ-решения и достижимость ядер абстрактных игр

Ниже излагаются некоторые новые результаты, относящиеся к обобщениям НМ-решения [5,30], основанным на принципе последовательного улучшения доминируемых альтернатив. Кроме того, исследуются условия существования монотонных траекторий, сходящихся к максимальным элементам рассматриваемых игр. Основные определения и конструкции, как и в [30,73], даются в терминах абстрактных игр, что позволяет использовать полученные результаты для анализа широкого класса решений теории игр и математической экономики, базирующихся на бинарных отношениях доминирования (см. [8]), а также [30,59]).

Напомним необходимые понятия и обозначения. Пусть X - некоторое множество, $\alpha \subseteq X \times X$ - произвольное иррефлексивное*) бинарное отношение на X. Систему $\Gamma = (X, \alpha)$ назовем абстрактной игрой (а.и.). Будем говорить, что множество $Y \subseteq X$ внутренне устойчиво [40], если для любых двух элементов $x, y \in Y$ пара (x,y) не принадлежит Y. Обозначим через α_* транзитивное замыкание α, определяемое по формуле:

$$\alpha_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha^n,$$

где

$$\alpha' \cdot \alpha'' = \{(x,y) \in X \times X \mid \exists z\, [(x,z) \in \alpha',\ (z,y) \in \alpha'']\},$$

$$\alpha^1 = \alpha, \quad \alpha^{n+1} = \alpha^n \cdot \alpha.$$

Множество $Y \subseteq X$ называется внешне устойчивым [40], если для любого $x \in X \setminus Y$ найдется $y \in Y$ такой, что $(x,y) \in \alpha$. Естественным ослаблением внешней устойчивости является требование, фигурирующее в следующем определении.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.I [30]. Будем говорить, что множество $Y \subseteq X$ с л а б о в н е ш н е у с т о й ч и в о (относительно α), если для любого $x \in X \setminus Y$ найдется $y \in Y$ такой, что $(x,y) \in \alpha_*$.

---

*) Отношение α называется иррефлексивным, если $(x,x) \notin \alpha$, $(x \in X)$.

Сформулируем одно из главных понятий этого параграфа, являющееся обобщением известного определения Неймана - Моргенштерна [5].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.2. Внутренне устойчивое множество Y называется **обобщенным НМ-решением** а.и. (X,α), если оно слабо внешне устойчиво.

Таким образом, внутренне устойчивое множество $Y \subseteq X$ является обобщенным НМ-решением а.и. (X,α), если выполняется условие:

(E) Для любого $x \notin Y$ найдется конечное семейство $\{y_t\}_{t=0}^{m(x)}$ такое, что $y_0 = x$, $y_{m(x)} \in Y$ и $(y_{t-1}, y_t) \in \alpha$ для всех $t = 1,\dots, m(x)$.

Пусть Y - некоторое обобщенное НМ-решение а.и. $\Gamma=(X,\alpha)$. Для $x \notin Y$ через m_x обозначим наименьшее из натуральных чисел $m(x)$, для которых существует семейство $\{y_t\}_{t=0}^{m(x)}$, фигурирующее в условии (E). Назовем Y финитным, если $r(Y) = \sup\{m_x / x \in X \setminus Y\} < \infty$. В случае, когда а.и. Γ допускает хотя бы одно такое решение, величину $r(\Gamma) = \min\{r(Y)/Y$ - финитное НМ-решение $\Gamma\}$ будем называть НМ-рангом Γ.

Отметим, что НМ-ранг а.и. $\Gamma=(X,\alpha)$, имеющей НМ-решение (т.е. обладающей внутренне и внешне устойчивым множеством $Y \subseteq X$), равен I. Примеры игр, у которых НМ-ранг отличен от единицы, приведены в [8] (см. также [30]). В частности, НМ-ранг известной игры Лукаса, не имеющей НМ-решения, равен 2 [5].

В дальнейшем будем предполагать, что X наделено некоторой топологией τ. Еще одним ослаблением условия внешней устойчивости является следующее требование:

(E$'$) Любая τ-окрестность Y слабо внешне устойчива.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.3. Внутренне устойчивое множество Y называется **предельным обобщенным** НМ-решением а.и. (X,α), если оно удовлетворяет условию (E$'$).

Тип обобщенных НМ-решений а.и. $\Gamma=(X,\alpha)$ обусловлен топологическими и порядковыми характеристиками множеств $\mathcal{L}_\alpha(x) = \{y \in X / (y,x) \in \alpha\}$, $\mathcal{L}^\alpha(x) = \{y \in X / (x,y) \in \alpha\}$ и определяемого в терминах $\mathcal{L}^\alpha(x)$ ядра $C(\alpha)$. Как обычно, ядром называется множество всех α-максимальных элементов Γ:

$$C(\alpha)=\{x\in X/\mathcal{L}^{\alpha}(x)=\emptyset\}.$$

Ядро содержится в любом обобщенном НМ-решении Γ (если таковые существуют). Более того, при некоторых естественных условиях $C(\alpha)$ является предельным обобщенным НМ-решением Γ.

Напомним, что бинарное отношение α' называется ациклическим, если его транзитивное замыкание иррефлексивно ($(x,x)\notin\alpha'_*$ для всех $x\in X$).

ТЕОРЕМА I.I. Пусть $C(\alpha)\neq\emptyset$. Если X компактно и существует ациклическое сужение $\alpha'\subseteq\alpha$, для которого $C(\alpha')=C(\alpha)$ и $\mathcal{L}_{\alpha'}(x)$ открыты для всех $x\in X$, то $C(\alpha)$ является предельным обобщенным НМ-решением $\Gamma=(X,\alpha)$.

Этот результат дополняет следующая

ТЕОРЕМА I.2. Если X компактно и существует сужение $\alpha'\subseteq\alpha$, для которого $C(\alpha')=\emptyset$ и $\mathcal{L}_{\alpha'}(x)$ открыты для всех $x\in X$, то Γ имеет финитное обобщенное НМ-решение Y такое, что $|Y|<\infty$ и $\tau(\Gamma)\leq 3$.

