Модели динамики и равновесия

УДК 330.115

ДИСКОНТИРУЮЩИЕ ФУНКЦИИ И ПОТРЕБИТЕЛЬСКИЙ СПРОС

Н.П.Дементьев

В работе изучаются модели экономической динамики с дисконтированной функцией полезности. Исследуется связь между дисконтирующими коэффициентами и равновесием спроса и предложения потребительских благ. Устанавливается, что баланс спроса и предложения в сущности предопределяет дисконтирующие коэффициенты. На простом примере показано, что для равновесных траекторий теорема о магистрали не имеет места при обычных предложениях в теории магистралей. Проводится сравнительный анализ равновесных траекторий сбалансированного роста, соответствующих различным предположениям о формировании потребительского спроса.

1. Модель. Основные ограничения модели описываются следующими соотношениями:

$$(x_{t-1}, \ell_t, y_t) \in Q_t, \tag{1}$$

$$y_t \geq x_t + c_t, \tag{2}$$

$$\ell_t \leq L_t, \tag{3}$$

$$x_0 \leq a, \quad t = 1, 2, \ldots, T. \tag{4}$$

Здесь заданы:

$Q_t \subset R_+^n \times R_+ \times R_+^n$ – выпуклое компактное технологическое множество, $0 \in Q_t$;

$L_t \in R_+$ – объем трудовых ресурсов в году t ;

$a \in R^n_+$ – ресурсы в начале планового периода;

$T > 0$ – длина планового периода, T – целое число.

Неизвестными величинами являются:

$x_{t-1} \in R^n_+$ – вектор затрат в году t ;

$y_t \in R^n_+$ – вектор выпусков в году t ;

$c_t \in R^n_+$ – вектор потребления в году t ;

$l_t \in R_+$ – объем трудовых ресурсов, используемых в году t.

Предполагается, что целевая функция имеет вид:

$$\sum_{t=1}^{T} \psi_t u_t(c_t) + \varphi v(x_T), \qquad (5)$$

где $u_t : R^n_+ \longrightarrow R_+$ – строго вогнутая дифференцируемая возрастающая функция полезности потребительских благ в году t, $u_t(0) = 0$, $v : R^n_+ \longrightarrow R_+$ – вогнутая дифференцируемая возрастающая функция полезности ресурсов, переходящих за плановый период, $v(0) = 0$, $\psi_1, \ldots, \psi_T, \varphi \in R_+$ – дисконтирующие (взвешивающие) коэффициенты.

Предположим, что существует допустимое решение (I)-(4), удовлетворяющее ограничениям (2)-(4) как строгим неравенствам.

Зафиксируем коэффициенты $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_T)$, v такие, что $(\psi, v) \geq 0$, $(\psi, v) \neq 0$. Тогда задача (I)-(5) имеет оптимальное решение и соответствующие двойственные оценки продуктов p_t и труда π_t (в случае неединственности выбираем произвольные представители).

Считаем, что заданы некоторые непрерывные функции Π_t, $t = 1, \ldots, T$, зависящие от величин $x_0, x_1, \ldots, x_T, y_1, \ldots, y_T$, $c_1, \ldots, c_T, p_0, p_1, \ldots, p_T, \pi_1, \ldots, \pi_T$ и удовлетворяющие включению

$$\Pi_t \in [0, \sum_{\tau=1}^{t} \pi_\tau l_\tau - \sum_{\tau=1}^{t-1} \Pi_\tau].$$

Π_t можно понимать как количество "денег", которое потребитель намерен потратить в году t, сообразуясь с полной информацией об экономической системе до этого года. Согласно указанному включению можно откладывать "деньги" на последующие годы, но нельзя покупать в долг. Решение $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_T, \bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_T$ с оценками $\bar{p}_0, \bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_T$, $\bar{\pi}_1, \ldots, \bar{\pi}_T$ мы будем называть равновесным, если

$$\bar{p}_t \bar{c}_t = \Pi_t \qquad \text{для всякого} \quad t = 1, \dots, T. \qquad (6)$$

ТЕОРЕМА I. При указанных выше предположениях относительно модели существуют взвешивающие коэффициенты $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_T), \varphi$, порождающие равновесное оптимальное решение с соответствующими двойственными оценками.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем величины $(\psi, \varphi) \neq 0$, $(\psi, \varphi) \geq 0$. Согласно теореме Куна – Таккера [I, с.78], задача (I)-(5) имеет седловую точку функции Лагранжа $\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_T, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_T, \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_T, \bar{p}_0, \dots, \bar{p}_T, \bar{\pi}_1, \dots, \bar{\pi}_T$. Отсюда

$$\bar{p}_0 (a - x_0) + \sum_{t=1}^{T} \bar{p}_t (y_t - x_t - c_t) + \sum_{t=1}^{T} \bar{\pi}_t (L_t - l_t) +$$

$$+ \sum_{t=1}^{T} \psi_t u_t (c_t) + \varphi v(x_T) \leq \bar{p}_0 (a - \bar{x}_0) + \sum_{t=1}^{T} \bar{p}_t (\bar{y}_t - \bar{x}_t - \bar{c}_t) +$$

$$+ \sum_{t=1}^{T} \bar{\pi}_t (L_t - \bar{l}_t) + \sum_{t=1}^{T} \psi_t u_t (\bar{c}_t) + \varphi v(\bar{x}_t) \qquad (7)$$

