Выпуск 38(55) ОПТИМИЗАЦИЯ 1986 г.
Выпуклый анализ

УДК 517.987

К ТЕОРЕМЕ А.А.ЛЯПУНОВА О МНОЖЕСТВЕ ЗНАЧЕНИЙ ВЕКТОРНОЙ МЕРЫ

И.И.Баженов

I. Постановка задачи. Определения

Пусть T - произвольное множество, $\mathcal{A}$ - σ-алгебра его подмножеств, X - отделимое квазиполное локально-выпуклое пространство над полем вещественных чисел. Всюду в дальнейшем будем понимать под векторной мерой $m:\mathcal{A}\to X$ счетно-аддитивную функцию множества, заданную на σ-алгебре $\mathcal{A}$ и принимающую значения в X, где счетная аддитивность понимается в смысле топологии, рассматриваемой в X.

Множество $E\in\mathcal{A}$ называется атомом векторной меры $m:\mathcal{A}\to X$, если $m(E)\neq 0$ и для каждого $B\in E\cap\mathcal{A}\equiv\{A\in\mathcal{A}:A\subset E\}$ либо $m(B)=0$, либо $m(B)=m(E)$. Неатомичность векторной меры означает отсутствие у нее атомов. Через $M(\mathcal{A},X)$ обозначим класс всех неатомических векторных мер, заданных на σ-алгебре $\mathcal{A}$ и принимающих значения в X. Очевидно, что класс $M(\mathcal{A},X)$ не пуст. Он, например, содержит векторную меру, тождественно равную нулю на $\mathcal{A}$, которую будем называть тривиальной векторной мерой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Векторную меру $m:\mathcal{A}\to X$ называем ляпуновской, если множество ее значений $m(\mathcal{A})\equiv\{m(A):A\in\mathcal{A}\}$ выпукло в X.

Классическая теорема А.А.Ляпунова о множестве значений векторной меры говорит о том, что если X - конечномерное B-пространство, то каждая векторная мера из $M(\mathcal{A},X)$ является ляпуновской [I]. Причем последнее верно для векторных мер, заданных на произвольном измеримом пространстве. Если

X - бесконечномерное пространство, то теорема Ляпунова, вообще говоря, не верна. Полная характеристика ляпуновской векторной меры получена Ноулсом в [2].

Возникает вопрос: существуют ли бесконечномерные локально-выпуклые пространства, для которых была бы верна теорема Ляпунова? И если существуют, то описать класс всех таких пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\mathcal{A}$ - фиксированная σ-алгебра некоторого множества T и X - отделимое квазиполное локально-выпуклое пространство. Будем называть X ляпуновским пространством относительно σ-алгебры $\mathcal{A}$ или просто $\mathcal{A}$-ляпуновским пространством, если каждая векторная мера $m \in M(\mathcal{A}, X)$ является ляпуновской.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Локально-выпуклое пространство X называется вполне ляпуновским пространством, если оно является ляпуновским пространством относительно каждой (произвольной) σ-алгебры.

Другими словами, локально-выпуклое пространство является вполне ляпуновским пространством, если для него справедлива теорема Ляпунова. Таким образом, класс вполне ляпуновских пространств не пуст. Каждое конечномерное B-пространство принадлежит этому классу.

В настоящей работе дается полное описание класса вполне ляпуновских пространств. Приводится достаточное условие, накладываемое на σ-алгебру $\mathcal{A}$, при котором произвольное борнологическое пространство становится $\mathcal{A}$-ляпуновским.

2. Предварительные сведения

Пусть $(T, \mathcal{A})$ - измеримое пространство, X - отделимое локально-выпуклое пространство, $X \neq \{0\}$. Понятно, что если на $\mathcal{A}$ не существует нетривиальных неатомических векторных мер со значениями в X (например, $\mathcal{A} = 2^P$, где P - конечное множество), то X необходимо является $\mathcal{A}$-ляпуновским пространством. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать измеримое пространство $(T, \mathcal{A})$ таким, чтобы класс $M(\mathcal{A}, X)$ содержал хотя бы одну нетривиальную векторную меру. Покажем, что если X - $\mathcal{A}$-ляпуновское пространство, то вопрос о существовании нетривиальной векторной меры $m \in M(\mathcal{A}, X)$

эквивалентен вопросу о существовании нетривиальной вещественнозначной меры $\mu\in M(\mathcal{A},\mathbb{R})$. Действительно, если $\mu\in M(\mathcal{A},\mathbb{R})$ - нетривиальная мера, то векторная мера, определяемая нами формулой $m(A)=\mu(A)\cdot x_0$, где $A\in\mathcal{A}, x_0\in X$ и $x_0\neq\mathbb{O}$, принадлежит классу $M(\mathcal{A},X)$ и является нетривиальной.