Укажем некоторую конкретизацию полученных результатов для кооперативных игр, задающихся в форме характеристической функции $S\mapsto G(S)$ ($S\in\bar{\sigma}$), где $\bar{\sigma}=\sigma\cup\{N\}$, $\sigma\subseteq 2^N$ – семейство блокирующих коалиций, $N=\{1,\dots,n\}$ – множество игроков, а $G(S)\subseteq R^S$ – множество дележей, достижимых усилиями коалиции $S\in\bar{\sigma}$. В этом случае бинарное отношение α_G на $X_G=G(N)$ имеет вид (ниже y_S – сужение y на S):

$$x\prec_G y \Leftrightarrow \exists S\in\sigma[\forall i\in S(x_i<y_i)\,\&\,(y_S\in G(S))].$$

Частным случаем игр, задающихся в форме характеристической функции, являются так называемые игры с побочными платежами, определяемые с помощью вещественнозначных функций v : $S\to v(S)$ ($S\in 2^N$). В этой ситуации множества $G(S)=G_v(S)$ имеют вид:

$$G_v(S)=\{x\in R^S/x(S)\leq v(S),\ x_i\geq v(\{i\}),\ i\in N\},$$

где, как и всюду далее, $x(S)=\sum_S x_i$.

Приводимые ниже утверждения уточняют некоторые результаты [30].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.I. Пусть $G(S)$ замкнуты для всех $S\in\overline{\sigma}$ и $G(N)$ ограничено сверху. Тогда $\tau(\Gamma_G)\leq|\sigma|$ и при этом общая часть всех финитных обобщенных НМ-решений з.и. $\Gamma_G=(X_G,\alpha_G)$ совпадает с $C(\alpha_G)$.

Если, кроме того, множество слабо оптимальных по Парето точек $G(N)$ ограничено снизу и $C(\alpha_G)=\varnothing$, то $\tau(\Gamma_G)<3$.

СЛЕДСТВИЕ I.I. Если кооперативная игра с побочными платежами не имеет ядра, то ее НМ-ранг не превышает трех.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением наиболее интересного для приложения случая, когда $C(\alpha)\neq\varnothing$. Назовем последовательность $\{y_\tau\}_{\tau=0}^{\infty}$ α-монотонной, если $(y_{\tau-1},y_\tau)\in\alpha\cup\{(x,x)|x\in X\}$ для всех $\tau\geq 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.4. Ядро $C(\alpha)$ называется достижимым, если для любого $x\notin C(\alpha)$ найдется сходящаяся α-монотонная последовательность $\{y_\tau\}_{\tau=0}^{\infty}$ такая, что $y_0=x$ и $\lim y_\tau\in C(\alpha)$.

Помимо естественной связи с рассмотренными ранее вопросами, задача установления достижимости ядер тех или иных игр представляет и значительный самостоятельный интерес [30,59,65]. Приведем некоторые результаты о достижимости, базирующиеся на изучении подходящих динамических систем, ассоциированных с бинарным отношением α. Эти системы, как отмечалось в начале главы, и определяют процесс последовательного улучшения, генерирующий α-монотонные траектории, аппроксимирующие множество $C(\alpha)$.

Ниже предполагается, что X – полное метрическое пространство с метрикой d. Точечно-множественными динамическими системами (т.м.д.с.) на X называются соответствия $\varphi: X\to 2^X$, для которых $\varphi(x)\neq\varnothing$ при всех $x\in X$. Под траекториями понимаются последовательности $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, для которых $x_{k+1}\in\varphi(x_k)$, $k=0,1,\ldots$

Для $\psi: X\to 2^X$ положим

$$gr\,\psi=\{(x,y)\in X\times X\,/\,y\in\psi(x)\},$$

$$\psi_*(x)=\bigcup_{m=1}^{\infty}\psi^m(x), \quad x\in X,$$

где

$$\psi^1(x)=\psi(x), \quad \psi^{m+1}(x)=\bigcup_{y\in\psi^m(x)}\psi(y).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.5. Будем говорить, что т.м.д.с. φ допускает обобщенную функцию Ляпунова, если существует ограниченная функция $l: gr\,\varphi_*\to R$ такая, что

$$l(x,y)\geq d(x,y), \quad x\in X, \ y\in\varphi(x), \tag{I.I}$$

$$l(x,z)\geq l(x,y)+l(y,z), \ x\in X, \ y\in\varphi_*(x), \ z\in\varphi_*(y). \tag{I.2}$$

Наименьшей функцией, обладающей свойствами (I.I), (I.2), является конструируемое далее отображение $l_\varphi: X\times X\to R$. Пусть

$$T_\varphi^m(x,y)\triangleq\{\{x_t\}_{t=0}^m \mid x_0=x, \ x_m=y, \ x_{t+1}\in\varphi(x_t), t=0,\dots,m-1\},$$

$$T_\varphi^*(x,y)\triangleq\bigcup_{m=1}^{\infty}T_\varphi^m(x,y).$$

На множестве всех (конечных) траекторий τ, соединяющих точку $x\in X$ с точкой $y\in Y$ введем функцию

$$d(\tau)=\sum_{t=0}^{m-1}d(x_t,x_{t+1}), \quad \tau=\{x_t\}_{t=0}^m\in T_\varphi^*(x,y).$$

В этих обозначениях l_φ определяется формулой

$$l_\varphi(x,y)=\sup\{d(\tau)\mid\tau\in T_\varphi^*(x,y)\}.$$

Ясно, что φ допускает обобщенную функцию Ляпунова тогда и только тогда, когда l_φ ограничена сверху на графике φ_*.

Наличие обобщенной функции Ляпунова еще не гарантирует сходимость всех траекторий φ к ее финальному множеству

$$E_\varphi=\{x\in X\mid\varphi(x)=\{x\}\}.$$

Вместе с тем для полунепрерывных снизу т.м.д.с. φ существует стандартный способ формирования селекторов этих систем, обладающих указанным свойством и имеющих то же финальное множество, что и φ [65]. Здесь под селектором т.м.д.с. φ понимается т.м.д.с. ψ, удовлетворяющая условию:

$$gr\,\psi\subseteq gr\,\varphi.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.2. Пусть φ полунепрерывная снизу, допускающая обобщенную функцию Ляпунова т.м.д.с. на X. Положим

$$\rho(x)=\sup\{d(x,y)/y\in\varphi(x)\},\quad x\in X.$$

Тогда для любого $\delta\in(0,1)$ все траектории т.м.д.с.

$$\varphi_\delta(x)=\begin{cases}\{x\}, & x\in E_\varphi,\\ \{y\in\varphi(x)/d(x,y)>\delta\cdot\rho(x)\}, & x\notin E_\varphi,\end{cases}$$

сходятся к элементам финального множества E_φ.