для всех траекторий (x_{t-1}, l_t, y_t), удовлетворяющих (I). Не ограничивая общности, можно считать, что $\sum_{t=1}^{T} \psi_t + \varphi = 1$. Сопоставим вектору (ψ, φ) вектор $(\tilde{\psi}, \tilde{\varphi})$ по правилу:

$$\tilde{\psi}_t = \psi_t + \alpha (\Pi_t - \bar{p}_t \bar{c}_t), \qquad (8)$$

$$\tilde{\varphi} = \varphi + \alpha \left(\sum_{t=1}^{T} \bar{p}_t \bar{c}_t - \sum_{t=1}^{T} \Pi_t \right), \qquad (9)$$

где α – некоторое число. Ясно, что $\sum_{t=1}^{T} \tilde{\psi}_t + \tilde{\varphi} = 1$. Покажем, что для некоторого $\alpha > 0$ отображение (8)-(9) переводит всякий неотрицательный вектор в неотрицательный же вектор. Тогда по теореме Какутани симплекс $\left\{ (\psi, \varphi) \geq 0 \,/\, \sum_{t=1}^{T} \psi_t + \varphi = 1 \right\}$ содержит неподвижную точку этого отображения, удовлетворяющую требованиям теоремы.

Рассмотрим разность $\psi_t - \alpha \bar{p}_t \bar{c}_t$. Из (7) следует, что $\psi_t \frac{\partial u_t}{\partial c_i} (\bar{c}_t) = \bar{p}_{ti}$, если $\bar{c}_{ti} > 0$. В противном случае уменьшая или увеличивая $\bar{c}_{ti}$, мы увеличили бы правую часть (7). Итак,

$$\psi_t \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_t}{\partial c_i}(\bar{c}_t)\,\bar{c}_{ti} = \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_{ti}\,\bar{c}_{ti},$$

или

$$\psi_t = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_t}{\partial c_i}(\bar{c}_t)\,\bar{c}_{ti} \right)^{-1} \bar{p}_t\,\bar{c}_t .$$

Так как u - вогнутая функция и $u_t(0)=0$, то

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_t}{\partial c_i}(\bar{c}_t)\,\bar{c}_{ti} \leq u_t(\bar{c}_t).$$

В силу компактности технологических множеств Q_t и непрерывности u_t, $t=1,\dots,T$, найдется $\bar{u}<\infty$ такое, что $u_t(\bar{c}_t)\leq \bar{u}$ независимо от выбора взвешивающих коэффициентов (ψ,φ) и момента времени t. Поэтому $\psi_t \geq \bar{p}_t\bar{c}_t/\bar{u}$, $\psi_t - \alpha\bar{p}_t\bar{c}_t > 0$ при $\alpha \in (0,\bar{u}^{-1})$.

Рассмотрим выражение

$$-\bar{p}_0\bar{x}_0 + \sum_{t=1}^{T} \bar{p}_t(\bar{y}_t - \bar{x}_t - \bar{c}_t) - \sum_{t=1}^{T} \bar{\pi}_t\bar{l}_t +$$

$$+\sum_{t=1}^{T} \psi_t \frac{\partial u_t}{\partial c}(\bar{c}_t)\,\bar{c}_t + \varphi\frac{\partial v}{\partial x_T}(\bar{x}_T)\,\bar{x}_T .$$

Если бы это выражение было отрицательным, то, заменяя

$\bar{x}_t$ на $(1-\varepsilon)\bar{x}_t$,
$\bar{y}_t$ на $(1-\varepsilon)\bar{y}_t$,
$\bar{c}_t$ на $(1-\varepsilon)\bar{c}_t$

при малых $\varepsilon>0$, мы увеличили бы значение функции Лагранжа, что невозможно. Итак, это выражение неотрицательно, и, следовательно,

$$-\sum_{t=1}^{T} \bar{\pi}_t\bar{l}_t + \sum_{t=1}^{T} \psi_t \frac{\partial u_t}{\partial c}(\bar{c}_t)\,\bar{c}_t + \varphi\frac{\partial v}{\partial x_T}(\bar{x}_T)\,\bar{x}_T \geq 0.$$