Если $m\in M(\mathcal{A},X)$, то для каждого $E\in\mathcal{A}$ векторная мера, задаваемая формулой $m_E(A)=m(A\cap E), A\in\mathcal{A}$, также принадлежит классу $M(\mathcal{A},X)$ и следующее утверждение очевидно.

ЛЕММА I. Если X - ляпуновское пространство, то для каждой векторной меры $m\in M(\mathcal{A},X)$ и для любого измеримого множества $E\in\mathcal{A}$ множество $m(E\cap\mathcal{A})=\{m(E\cap A):A\in\mathcal{A}\}$ выпукло в X.

ЛЕММА 2. Если X - $\mathcal{A}$ -ляпуновское пространство и $m\in M(\mathcal{A},X)$ - нетривиальная векторная мера, то существует нетривиальная вещественнозначная мера $\mu\in M(\mathcal{A},\mathbb{R})$.

В качестве μ достаточно рассмотреть меру $\mu(A)=x'\circ m(A)$, $A\in\mathcal{A}$, где x' - непрерывный линейный функционал на X, не равный тождественно нулю на множестве $m(\mathcal{A})$. Неатомичность μ будет следовать из леммы I. Однако если X не является $\mathcal{A}$-ляпуновским пространством, то построенная выше мера может иметь атомы. С другой стороны, если X- метризуемое пространство или если $\mathcal{A}$ - m-существенно счетно-порожденная σ-алгебра, то утверждение леммы 2 остается в силе без предположения, что X - $\mathcal{A}$ -ляпуновское пространство (см.[3]).

Учитывая вышесказанное, будем в дальнейшем предполагать, что на измеримом пространстве $(T,\mathcal{A})$ существует нетривиальная вещественнозначная мера $\mu\in M(\mathcal{A},\mathbb{R})$. Только в этом случае определение 2 становится содержательным и изучение ляпуновских пространств представляет интерес.

Пусть $(T,\mathcal{A},\mu)$ - пространство с неатомической мерой μ и $\mathcal{A}$ - μ -существенно счетно-порожденная σ-алгебра, т.е. метрическая структура $\mathcal{A}(\mu)=\{[E]_\mu:E\in\mathcal{A}\}$, где $[E]_\mu=\{A\in\mathcal{A}:\mu(A\Delta E)=0\}$, σ-алгебры $\mathcal{A}$ относительно меры μ счетно порождена. Автором рассматривались $\mathcal{A}$ -ляпуновские пространства для σ -алгебр такого типа в [4]. Получена их полная характеристика, которую приводим здесь без доказательства.

ТЕОРЕМА I. Для того чтобы отделимое квазиполное локально-выпуклое пространство X было $\mathcal{A}$-ляпуновским пространством, необходимо и достаточно, чтобы его топология с точностью до секвенциальной эквивалентности совпадала с сильнейшей локально-выпуклой топологией, вводимой в векторном пространстве X.

Секвенциальная эквивалентность здесь понимается в следующем смысле. Пусть X – произвольное векторное пространство, τ и $\tilde{t}$ – две локально-выпуклые отделимые топологии в X. Говорим, что топологии t и τ секвенциально эквивалентны, если локально-выпуклые пространства (X, t) и (X, τ) имеют одинаковый запас сходящихся последовательностей.

3. Вполне ляпуновские пространства

Покажем, что характеристика выделенных выше $\mathcal{A}$-ляпуновских пространств полностью переносится на класс вполне ляпуновских пространств.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $(T, \mathcal{A}, \mu)$ – измеримое пространство с мерой μ и $\mathcal{A}$ – μ-существенно счетно-порожденная σ-алгебра. Пусть, далее, X – произвольное локально-выпуклое пространство. Тогда следующие утверждения относительно пространства X равносильны:

I) X является $\mathcal{A}$-ляпуновским пространством;

2) X является вполне ляпуновским пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что из I следует 2. В силу теоремы I топология в X секвенциально эквивалентна сильнейшей локально-выпуклой топологии, совпадающей с топологией индуктивного предела фильтрующегося семейства всех конечномерных подпространств пространства X. Ограниченное в X множество должно содержаться в некотором конечномерном подпространстве пространства X и быть ограниченным в нем [5, с.156, упр. 10]. Известно, что множество значений $m(\mathcal{A}')$ векторной