На основании предложения I.2 для доказательства достижимости ядра $C(\alpha)$ достаточно построить полунепрерывную снизу, допускающую обобщенную функцию Ляпунова т.м.д.с. ψ на X, являющуюся селектором соответствия $\varphi^\alpha(x)=\mathcal{L}^\alpha(x)\cup\{x\},\ x\in X$ и удовлетворяющую соотношению $E_\psi=C(\alpha)$.

Наводящим соображением для построения таких систем $\psi\leq\varphi^\alpha$ является следующее утверждение (ниже и далее U_x - окрестность $x\in X$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.3. Если φ удовлетворяет условию

$$\forall x\,\forall y\in\varphi(x)\setminus\{x\}\,\exists U_x[y\in\bigcap_{z\in U_x}\varphi(z)],\tag{I.3}$$

то для каждого $y\in X$ функция $\ell_\varphi(\cdot,y)$ полунепрерывна снизу на $X\setminus\{y\}$.

Пусть $\mathcal{K}$ - совокупность всех подмножеств $K\subseteq X\times X$, удовлетворяющих условиям транзитивности и "телесности" по первому аргументу:

$$[(x,y),(y,z)\in K]\Rightarrow(x,z)\in K,\tag{I.4}$$

$$\forall(x,y)\in K[(x\neq y)\Rightarrow\exists U_x(U_x\times\{y\}\subseteq K)].\tag{I.5}$$

Через $M(K)$ обозначим семейство ограниченных функций $\ell:K\to R$ таких, что

$$\ell(x,z)>\ell(x,y)+\ell(y,z),\quad(x,y),(y,z)\in K,$$

и при этом для любого y функция $\ell(\cdot,y)$ полунепрерывна снизу на множестве $\{x/(x,y)\in K\}\setminus\{y\}$. Положим $\mathcal{M}=\bigcup_{\mathcal{K}}M(K)$

Рассматривая в качестве искомых селекторов системы вида

$$\psi_\ell(x)=\{y\in\mathcal{L}^\alpha(x)\,/\,\ell(x,y)>d(x,y)\}\cup\{x\},\quad x\in X,$$

получаем следующий признак достижимости.

ТЕОРЕМА I.3. Если $\mathcal{L}_\alpha(x)$ открыты для всех $x\in X$ и при этом существует функция $\ell\in\mathcal{M}$ такая, что

$$\forall x\notin C(\alpha)\,\exists y\in\mathcal{L}^\alpha(x)\,[\ell(x,y)>d(x,y)],$$

то ядро $C(\alpha)$ достижимо.

Заметим, что теорема I.3 остается справедливой, если требовать лишь полунепрерывности снизу для φ^α, предполагая, что $\alpha\subseteq K$ и $\ell:K\to\mathbb{R}$ полунепрерывна снизу по совокупности аргументов.

СЛЕДСТВИЕ I.2 [9]. Если X компактно, φ^α полунепрерывна снизу и при этом существует функция $u:X\to\mathbb{R}$ такая, что

$$\forall x\notin C(\alpha)\,\exists y\in\mathcal{L}^\alpha(x)\,[u(x)-u(y)>d(x,y)],$$

то ядро игры $\Gamma=(X,\alpha)$ достижимо.

§2. Достижимость ядер классических кооперативных игр

Рассмотрим конкретизацию простейшей схемы доказательства достижимости ядра для случая классических кооперативных игр (к.к.и.). Несколько модифицируя соответствующее определение предыдущего параграфа, под классической кооперативной игрой будем понимать игру с побочными платежами

$$G_v=(X_v,\alpha_v),$$

где $v:2^N\to\mathbb{R}$ – произвольная вещественнозначная функция, заданная на множестве всех подмножеств $S\subseteq N=\{1,\dots,n\}$, такая, что $v(\emptyset)=0$ и

$$v(S\cup T)\geqslant v(S)+v(T)$$

для любых непересекающихся S и T.

При этом через X_v обозначается множество дележей игры G_v:

$$X_v=\{x\in\mathbb{R}^N/x(N)=v(N),\ x_i\geqslant v(\{i\}),\ i\in N\},$$

а через $\prec_v$ – классическое отношение доминирования на X_v :

$$x \prec_v y \Leftrightarrow \exists S\,[\forall i \in S\,(x_i < y_i)\,\&\,(y(S) \leq v(S))].$$

Отметим, что отношение $\prec_v$, как правило, нетранзитивно, неантисимметрично и неациклично. Соответственно точечно-множественная динамическая система

$$\tilde{\varphi}^{\prec_v}(x) = \{y \in X_v \setminus C(\prec_v) / x \prec_v y\}, \quad x \in X_v \setminus C(\prec_v)$$

может допускать траектории, никоим образом не аппроксимирующие ядро $C(\prec_v)$. Более того, можно показать, что любая конечная а.и. Γ реализуется в виде подыгры подходящей к.к.и. G_v .

Наконец, уже простейшие примеры классических кооперативных игр трех лиц показывают, что множества дележей этих игр могут содержать подмножества ненулевой меры такие, что все начинающиеся в них конечные $\prec_v$ -монотонные траектории не достигают ядра.

Таким образом, несмотря на важность исследования условий, в которых ядро G_v является обобщенным НМ-решением, в общем случае речь может идти лишь об асимптотической аппроксимации ядер этих игр.

Вместе с тем, использование результатов предыдущего параграфа позволяет установить не только достижимость ядра любой классической кооперативной игры, но и построить надлежащие селекторы т.м.д.с.

$$\varphi^{\prec_v}(x) = \{y \in X_v / x \prec_v y\} \cup \{x\}, \quad x \in X_v,$$

все траектории которых $\prec_v$ -монотонны и сходятся к $C(\prec_v)$.

Ограничимся схематическим изложением доказательства достижимости ядер к.к.и. (подробное обсуждение см. в [9]). В дальнейшем игру G_v будем отождествлять с функцией v , а для ядра $C(\prec_v)$ будем использовать традиционное обозначение $C(v)$.

Итак, пусть v – произвольная к.к.и. такая, что $C(v) \neq \emptyset$. Ясно, что X_v компактно, а все множества

$$\mathcal{L}_{\prec_v}(x) = \{y \in X_v / y \prec_v x\}, \quad x \in X_v,$$

открыты в X_v . Поэтому для доказательства достижимости достаточно на основании следствия 1.2 построить непрерывную функцию $u : X_v \to R$, удовлетворяющую условию

$$\forall x \notin C(v)\, \exists y \in X_v\, [(x \prec_v y)\,\&\,(u(x) - u(y) > d(x,y))], \quad (2.1)$$

где

$$d(x,y)=\|x-y\|_2 .$$

Искомая функция $u=u_v$ имеет достаточно естественный вид:

$$u_v(x)=4n\cdot d(x, C(v)), \quad x\in X_v,$$

где $d(x, Y)$ – расстояние от x до множества Y в евклидовой норме $\|x\|_2=(\sum_i x_i^2)^{1/2}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.I. Функция u_v удовлетворяет условию (2.I).