Так как

$$\sum_{t=1}^{T} \bar{\pi}_t \bar{l}_t \geq \sum_{t=1}^{T} \Pi_t, \quad \sum_{t=1}^{T} \psi_t \frac{\partial u_t}{\partial c}(\bar{c}_t)\bar{c}_t = \sum_{t=1}^{T} \bar{p}_t \bar{c}_t,$$

то

$$\varphi + \left(\frac{\partial v}{\partial x_T}(\bar{x}_T)\bar{x}_T\right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^{T} \bar{p}_t \bar{c}_t - \sum_{t=1}^{T} \Pi_t\right) \geq 0.$$

В силу компактности Q_t, непрерывности и вогнутости функции v, $v(0)=0$ найдется $\bar{v} < \infty$ такое, что $\frac{\partial v}{\partial x_T}(\bar{x}_T)\bar{x}_T \leq \bar{v}$ независимо от выбора взвешивающих коэффициентов (ψ, φ). Тогда $\varphi + \left(\sum_{t=1}^{T} \bar{p}_t \bar{c}_t - \sum_{t=1}^{T} \Pi_t\right)/\bar{v} \geq 0.$

Итак, при $\alpha \in (0, \min\{\bar{u}^{-1}, \bar{v}^{-1}\})$ отображение (8)-(9) переводит симплекс в себя. Полунепрерывность сверху отображения (8)-(9) доказывается стандартным образом. Теорема доказана.

Пусть модель (1)-(5) задана на бесконечном дискретном интервале $[0, \infty)$. Бесконечную последовательность $\bar{x}_0, \bar{p}_0, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{c}_1, \bar{p}_1, \bar{\pi}_1, \psi_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{c}_2, \bar{p}_2, \bar{\pi}_2, \psi_2, \ldots$ будем называть равновесной, если она равновесна на любом конечном интервале $[0, T]$ при целевой функции $\sum_{t=1}^{T} \psi_t u_t(c_t) + \bar{p}_T x_T$.

2. Устойчивость равновесных траекторий в однопродуктовых моделях. Рассмотрим однопродуктовую модель

$$F(x_{t-1}, l_t) \geq x_t + c_t, \tag{10}$$

$$l_t \leq L_t = 1, \tag{11}$$

$$x_t \geq 0,\ c_t \geq 0,\ l_t \geq 0, \qquad t = 1, 2, \ldots$$

Предполагается, что $F(x, l)$ - однородная первой степени производственная функция, причем $f(x) = F(x, 1)$ - дважды непрерывно дифференцируемая функция на $(0, \infty)$, $f(0) = 0$, $\lim_{x\to 0} f'(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$, $f''(x) < 0$ при $x \in (0, \infty)$. Заданы также функции u_t и Π_t : $u_t(c_t) = c_t$, $\Pi_t = \bar{\pi}_t \bar{l}_t = \bar{\pi}_t$ для всех $t \geq 1$.

Пусть задано начальное состояние $a > 0$. Построим бесконечную равновесную траекторию, исходящую из этого состояния. Положим $\bar{x}_0 = a$, $\bar{p}_0 = 1$. Выпишем условия оптимальности для бесконечномерной задачи (10),(11) при целевой функции $\sum_{t=1}^{\infty} \psi_t c_t$:

$$\bar{p}_{t-1} - \bar{p}_t \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}_{t-1}, \bar{l}_t) \geq 0, \tag{12}$$

$$-\bar{p}_t \frac{\partial F}{\partial l}(\bar{x}_{t-1}, \bar{l}_t) + \bar{\pi}_t \geq 0, \tag{13}$$

$$\bar{p}_t \geq \psi_t, \qquad t = 1, 2, \ldots \tag{14}$$

Рассматривая в момент $t = 1$ неравенства (1)-(14) как равенства и привлекая уловие равновесия

$$\bar{p}_t \bar{c}_t = \bar{\pi}_t \tag{15}$$

при $t = 1$, получим систему из шести уравнений относительно переменных $\bar{x}_1, \bar{c}_1, \bar{l}_1, \bar{p}_1, \bar{\pi}_1, \psi$. Разрешая ее, определим эти величины. Затем аналогично вычисляются величины $\bar{x}_2, \bar{c}_2, \bar{l}_2, \bar{p}_2, \bar{\pi}_2, \psi$. Таким образом полученная траектория является равновесной. Существует простое соотношение, связывающее величины $\bar{x}_{t-1}, \bar{x}_t$. Действительно, из (13),(15), рассматриваемых как равенства, следует

$$\bar{c}_t = \frac{\partial F}{\partial l}(\bar{x}_{t-1}, \bar{l}_t). \tag{16}$$