Для проверки приведенного утверждения рассмотрим произвольный элемент $x\in X_v \setminus C(v)$. Покажем, что существует $z\in X_v$, удовлетворяющий неравенству

$$u_v(x)-u_v(z) > d(x,z) \tag{2.2}$$

и следующему ослабленному требованию доминируемости: $x \prec_v z$, где

$$x\prec_v z \Leftrightarrow \exists S\subseteq N[\forall i\in S(x_i\le z_i)\,\&\,(x(S)<z(S)\le v(S))].$$

Поскольку при выполнении условия $x\prec_v z$ всякая окрестность z содержит элемент $y\in X_v$, доминирующий (в классическом смысле) дележ x, а соотношение (2.2), ввиду непрерывности u_v, выполняется и в некоторой окрестности z, то существование упомянутого z обеспечивает справедливость предложения 2.I.

Для построения z рассмотрим наименее уклоняющийся от x (в норме $\|\cdot\|_2$) элемент $\tilde z\in C(v)$. Легко убедиться, что существует коалиция $S\subseteq N$ такая, что $x(S)<\tilde z(S)=v(S)$.

Положим

$$S_1=\{i\in S/x_i<\tilde z_i\},$$

$$S_2=\{i\in S/x_i\ge \tilde z_i\},$$

$$T_1=\{i\in N\setminus S/x_i>\tilde z_i\},$$

$$T_2=\{i\in N\setminus S/x_i\le \tilde z_i\}.$$

Если $S_2^+=\{i\in S_2/x_i>\tilde z_i\}$ пусто, то в качестве искомого можно взять элемент $\tilde z$. Если же $S_2^+\ne\emptyset$, то, полагая

$$\varepsilon(x,S)=v(S)-x(S),$$

$$q_1 = e(x,S)/(\tilde{z}(S_1) - x(S_1)),$$

$$q_2 = e(x,S)/(x(T_1) - \tilde{z}(T_1)),$$

определим $z \in R^N$ по формуле

$$z_i = \begin{cases} x_i + q_1(\tilde{z}_i - x_i), & i \in S_1, \\ x_i + q_2(\tilde{z}_i - x_i), & i \in T_1 \\ x_i, & i \in S_2 \cup T_2. \end{cases} \tag{2.3}$$

Ясно, что ввиду $q_1, q_2 \in (0,1]$ элемент z принадлежит X_v, причем $x \prec_v z$ (относительно коалиции $S = S_1 \cup S_2$).

Для проверки неравенства (2.2) заметим, что

$$d(x,z) \le \sqrt{2} \cdot e(x,S), \tag{2.4}$$

а нижняя оценка для разности $d(x,\tilde{z}) - d(z,\tilde{z})$ имеет вид:

$$d(x,\tilde{z}) - d(z,\tilde{z}) \ge (Q_1 + Q_2)/2d(x,\tilde{z}), \tag{2.5}$$

где

$$Q_1 = (2q_1 - q_1^2) \cdot \sum_{S_1} (\tilde{z}_i - x_i)^2,$$

$$Q_2 = (2q_2 - q_2^2) \cdot \sum_{T_1} (\tilde{z}_i - x_i)^2.$$

Оценивая знаменатель правой части соотношения (2.5) с помощью неравенства Коши - Буняковского, получаем

$$d(x,\tilde{z}) \le \sqrt{n}\,(Q_1/(2q_1 - q_1^2) + Q_2/(2q_2 - q_2^2))^{1/2}.$$

Наконец, учитывая определение величин q_1, q_2 и соединяя неравенства (2.4), (2.5), получаем требуемое соотношение:

$$u_v(x) - u_v(z) \ge 2e(x,S) > d(x,z).$$

Таким образом, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2.1 [9]. Ядра классических кооперативных игр достижимы.

Приведем некоторые комментарии, касающиеся полученного результата. Прежде всего отметим, что выбор строго выпуклой нормы $\|\cdot\|_2$ существен не только с технической точки зрения. Дело в том, что при отсутствии строгой выпуклости множеств $\{y \in X_v / d(x,y) \le r\}$ все точки, доминирующие некоторую

$x \notin C(v)$, могут быть удалены от ядра на расстояние, большее чем $d(x, C(v))$. Это подтверждается следующим примером.

Пусть $N = \{1,2,3,4\}$,

$$v(S) = \begin{cases} 1, & S = \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \\ 1/2, & S = \{2,4\}, \{3,4\}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \qquad (2.6)$$

Нетрудно проверить, что $C(v) = \{(0, 1/2, 1/2, 0)\}$. Если в качестве метрики d взять расстояние $d_\infty(x,y) = \max\{|x_i - y_i| \,|\, i \in N\}$, то для дележа $\bar{x} = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$ любой доминирующий его z имеет вид:

$$z_i = \begin{cases} 1/4 + \delta_i, & i = 1,2,3, \\ 1/4 - \delta, & i = 4, \end{cases}$$

где $\delta_i > 0$ для всех $i = 1,2,3$ и $\delta = \sum_{i=1}^{3} \delta_i < 1/4$.

При этом в рассматриваемой метрике

$$d_\infty(z, C(v)) = 1/4 + \delta_1 > 1/4 = d_\infty(\bar{x}, C(v)).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Анализируя доказательство теоремы, нетрудно убедиться, что она справедлива и для игр, не удовлетворяющих условию супераддитивности:

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) \qquad (S \cap T = \varnothing).$$

Поэтому отсутствие супераддитивности в приведенном примере несущественно. Более того, известным приемом (см. [42]) функция, определяемая формулой (2.6), может быть трансформирована в супераддитивную так, что отвечающая этой последней игра имеет то же ядро и то же множество дележей, доминирующих $\bar{x}$.