Подставляя (16) в (10), рассматриваемое как равенство, полагая $\bar{l}_1 = 1$ и учитывая уравнение Эйлера для однородных первой степени функций

$$F = \frac{\partial F}{\partial x} x + \frac{\partial F}{\partial l} l,$$

получим

$$\bar{x}_t = \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}_{t-1}, 1)\,\bar{x}_{t-1}. \tag{17}$$

Из равенства (17) и равенства (12) имеем

$$\bar{p}_t \bar{x}_t = \bar{p}_{t-1} \bar{x}_{t-1}. \tag{18}$$

ПРИМЕР 1. Рассмотрим производственную функцию Кобба – Дугласа $F(x, l) = x^{\alpha} l^{\beta}$, $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$. В этом случае уравнение (17) имеет вид:

$$\bar{x}_t = \alpha \bar{x}_{t-1}^{\alpha}.$$

После замены переменных $\bar{x}_t = \alpha^{\frac{1}{\beta}} \bar{z}_t$ получим

$$\bar{z}_t = \bar{z}_{t-1}^{\alpha}.$$

Ясно, что для любого начального состояния $\bar{z}_0 > 0$ последовательность $\bar{z}_t$ сходится к единице. Следовательно, последовательность $\bar{x}_t$ сходится к $\alpha^{\frac{1}{\beta}}$ при любом $\bar{x}_0 > 0$. Стационарная траектория $\bar{x}_t = \alpha^{\frac{1}{\beta}}, \bar{c}_t = \beta\alpha^{\frac{\alpha}{\beta}}, \bar{l}_t = 1, \bar{p}_t = 1, \bar{\pi}_t = \beta\alpha^{\frac{\alpha}{\beta}}, \psi = 1$ является равновесной. Кроме того, траектория $\bar{x}_t = \alpha^{\frac{1}{\beta}}, \bar{c}_t = \beta\alpha^{\frac{\alpha}{\beta}}$ является магистралью при функции полезности $\sum_{t=1}^{T} c_t$. Итак, для функций Кобба - Дугласа $(\alpha + \beta = 1)$ все равновесные траектории сходятся по переменным x, c к равновесной стационарной траектории.

В модели (10)-(11) всегда существует равновесная стационарная траектория $\bar{x}, \bar{c}, \bar{l} = 1, \bar{p} = 1, \bar{\pi}, \psi = 1$, где $\bar{x}$ определяется как корень уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}, 1) = 1,$$

а $\bar{c} = F(\bar{x}, 1) - \bar{x}, \ \bar{\pi} = \frac{\partial F}{\partial l}(\bar{x}, 1)$. Однако сходимость равновесных траекторий к стационарной по переменным x, c, вообще говоря, не имеет места.

ПРИМЕР 2. Определим $g = f'$ следующим образом:

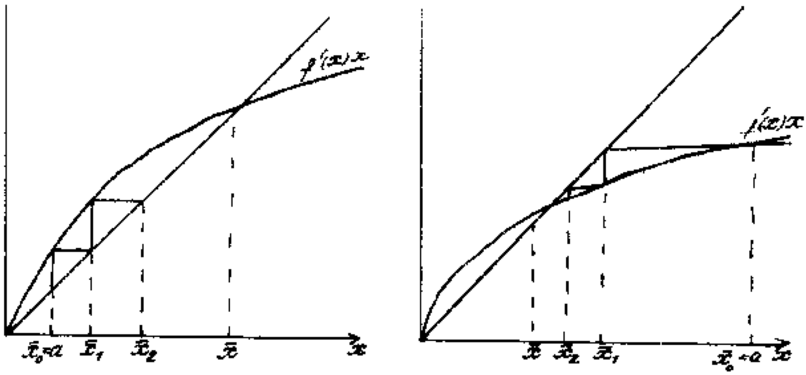
$$g(x) = \begin{cases} 3.2\, x^{\frac{1}{12} - 1} - 2, & x \in (0, 1], \\ 2.2/x - 1, & x \in [1, 1.2], \\ e^{1.2 - x}/x, & x \in [1.2, \infty]. \end{cases}$$

Непосредственно можно проверить, что g - положительная непрерывно дифференцируемая функция, причем $g'(x) < 0, x \in (0, \infty)$, $\lim_{x \to 0} g(x) = \infty, \ \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$. Определим функции $f(x), F(x, l)$:

$$f(x) = \int_0^x g(\tau)\, d\tau, \quad F(x, l) = l f\left(\frac{x}{l}\right).$$

Функция $F(x, l)$ удовлетворяет всем сформулированным выше требованиям. Пусть $\bar{x}_0 = a = 1$. Применяя последовательно формулу (I7), имеем $\bar{x}_0 = 1,\ \bar{x}_1 = 1{,}2,\ \bar{x}_2 = 1,\ \bar{x}_3 = 1.2, \ldots$ Таким образом, переменная $\bar{x}_t$ колеблется возле $\bar{x} = 1{,}1$, взятого из равновесной стационарной траектории. Положим $\psi_0 = \bar{p}_0 = 1$. Тогда из (I8) вытекает, что $\psi_t = \bar{p}_t = 1$ при четных t, $\psi_t = \bar{p}_t = 1/1.2$ при нечетных t.

Можно указать ряд достаточных условий в модели (I0)-(II), обеспечивающих сходимость последовательности $\bar{x}_t$, $\bar{c}_t$ к стационарному состоянию. Так, например, достаточным условием является монотонное возрастание функции $f'(x)x$. В этом случае сходимость порождаемой процессом (I7) последовательности $\bar{x}_t$ к $\bar{x}$ допускает простую графическую картину.



а) б)

Отметим, что траектория $\bar{x}_t = \bar{x},\ \bar{c}_t = \bar{c}$, где $\bar{x}$, $\bar{c}$ - компоненты равновесной стационарной траектории, является магистралью модели (I0)-(II) относительно критерия $U = \sum_{t=1} c_t$.

Пусть $f(x)$ - ограниченная функция, $\lim_{x \to \infty} f(x) < \infty$ и удовлетворяет всем требованиям, сформулированным при описании модели (I0)-(II). Тогда все U -оптимальные траектории модели сходятся на бесконечности к магистрали $(\bar{x}, \bar{c})$ [I, с.297-303]. Пример 2 показывает, что уже в однопродуктовых моделях условия, гарантирующие справедливость теоремы о магистрали, недостаточны для сходимости траекторий, взятой из равновесной траектории, к магистрали.

3. Сравнительный анализ равновесных траекторий сбалансированного роста. Изучение влияния той или иной функции Π_t на структуру оптимальной равновесной траектории в общем случае весьма затруднительно. В этом пункте мы на примере известной динамической модели межотраслевого баланса изучили такое влияние при ряде упрощающих обстоятельств.

Балансовые ограничения модели имеют вид:

$$x_t \geqslant Ax_t + B(x_{t+1} - x_t) + c_t ; \tag{19}$$

$$\alpha x_t \leqslant q^t, \quad x_t \geqslant 0, \quad c_t \geqslant 0, \quad t = 1, 2, \ldots \tag{20}$$

Здесь искомыми величинами являются:

$x_t \in R^n_+$ – вектор валовых выпусков отраслей в году t ;
$c_t \in R^n_+$ – вектор потребления в году t .

В (19)-(20) заданы:

$A \geqslant 0$ – продуктивная неразложимая матрица прямых затрат;

$B \geqslant 0$ – матрица фондоемкостей , не имеющая нулевых столбцов;

$\alpha > 0$ – вектор трудоемкостей в отраслях;
$q > 1$ – темп роста трудовых ресурсов.

Предполагается, что существует $y > 0$ такой, что $y > Ay + (q-1)By$.

Функция полезности в году t имеет вид: $u_t(c) = u(c/q^t)$, где $u : R^n_+ \to R_+$ удовлетворяет следующим свойствам:

1) $u(c) = 0$, если $c_i = 0$ хотя бы для одного i ;

2) $\frac{\partial u}{\partial c}(c) > 0, \quad c \in int\, R^n_+$;

3) $\frac{\partial^2 c}{\partial c^2}(c)$ отрицательно определена для $c \in int\, R^n_+$.

Будем рассматривать лишь функции вида $\Pi_t = \gamma \bar{\pi}_t q^t$, где $\bar{\pi}_t$ – оценка трудового ресурса в году t , $\gamma > 0$ – коэффициент склонности к потреблению.

Равновесную траекторию $\bar{x}_t, \bar{c}_t, \bar{p}_t, \bar{\pi}_t, \psi_t$ будем называть равновесной траекторией сбалансированного роста, если

$$\bar{x}_t = q\bar{x}_{t-1}, \quad \bar{c}_t = q\bar{c}_{t-1},$$

$$\bar{p}_t = \mu^{-1}\bar{p}_{t-1}, \quad \bar{\bar{\pi}}_t = \mu^{-1}\bar{\pi}_{t-1},$$

$$\psi_t = q\mu^{-1}\psi_{t-1},$$

где $\mu > 0$ – некоторое число.