Далее, для построения функций u_v явным образом использовалась информация о ядрах $C(v)$. Понятно, что более привлекательными являются функции Ляпунова, определяемые по локальным характеристикам точки x. Некоторые результаты в этом направлении получены в [8] для так называемых центрированных кооперативных игр G_v, характеризующихся свойством

$$\bigcap_{S \in \mathcal{T}_v^+} S \neq \varnothing,$$

где

$$\mathcal{T}_v^+ = \{S \subseteq N / v(S) > 0\}.$$

Отметим, что центрированными играми являются , например, все к.к.и. $v: 2^N \to \{0,1\}$, для которых $C(v) \neq \emptyset$.

Как установлено в [8], для центрированных к.к.и. функцию Ляпунова можно определить по формуле:

$$u(x) = 1/\varepsilon \sum_{S \in N} e(x,S)^+, \quad x \in X_v,$$

где $e(x,S)^+ = \max\{e(x,S), 0\}$, а ε – произвольное число из интервала (0,1). При этом в качестве метрики следует брать $d_\infty(x,y) = \max\{|x_i - y_i| / i \in N\}$.

В общем случае вопрос остается открытым. Однако, как показывают результаты следующего параграфа, собственно функции Ляпунова (без оценки $u(x) - u(y) > d(x,y), y \in \varphi(x)$) существуют для весьма широкого класса игр с побочными платежами. Не обеспечивая достижимости ядер, упомянутые функции и построенные по ним т.м.д.с. гарантируют во всяком случае попадание за конечное число шагов в любую наперед заданную окрестность $C(v)$.

§3. Асимптотическая устойчивость монотонных траекторий обмена

Настоящий параграф посвящен монотонным траекториям обмена, требующим для своего построения лишь локальной информации о текущем состоянии. Такие траектории, вообще говоря, не сходятся к ядру, однако при соблюдении надлежащих условий все их предельные точки являются неулучшаемыми. Последнее обстоятельство гарантирует если не достижимость ядра, то во всяком случае совпадение его с предельным обобщенным ПМ-решением.

Начнем с построения упомянутых траекторий для кооперативных игр с классическим отношением доминирования. Покажем, что в этом случае последовательное улучшение может быть организовано в виде некоторого процесса градиентного типа.

Ограничимся рассмотрением сбалансированных игр $v: 2^N \to R$, удовлетворяющих условиям:

$$v(\{i\}) = 0, \quad i \in N, \tag{3.1}$$

$$v(S \cup \{i\}) > v(S), \quad i \in N \setminus S, \quad S \subseteq N. \tag{3.2}$$

Ясно, что ядро $C(v)$ можно охарактеризовать как множество нулей (в X_v) функции $\Phi : R^N \to R$, определяемой формулой:

$$\Phi(x) = \max\{g_S^2(x) / S \subseteq N\},$$

где

$$g_S(x) = e(x, S)^+ ,$$
$$e(x,S) = v(S) - x(S).$$

Поскольку $\Phi(x) > 0$ для всех $x \in X_v \setminus C(v)$, направление перехода естественно выбирать среди тех векторов, вдоль которых функция Φ убывает.

Субдифференциал функции Φ имеет вид:

$$\partial\Phi(x) = co\{-2g_S(x)\cdot e^S / S \in M(x)\},$$

где

$$M(x) = \{S / \Phi(x) = g_S^2(x)\},$$

а e^S – характеристическая функция множества S . Векторы из $-\partial\Phi(x)$ не могут быть использованы в качестве направлений перехода из точки x , поскольку они выводят за пределы множества дележей X_v. Поэтому предварительно рассмотрим проекции $\bar{\tau}^S(x)$ векторов $-\partial g_S^2(x)$ на плоскость $\sum_N x_i = 0$. Нетрудно проверить, что

$$\bar{\tau}_i^S(x) = \begin{cases} 2/N\setminus S|/|N| \cdot e(x,S), & i \in S, \\ -2|S|/|N| \cdot e(x,S), & i \in N\setminus S. \end{cases} \qquad (3.3)$$

Выбирая достаточно малое $\bar{\alpha} > 0$, можно добиться выполнения следующих неравенств:

$$\sum_S (x_i + \bar{\alpha}\cdot\bar{\tau}_i^S(x)) \leq v(S), \quad S \in M(x).$$

Положим $\tau^S(x) = \bar{\alpha}\cdot\bar{\tau}^S(x)$. Элементы $\tau^S(x)\ (S \in M(x))$ и будут определять направления перехода из точки x . Что касается величины шага в указанных направлениях, то она задается с помощью функции

$$\alpha(x) = \sup\{\alpha \in [0,1] / x + \alpha\cdot\tau^S(x) \in X_v,\ S \in M(x)\}.$$

В силу условия (3.2) функция α строго положительна. Поэтому, учитывая соотношения

$$\sum_N \tau_i^S(x)=0, \quad \tau_i^S(x)>0 \quad (i\in S),$$

справедливые для любых $x\in X_v\setminus C(v)$ и $S\in M(x)$, имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.I. Для любых $x\in X_v\setminus C(v)$ и $S\in M(x)$ дележ $x+\alpha(x)\cdot\tau^S(x)$ принадлежит X_v и доминирует x по коалиции S.

Опираясь на предложение 3.I, опишем процесс построения искомой монотонной последовательности.

Пусть $x\in X_v\setminus C(v)$. Положим $x_0=x$ и допустим, что построен $x_k\in X_v\setminus C(v)$. Строим x_{k+1} по следующей схеме.

I°. Из множества коалиций, блокирующих дележ x_k, выберем те, эксцессы которых максимальны, определяя тем самым множество $M(x_k)$.

2°. Строим векторы $\tau^S(x_k)$, $S\in M(x_k)$.

3°. Вычисляем $\alpha(x_k)$.

4°. В качестве x_{k+1} берем любую из точек $x_k+\alpha(x_k)\cdot\tau^S(x_k)$ ($S\in M(x_k)$).

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.I. Предельные точки любой последовательности, генерируемой по указанной выше схеме, принадлежат ядру $C(v)$ игры v.

Одно из прямых следствий теоремы 3.I состоит в том, что ядро всякой игры v, удовлетворяющей условиям (3.1), (3.2), является предельным обобщенным НМ-решением v.

Отметим далее, что предложенный способ построения монотонной траектории обмена допускает следующую интерпретацию. В текущем состоянии $x\in X_v$ каждая коалиция S оценивает это состояние величиной эксцесса $e(x,S)$ (мерой собственной неудовлетворенности дележом x). Если эксцессы одной или нескольких коалиций положительны, то право предложить следующий дележ предоставляется тем из них, которые находятся в худшем положении (имеют наибольший эксцесс). Каждая коалиция $S\in M(x)$ может потребовать от дополняющей коалиции $N\setminus S$ выплату побочного платежа $\alpha(x)\cdot e(x,S)$, подлежащего последующему равномерному распределению между участниками коалиции S. Предназначенная к выплате сумма в равных долях изымается у игроков, составляющих коалицию $N\setminus S$.

Перейдем к рассмотрению монотонных траекторий, соответствующих процессам последовательного улучшения в моделях чистого об-

мена. Однако в отличие от предыдущего случая в качестве оптимальных состояний возьмем не элементы ядра, а множество эффективных распределений. Далее, во избежание граничных эффектов будем использовать вариант модели обмена, аналогичный изучавшемуся в [75].

Таким образом, исследуемая модель имеет вид:

$\mathcal{E} = \langle N, \{X_i, w^i, u_i\}_N, \sigma \rangle$,

где $X_i = int\, R_+^{\ell}$, $w^i \in int\, R_+^{\ell}$ для всех $i \in N$, а $\sigma \subseteq 2^N$ - некоторая совокупность допустимых коалиций в N.

Монотонность траекторий определяется в терминах следующего бинарного отношения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.I. Будем говорить, что распределение $x \in X(N)$ ж) доминируется распределением $\tilde{x} \in X(N)$, если найдется коалиция $S \in \sigma$ такая, что

$$u_i(\tilde{x}^i) > u_i(x^i), \quad i \in S, \tag{3.4}$$

$$\sum_S \tilde{x}^i = \sum_S x^i, \quad \tilde{x}^j = x^j, \quad j \in N \setminus S. \tag{3.5}$$

Распределения $x \in X(N)$, не доминируемые никакими $\tilde{x} \in X(N)$, будем называть σ-эффективными. Множество всех таких распределений обозначим через $\Theta_\sigma(\mathcal{E})$.

Отметим сразу же, что для строго возрастающих функций u_i множество $\Theta_\sigma(\mathcal{E})$ совпадает с границей Парето модели $\mathcal{E}$, если только $N \in \sigma$. Этот же факт остается справедливым и при существенно более слабом требовании относительно коалиционной структуры σ. Именно, для совпадения $\Theta(\mathcal{E})$ и $\Theta_\sigma(\mathcal{E})$ достаточно неразложимости σ, состоящей в том, что для любого множества $S \subseteq N$ $(S \neq \emptyset, N)$ существует элемент $S' \in \sigma$, для которого $S' \cap S \neq \emptyset$ и $S' \cap (N \setminus S) \neq \emptyset$.

Тем не менее следует подчеркнуть, что в общем случае $\Theta(\mathcal{E}) \neq \Theta_\sigma(\mathcal{E})$.

Для того чтобы построить надлежащее сужение бинарного отношения $\prec_\sigma$, задаваемого определением 3.I, потребуются следующие дополнительные предположения относительно гладкости, монотонности и выпуклости функций u_i.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3.I. AI. Функции u_i дважды непрерывно дифференцируемы.

ж) Напомним, что $X(N) = \{x \in \prod_N X_i \,/\, \sum_N x^i = \sum_N w^i\}$.

A2. Для всех $i \in N$ и $x \in \operatorname{int} R^l_+$ градиент $\operatorname{grad} u_i(x)$ строго положителен.

A3. Для всех $i \in N$ и $x \in \operatorname{int} R^l_+$ гессиан $D^2 u_i(x)$ отрицательно определен на множестве $\operatorname{grad} u_i(x)^\perp = \{z \in R^l / \operatorname{grad} u_i(x) \cdot z = 0\}$.

Кроме того, в дальнейшем используется приводимое ниже граничное условие.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3.2. Для любых $i \in N$ и $c \in R$ множество $\{x \in \operatorname{int} R^l_+ / u_i(x) = c\}$ замкнуто в R^l.

Зафиксируем $\nu \in (0,1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Пусть $x, \tilde{x} \in X(N)$. Будем говорить, что $\tilde{x}$ ν-доминирует x, если существует коалиция $S \in \sigma$ такая, что

$$\cos(\tilde{x}^i - x^i, g_i(x^i)) = (\tilde{x}^i - x^i, g_i(x^i)) / \|\tilde{x}^i - x^i\| > \\ > \nu, \quad \sum_S \tilde{x}^i = \sum_S x^i, \quad \tilde{x}^j = x^j, \quad j \in N \setminus S, \tag{3.6}$$

где $g_i(x) = \operatorname{grad} u_i(x) / \|\operatorname{grad} u_i(x)\|$.

Условие (3.6) определения 3.2 означает, что из всех распределений, доминирующих x (по S), выбираются те, в которых прирост функций полезности участников S соизмерим с объемом сделки. Действительно, в силу выпуклости u_i при некотором $\lambda = \lambda(\nu)$ для всех $i \in S$ справедливы неравенства

$$u_i(\tilde{x}^i) - u_i(x^i) \geq \lambda \|\tilde{x}^i - x^i\|, \quad \tilde{x} \in \varphi_\nu(x), \tag{3.7}$$

где $\varphi_\nu(x)$ – множество всех $\tilde{x} = (\tilde{x}^i)_N \in X(N)$, ν-доминирующих x.

Положим $\bar{\varphi}_\nu(x) = \varphi_\nu(x) \cup \{x\}$ $(x \in X(N))$ и отметим некоторые свойства этой точечно-множественной динамической системы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Т.м.д.с. $\bar{\varphi}_\nu$ *полунепрерывна снизу и, кроме того, для всех* $\tilde{x} \in X(N)$ и $x \in \bar{\varphi}_\nu(\tilde{x})$ *выполняется неравенство*

$$u(\tilde{x}) - u(x) \geq d(\tilde{x}, x),$$

где

$$u(x) = 1/\lambda \cdot \sum_N u_i(x^i),$$

$$d(x,\tilde{x}) = \sum_N |x^i - \tilde{x}^i|_2 .$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Для любого $x \in X(N)$ существует траектория т.м.д.с. $\bar{\varphi}_\nu$ с началом в x, сходящаяся к некоторой финальной точке $\bar{\varphi}_\nu$.