ЛЕММА I. Если положительные величины $\bar{x}(\gamma), \bar{c}(\gamma), \bar{p}(\gamma), \bar{\pi}(\gamma), \mu(\gamma)$ удовлетворяют системе уравнений

$$x = Ax + (q-1)Bx + c, \tag{21}$$

$$\alpha x = 1, \tag{22}$$

$$p = pA + (\mu - 1)pB + \bar{\pi}\alpha, \tag{23}$$

$$p = \frac{\partial u}{\partial c}(c), \tag{24}$$

$$\gamma\bar{\pi} = pc, \tag{25}$$

то траектория $\bar{x}_t(\gamma) = \bar{x}(\gamma)q^t, \bar{c}_t(\gamma) = \bar{c}(\gamma)q^t, \bar{p}_t(\gamma) = \mu^{-t}(\gamma)\bar{p}(\gamma), \pi_t(\gamma) = \mu^{-t}(\gamma)\bar{\pi}(\gamma), \psi_t(\gamma) = q^t\mu^{-t}(\gamma)$ является равновесной траекторией сбалансированного роста при $\Pi_t = \gamma\bar{\pi}_t q^t$.

ЛЕММА 2. Решение $\bar{x}, \bar{c}$ и двойственные оценки $\bar{p}, \bar{\pi}$ задачи

$$u(c) \to max$$

$$x \geqslant Ax + (q-1)Bx + c,$$

$$\alpha x \leqslant 1, \quad x \geqslant 0, \quad c \geqslant 0$$

существуют и строго положительны. Величины $\bar{x}, \bar{c}$ и $\mu = q$ являются решением системы (I9)-(20) при $\gamma = 1$, т. е. $\bar{x}(1) = \bar{x}, \ \bar{c}(1) = \bar{c}, \ \bar{p}(1) = \bar{p}, \ \bar{\pi}(1) = \bar{\pi}, \ \mu(1) = \mu = 1.$

ЛЕММА 3. При $\gamma = 1$ якобиан системы (2I)-(25) относительно $x, c, p, \bar{\pi}, \mu$ невырожден в точке $\bar{x}, \bar{c}, \bar{p}, \bar{\pi}, \mu = q$.

Мы не приводим доказательства лемм I-3. Впрочем, справедливость лемм I,2 устанавливается без труда.

Согласно приведенным леммам функции $\bar{x}(\gamma), \bar{o}(\gamma), \bar{p}(\gamma), \bar{\bar{\pi}}(\gamma), \mu(\gamma)$ существуют и дифференцируемы по γ в некоторой окрестности $\gamma=1$. Мы хотим выяснить характер изменения этих величин при варьировании возле $\gamma=1$. Умножая (21) слева на ρ, а (23) справа на x и вычитая из первого выражения второе, имеем

$$(q-\mu(\gamma))\bar{p}(\gamma)B\bar{x}(\gamma)+\bar{p}(\gamma)\bar{c}(\gamma)-\bar{\bar{\pi}}(\gamma)\alpha\bar{x}(\gamma)=0,$$

или $(q-\mu(\gamma))\bar{p}(\gamma)B\bar{x}(\gamma)=(1-\gamma)\bar{\bar{\pi}}(\gamma)$. Дифференцируя последнее выражение по γ и учитывая равенство $\mu(1)=q$ получим

$$\dot{\mu}(1)=\frac{\bar{\bar{\pi}}(1)}{\bar{p}(1)B\bar{x}(1)}=\frac{\text{оценка всех трудовых ресурсов}}{\text{оценка всех фондов}}.$$

Отсюда, в частности, следует, что дисконтирующие коэффициенты $\psi_t(\gamma)=q^t\mu^{-t}(\gamma)$ возрастают во времени при $\gamma>1$ и падают при $\gamma<1$.

Продифференцируем $u(\bar{c}(\gamma))$ по γ в единице:

$$\frac{d}{d\gamma}u(\bar{c}(1))=u'(\bar{c}(1))\bar{c}'(1)=\bar{p}(1)\bar{c}'(1)=$$

$$=\bar{\bar{\pi}}(1)\alpha(E-A-(q-1)B)^{-1}\bar{c}'(1)=\bar{\bar{\pi}}(1)\alpha\bar{x}'(1)=0.$$

Тем самым, небольшие отклонения γ от единицы почти не влияют на значение функции $u(\bar{c}(\gamma))$. Этот неожиданный, на первый взгляд, результат может быть выведен и из других соображений. Действительно, согласно лемме 2 функция $u(\bar{c}(\gamma))$ достигает максимума при $\gamma=1$, и поэтому ее производная должна равняться нулю.

Покажем, что при увеличении γ "стоимость" фондов в неизменных оценках уменьшается, т.е. $\bar{p}(1)B\bar{x}'(1)<0$. Дифференцируя (23) по γ и умножая результат на $(E-A-(q-1)B)^{-1}$ получим:

$$\bar{p}'(1)=\mu'(1)\bar{p}(1)B(E-A-(q-1)B)^{-1}+\bar{\bar{\pi}}'(1)\alpha(E-A-(q-1)B)^{-1}. \quad (26)$$

Отсюда

$$\bar{p}'(1)\bar{c}'(1)=\mu'(1)\bar{p}(1)B(E-A-(q-1)B)^{-1}\bar{c}'(1)+$$

$$+\bar{\pi}'(1)\alpha(E-A-(q-1)B)^{-1}\bar{c}'(1).$$

Последнее слагаемое равно $\bar{\pi}'(1)\alpha\ \bar{x}'(1)=0$. Поэтому

$$\bar{p}(1)B\bar{x}'(1)=\bar{p}'(1)\bar{c}'(1)/\mu'(1).$$

Из (24) следует, что $\bar{p}'(1)=(\bar{c}'(1))^{*}\ \frac{\partial^2 u}{\partial c^2}(\bar{c}(1))$. Отсюда и из того, что матрица $\frac{\partial^2 u}{\partial c^2}(\bar{c}(1))$ отрицательно определена, следует $\bar{p}'(1)\bar{c}'(1)<0$. Выше было установлено, что $\mu'(1)>0$. Поэтому $\bar{p}(1)B\bar{x}'(1)<0$.

Выясним, как изменяется оценка рабочей силы при варьировании γ . Умножим (26) справа на $\left[\frac{\partial^2 u}{\partial c^2}(\bar{c}(1))\right]^{-1}(E-A^{*}-(q-1)B^{*})^{-1}\alpha^{*}$. Так как

$$\bar{p}'(1)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial c^2}(\bar{c}(1))\right]^{-1}(E-A^{*}-(q-1)B^{*})^{-1}\alpha^{*}=\alpha\bar{x}'(1)=0,$$

то

$$\mu'(1)\bar{p}'(1)B(E-A-(q-1)B)^{-1}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial c^2}(\bar{c}(1))\right]^{-1}(E-A^{*}-(q-1)B^{*})^{-1}\alpha^{*}$$

$$+\bar{\pi}'(1)\alpha(E-A-(q-1)B)^{-1}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial c^2}(\bar{c}(1))\right]^{-1}(E-A^{*}-(q-1)B^{*})^{-1}\alpha^{*}=0.$$

Поскольку коэффициент при $\bar{\pi}'(1)$ отрицателен, то знак $\bar{\pi}'(1)$ совпадает со знаком коэффициента при $\mu'(1)$. Последний может принимать любой знак. На наш взгляд, более естественным выглядит возрастание оценки рабочей силы при уменьшении γ , т.е. случай $\bar{\pi}'(1)<0$. Отметим два достаточных условия, каждое из которых обеспечивает отрицательность $\bar{\pi}'(1)$.

1) $\bar{p}(1)B=\lambda\alpha$ для некоторого $\lambda>0$. Достаточность этого условия следует из отрицательной определенности матрицы $\left[\frac{\partial^2 u}{\partial c^2}(\bar{c}(1))\right]^{-1}$. Экономически условие означает, что "фондовооруженность" рабочего одинакова во всех отраслях. В силу непрерывности $\bar{\pi}'(1)<0$, если $\bar{p}(1)B\approx\lambda\alpha$.

2) $\left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial c^2}(\bar{c}(1)) \right\}_{ij} > 0$ для всех $i, j, i \neq j$. Действительно, в этом случае матрица $\left[\frac{\partial^2 u}{\partial c^2}(\bar{c}(1)) \right]^{-1}$ состоит из отрицательных элементов [2, с.51].

Покажем, что оценки продуктов возрастают быстрее, чем оценка труда, при возрастании γ. В самом деле, для $\gamma_1 < \gamma_2$, близких к единице, имеем

$$\frac{\bar{p}(\gamma_1)}{\bar{\pi}(\gamma_1)} = \alpha(E - A - (\mu(\gamma_1) - 1)B)^{-1} < \alpha(E - A - (\mu(\gamma_2) - 1)B)^{-1} = \frac{\bar{p}(\gamma_2)}{\bar{\pi}(\gamma_2)}.$$

Доказательство неравенства опирается на следующий простой факт: если T_1, T_2 - две неотрицательные продуктивные неразложимые матрицы и $T_1 \leq T_2$, $T_1 \neq T_2$, то $(E - T_1)^{-1} < (E - T_2)^{-1}$ [3]. В качестве T_1, T_2 положим матрицы $A + (\mu(\gamma_1) - 1)B$, $A + (\mu(\gamma_2) - 1)B$ соответственно. Так как $\mu(\gamma)$ - возрастающая функция, то $T_1 \leq T_2$, $T_1 \neq T_2$. Неразложимость следует из неразложимости матрицы A. Матрица $A + (\mu(1) - 1)B = A + (q - 1)B$ продуктивна по допущению. Поэтому в силу непрерывности продуктивны и матрицы T_1, T_2. Ниже в этом пункте ограничимся случаем, когда число продуктов в модели равно двум.