Рассмотрим однопараметрическое семейство т.м.д.с. $\bar{\varphi}_\nu$ ($\nu \in (0,1)$) и для каждого $\nu \in (0,1)$ через E_ν обозначим множество всех финальных состояний системы $\bar{\varphi}_\nu$:

$$E_\nu = \{x \in X(N) / \bar{\varphi}_\nu (x) = \{x\}\}.$$

Существование монотонных траекторий обмена, аппроксимирующих множество $\theta_\sigma(\mathcal{E})$, базируется на следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 3.2. Для любой последовательности $\nu_k \to 0$ предел последовательности множеств $\{E_{\nu_k}\}_{k=1}^\infty$ существует и равен $\theta_\sigma(\mathcal{E})$.

Приступая к построению интересующей нас траектории, начинающейся в какой-либо точке $x \in X(N) \setminus \theta_\sigma(\mathcal{E})$, зафиксируем некоторую последовательность $\varepsilon_k \downarrow 0$. По заданным ε_k в соответствии с предложением 3.3 и теоремой 3.2 найдем числа $\nu_k \in (0,1)$ такие, что для любого $x' \in X(N)$ существует траектория системы $\bar{\varphi}_{\nu_k}$, начинающаяся в x', все элементы которой с номерами, большими некоторого m_k (не зависящего от x'), лежат в ε_k -окрестности множества $\theta_\sigma(\mathcal{E})$. В результате организованного надлежащим образом процесса последовательного улучшения из состояния x за m_1 шагов попадаем в состояние x_{m_1}, принадлежащее ε_1 -окрестности $\theta_\sigma(\mathcal{E})$, затем из x_{m_1} - в $x_{m_1+m_2}$ (из ε_2 -окрестности $\theta_\sigma(\mathcal{E})$) и т.д. Ясно, что все предельные точки построенной таким образом траектории обмена принадлежат множеству σ-эффективных состояний $\mathcal{E}$, что и обеспечивает искомую асимптотическую устойчивость этой траектории.

ЛИТЕРАТУРА

I. Ауман Р. Рынки с континуумом участников. - В кн.: Математическая экономика. М.: Мир, 1974, с.64-78.
2. Беленький В.З., Волконский В.А. и др. Итеративные методы в теории игр и программировании. - М.: Наука, 1974.
3. Браверман Э.М., Левин М.И. Неравновесные модели экономических систем. - М.: Наука, 1981.
4. Булавский В.А. Оценки факторов и проблема выбора. - Оптимизация, 1982, вып. 28(45), с.70-73.
5. Васильев В.А. Игра Лукаса не имеет НМ-решений в Н-дележах.- Оптимизация, 1981, вып. 27(44), с.5-20.
6. Васильев В.А. Существование информационного равновесия в экономике чистого обмена. - Оптимизация, 1983, вып. 33(50), с.79-94.
7. Васильев В.А. О характеризации информационного равновесия.- Тез. докл. II Всесоюзной школы по применению методов оптимизации в экономике. Ашхабад, 1984, с.72-73.
8. Васильев В.А. Модели экономического обмена и кооперативные игры. Учебное пособие. - Новосибирск: изд. НГУ, 1984.
9. Васильев В.А., Жоробеков О.Р. Достижимость ядер классических кооперативных игр. - Оптимизация, 1985, вып. 35(52), с. 121-133.
10. Вилкас Э.Й. Теория полезности. - В кн.: Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. Т.14 (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР). М., 1977, с.123-151.
11. Вирченко М.И., Шестакова Н.В. Экономический анализ оценок продукции и ресурсов в задачах размещения сельскохозяйственного производства. - В кн.: Проблемы экономической кибернетики в сельском хозяйстве. Новосибирск, 1977, с.34-54.
12. Воробьев Н.Н. Современное состояние теории игр. - Усп. мат. наук, 1970, т.25, вып 2(152), с.81-140.
13. Гералавичюс В. К проблеме единого подхода к общему равновесию в динамических дискретных конечных моделях. I,II. - Литовский мат. сб., 1984, № 3, с.74-97.
14. Горелик В.А., Кононенко А.Ф. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. - М.: Радио и связь, 1982.

I5. Данилов В.И., Сотсков А.И. Конкурентное равновесие в коалиционных играх. - В кн.: Общественная полезность: экономико-математический анализ. - М.: изд. ЦЭМИ АН СССР, 1983.
I6. Данилов В.И., Сотсков А.И. Чистый обмен при меновых стоимостях. - В кн.: Проблема равновесия и принятие экономических решений. - М.: изд. ЦЭМИ АН СССР, 1985, с.3-18.
I7. Данилов В.И. Экономическое равновесие и обобщенные цены.- В кн.: Исследования по стохастической теории управления и математической экономике. - М.: изд. ЦЭМИ АН СССР, 1980, с.25-42.
I8. Данилов В.И. Модели группового выбора. - Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернетика, 1981, № I, с.I43-I64.
I9. Джалилов А.А. Об операторе агрегирования, сохраняющем экстремальные свойства экономической модели. - Новосибирск, 1984.- (Препринт/ ИМ СО АН СССР: 68).
20. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений. - Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1965, т.5, № 3, с.395-453.
2I. Ефимов Б.А., Шаповалов А.С. Модели равновесия с налогами, общественными благами и общественным выбором. - В кн.: Проблема равновесия и принятие экономических решений. - М.: изд. ЦЭМИ АН СССР, 1985, с.59-86.
22. Канторович Л.В., Вирченко М.И. Математико-экономический анализ плановых решений и экономические условия их реализации. - В кн.: Вопросы анализа плановых решений в сельском хозяйстве. - Новосибирск, 1971, с.5-40.
23. Козырев А.Н. Равновесные решения задач многоцелевой оптимизации. - Новосибирск, 1984. - I6 с. - (Препринт/ ИМ СО АН СССР: 76).
24. Козырев А.Н., Маракулин В.М. Об определении экономического равновесия в модели рынка с взаимовлияниями. - Новосибирск, 1983. - 52 с. - (Препринт/ ИМ СО АН СССР: 32).
25. Ларичев О.И., Поляков О.А. Человеко-машинные процедуры решения многокритериальных задач математического программирования. - Экономика и мат. методы, 1980, т.I6, вып.I, с.I29-I45.
26. Ляпунов А.А. О вполне аддитивных вектор-функциях. - Изв. АН СССР. Сер. мат., 1940, № 3, с.465-478.