Пусть фондовооруженность в первой отрасли выше, чем во второй, т.е. $\bar{p}(1)B = \lambda\alpha + \theta e_1$, $e_1 = (1, 0)$, $\lambda, \theta > 0$. Покажем, что при возрастании γ темп роста оценки первого продукта выше, чем темп роста оценки второго продукта. Зафиксируем γ_1, γ_2 - достаточно близкие к единице числа, $\gamma_1 < \gamma_2$. Согласно (23) имеем

$$\bar{p}(\gamma_1) - \bar{p}(\gamma_1)(A + (\mu(\gamma_1) - 1)B) = \bar{\pi}(\gamma_1)\alpha,$$

$$\bar{p}(\gamma_2) - \bar{p}(\gamma_2)(A + (\mu(\gamma_2) - 1)B) = \bar{\pi}(\gamma_2)\alpha.$$

Второе равенство представим в виде

$$\bar{p}(\gamma_2) - \bar{p}(\gamma_2)(A + (\mu(\gamma_1) - 1)B) =$$

$$= \bar{\pi}(\gamma_2)\alpha + (\mu(\gamma_2) - \mu(\gamma_1))\bar{p}(\gamma_2)B.$$

Так как $\mu(\gamma_2) - \mu(\gamma_1) > 0$ и $\bar{p}(\gamma_2)B = \lambda_1\alpha + \theta_1 e_1$ для некоторых $\theta_1, \lambda_1 > 0$, то $\bar{\pi}(\gamma_1)\alpha + (\mu(\gamma_2) - \mu(\gamma_1))\bar{p}(\gamma_2)B =$

$= \lambda_2 \alpha + \theta_2 e_1$, где $\lambda_2, \theta_2 > 0$ – некоторые числа.

Как известно [3], $\bar{p}_1(\gamma_2)/\tilde{p}_1(\gamma_2) > \bar{p}_2(\gamma_2)/\tilde{p}_2(\gamma_2)$, где $\tilde{p}(\gamma_2)$ удовлетворяют уравнению

$$\tilde{p}(\gamma_2) - \tilde{p}(\gamma_2)(A + (\mu(\gamma_1) - 1)B) = \lambda_2 \alpha.$$

Но вектор $\tilde{p}(\gamma_2)$ пропорционален вектору $\bar{p}(\gamma_1)$. Стало быть, $\bar{p}_1(\gamma_2)/\bar{p}_1(\gamma_1) > \bar{p}_2(\gamma_2)/\bar{p}_2(\gamma_1)$.

Установим, что $\bar{x}_1'(1) < 0$, $\bar{x}_2'(1) > 0$, $\bar{c}_1'(1) < 0$, $\bar{c}_2'(1) > 0$. Выше было доказано неравенство $\bar{p}(1) B \bar{x}'(1) < 0$. Оно может быть записано в виде $\lambda \alpha \bar{x}'(1) + \theta e_1 \bar{x}'(1) = \theta \bar{x}_1'(1) < 0$. Итак, $\bar{x}_1'(1) < 0$. Неравенство $\bar{x}_2'(1) > 0$ следует из того, что $\alpha \bar{x}'(1) = 0$.

Поскольку темп роста оценки первого продукта выше по сравнению со вторым продуктом, то $\bar{p}'(1) = \lambda_3 \bar{p}(1) + \theta_3 e_1$, где λ_3, θ_3 – некоторые числа, $\theta_3 > 0$. Так как $\bar{p}'(1)\bar{c}(1) < 0$ и $\bar{p}(1)\bar{c}'(1) = 0$, то $\lambda_3 \bar{p}(1)\bar{c}'(1) + \theta_3 e_1 \bar{c}'(1) = \theta_3 \bar{c}_1'(1) < 0$. Отсюда $\bar{c}_1'(1) < 0$. Неравенство $\bar{c}_2'(1) > 0$ следует из равенства $\bar{p}(1)\bar{c}'(1) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. НИКАЙДО Х. Выпуклые структуры и математическая экономика.- М.: Мир, 1972.
2. ВАЛЬТУХ К.К., ДЕМЕНТЬЕВ Н.П., ИЦКОВИЧ И.А. Математический и статистический анализ функции потребления. - Новосибирск: Наука, 1986.
3. Дементьев Н.П. Математический анализ цен производства и полных трудовых затрат на основе межотраслевого баланса. - В кн.: Моделирование и анализ экономических процессов. - Новосибирск: Наука, 1985, с.107-115.

Поступила в ред.-изд.отдел
07.03.1986 г.