27. Макаров В.Л. Существование экономического равновесия в условиях множественности видов денег и цен. – Сиб. мат. журн., 1978, т.19, № 5(III), с.1083-1091.
28. Макаров В.Л. Модели и компьютеры в экономике. – М.: Знание, 1979.
29. Макаров В.Л. Модели согласования экономических интересов. Учебное пособие. – Новосибирск: изд. НГУ, 1981.
30. Макаров В.Л., Васильев В.А., Козырев А.Н., Маракулин В.М. О некоторых проблемах и результатах современной математической экономики. – Оптимизация, вып. 30(46), 1982, с. 5-86.
31. Макаров В.Л. Экономическое равновесие: существование и экстремальные свойства. – В кн.: Современные проблемы математики. Т.10 (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР). М., 1982, с.23-58.
32. Макаров В.Л., Васильев В.А. Информационное равновесие и ядро в обобщенных моделях обмена. – Докл. АН СССР, 1984, т.275, № 3, с.549-553.
33. Макаров В.Л., Рубинов А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. – М.: Наука, 1973.
34. Маленво Э. Лекции по микроэкономическому анализу. – М.: Наука, 1985.
35. Маракулин В.М. Равновесие и субравновесие в конечных экономиках с внешними влияниями. Теоремы существования. – Новосибирск, 1984. – 24 с. – (Препринт/ ИМ СО АН СССР:81).
36. Маракулин В.М. Континуальные модели обмена с внешними влияниями. Существование равновесия. – Новосибирск, 1984. – 42 с.– (Препринт/ ИМ СО АН СССР: 82).
37. Математические модели и статистический анализ научно-технического прогресса. – М.: изд: ВНИИСИ, 1982.
38. Моисеев Н.Н. Иерархические структуры и теория игр. – Кибернетика, 1973, № 6, с.1-11.
39. Моисеев Н.Н. Математика ставит эксперимент. – М.: Наука, 1979.
40. Нейман Дж. фон, Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. – М.: Наука, 1970.
41. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. – М.: Мир, 1972.
42. Партхасаратхи Т., Рагхаван Т. Некоторые вопросы теории игр двух лиц. – М.: Мир, 1974.

43. Петросян Л.А., Данилов Н.Н. Кооперативные дифференциальные игры и их приложения. – Томск: изд. ТГУ, 1985.
44. Полтерович В.М. Об одной модели перераспределения ресурсов.- Экономика и мат. методы, 1970, т.6, вып. 4, с.583-593.
45. Полтерович В.М. Оптимальное распределение благ при неравновесных ценах. – Экономика и мат. методы, 1980, т.16, вып. 4, с.746-759.
46. Полтерович В.М. Уравновешенные состояния в задачах векторной оптимизации. - Автоматика и телемеханика, 1984, № 5, с.89-96.
47. Рубинов А.М. Экономическая динамика. – В кн.: Современные проблемы математики . Т.19 (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР). М., 1982, с.59-110.
48. Aubin J.-P. Mathematical methods of game and economic theory. – Amsterdam: North-Holland, 1979.
49. Balasko Y. Some results on uniquess and stability of equilibrium theory. – J. Math. Econ., 1975, N 2, p.95-118.
50. Balasko Y. Budget constrained Pareto-efficient allocations. – J.Econ. Theory, 1979, v.21. N 3, p.359-379.
51. Baudier E. Competitive equilibrium on a game. – Econometrica, 1973, 41, p.1048-1068.
52. Debreu G. Economies with a finite set of equilibria. – Econometrica, 1970, v.38, p.387-392.
53. Debreu G., Scarf H. A limit theorem on the core of an economy. – Intern. Econ. Rev., 1963, v.4, p.235-246.
54. Dierker E. Topological methods in Walrasian economics.- Lecture notes in Economics and Mathematical Systems, 92. Berlin: Springer, 1974.
55. Diestel J., Uhl J. Vector measures. – Math. Surveys, 15, Amer. Math. Soc., Providence R.I., 1977.
56. Florenzano M. L'equilibre economique general transitif et intransitif: probleme d'existence. – Paris, CNRS-CEPRE MAP, 1981.
57. Gale D. The linear model. – J. Math. Econ., 1976, v.3, p.205-209.
58. Gale D., Mas-Colell A. An equilibrium existence theorem for a general model without ordered preferences. – J. Math. Econ., 1975, v.2, N 1, p.9-15.
59. Green J.R. Stability of Edgeworth's recontracting process.-

Econometrica, I974, v.42, N I, p.2I-34.

60. Hildenbrandt W. Core and equilibria of a large economy. - Princeton: Univ. Press, I974.

6I. Huang G.L., Masud A.S.M. Multiple objective decision-making. - Methods and applications. A state of the survey. - Berlin - Heidelberg - New York: Springer-Verlag, I979.

62. Huang Kuo S. The family of inverse demand systems. - European Econ. Rev., I983, v.23, N 3, p.324-337.

63. Keiding H. Existence of budget-constrained Pereto-efficient allocations. - J. Econ. Theory, I98I, v.24, N 3, p.393-397.

64. Makarov V.L. Some results on general assumptions about the existence of economic equilibrium. - J. Math. Econ., I98I, v.8, N I, p.87-99.

65. Mashler M., Peleg B. Stable sets and stable points of set-valued dynamic systems with applications to game theory. - SIAM J. Control and Optimization, I976, v.I4,N 6, p. 985-995.

66. Milleron J.-C. Theory of value with public goods: a survey article. - J. Econ. Theory, I972, v.5, p.4I9-477.

67. Nayak P.R. Effuciency of non-Walrasian equilibria. - Econometrica, I980, v.48, N I, p.I27-I34.

68. Nurminsky E. Decomposition algorithm based on the primal-dual approximation. - WP-82-46.I982, IIASA, Laxenberg, Austria.

69. Nurminsky E., Balabanov T. Decomposition of a large-scale energy model. - Large Scale Systems, I983, 4, p.295-308.

70. Ostroy J.M. On the existence of Walrasian equilibrium in large-square economics. - J. Math. Econ., I984, v.13, N 2, p. I43-I64.

7I. Richardson M. Solutions of irreflexive relations. - Ann. Math., I953, v.58, p.573-590.

72. Roth A.E. Axiomatic models of bargaining. - Berlin - Heidelberg - New York: Springer-Verlag, I979.

73. Roth A.E. Subsolutions and supercore of cooperative games. Math. Oper. Res., I976, v.I, p.43-49.

74. Sen A.K. Interpersonal aggregation and partial comparability. - Ecomometrica, I970, v.38, p.393-409.

75. Smale S. Global analysis and economics: Geometrical analysis of Pareto-optima and price equilibria under classical hypotheses. - J. Math. Econ., I976, v.3, N I, p.I-I4.

Поступила в ред.-изд. отдел
25.I2.I985 г.