меры $m:\mathcal{A}'\to Y$, заданной на произвольной σ-алгебре $\mathcal{A}'$ и принимающей значения в произвольном локально-выпуклом пространстве Y, ограничено. Тогда для каждой σ-алгебры $\mathcal{A}'$ и для любой векторной меры $m\in M(\mathcal{A}',X)$ множество значений $m(\mathcal{A}')$ лежит в конечномерном подпространстве пространства X и, очевидно, выпукло в нем, а следовательно, выпукло и во всем пространстве X. Таким образом, X является $\mathcal{A}'$-ляпуновским пространством для произвольной σ-алгебры $\mathcal{A}'$ и, следовательно, вполне ляпуновским пространством. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Для того чтобы локально-выпуклое пространство было вполне ляпуновским, необходимо и достаточно, чтобы его топология с точностью до секвенциальной эквивалентности совпадала с сильнейшей локально-выпуклой топологией.

Отметим, что последнее утверждение дает полное описание локально-выпуклых пространств, для которых верна классическая теорема Ляпунова.

4. $\mathcal{A}$-ляпуновские пространства

В связи с понятием ляпуновского пространства наибольший интерес представляют два вопроса. Первый: для фиксированной σ-алгебры $\mathcal{A}$ описать класс всех $\mathcal{A}$-ляпуновских пространств. Так, в § 2 рассматривался наиболее часто встречающийся случай сепарабельного пространства с мерой $(T,\mathcal{A},\mu)$, σ-алгебра $\mathcal{A}$ которого μ-существенно счетно порождена. Для такой σ-алгебры $\mathcal{A}$ мы дали полную характеристику $\mathcal{A}$-ляпуновских пространств. Показали также, что если некоторое локально-выпуклое пространство X оказалось $\mathcal{A}$-ляпуновским относительно σ-алгебры такого типа, то оно будет ляпуновским и относительно любой другой σ-алгебры.

Второй вопрос состоит в следующем. Пусть X - фиксированное локально-выпуклое пространство. Можно ли найти такую σ-алгебру $\mathcal{A}$, чтобы пространство X стало $\mathcal{A}$-ляпуновским? Займемся ответом на последний вопрос.

Пусть $(T,\mathcal{A},\mu)$ - произвольное пространство с мерой.

Метрическим весом $\rho_\mu(\mathcal{A})$ σ-алгебры $\mathcal{A}$ относительно меры μ будем называть наименьшее из кардинальных чисел ρ таких, что существует семейство $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, имеющее мощность $card\,\mathcal{B}$, равную ρ, и такое, что

$$\forall E \in \mathcal{A} \text{ и } \forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathcal{B} : \mu(E \Delta B) < \varepsilon.$$

Отметим, что если $\rho_\mu(\mathcal{A})$ - бесконечное кардинальное число, то оно совпадает с мощностью полной ортонормированной системы в гильбертовом пространстве $L_2(\mu)$.

Пусть $(T, \mathcal{A})$ - произвольное измеримое пространство и класс $M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ содержит хотя бы одну нетривиальную меру. Характером σ-алгебры $\mathcal{A}$ будем называть кардинальное число

$$\rho(\mathcal{A}) = \min\{\rho_\mu(\mathcal{A}) : \mu \in M(\mathcal{A}, \mathbb{R}^+) \text{ и } \mu - \text{нетривиальная мера}\}.$$

Заметим, что нами полностью описан класс $\mathcal{A}$ -ляпуновских пространств для случая, когда $\rho(\mathcal{A}) = \aleph_0$.

Кардинальное число α называем неизмеримым, если не существует нетривиальной вещественнозначной меры, заданной на всем булеане множества α и принимающей значения, равные нулю на одноэлементных частях от α.

ЛЕММА 3. Пусть на измеримом пространстве $(T, \mathcal{A})$ существует полная нетривиальная мера $\mu \in M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$, метрическая структура $\mathcal{A}(\mu)$ σ-алгебры $\mathcal{A}$ относительно которой является однородной булевой алгеброй. Тогда, если кардинальное число $card\,T$ неизмеримо, то $\rho(\mathcal{A}) = \rho_\mu(\mathcal{A}) = \rho_\lambda(\mathcal{A})$ для любой нетривиальной меры $\lambda \in M(\mathcal{A}, \mathbb{R}^+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda \in M(\mathcal{A}, \mathbb{R}^+)$ - произвольная нетривиальная мера. Тогда по теореме Лебега существует $f \in L_1(\mu)$ и $N \in \mathcal{A}$, $\mu N = 0$ такие, что

$$\lambda(A) = \int_A f\,d\mu + \lambda(N \cap A), \quad A \in \mathcal{A}.$$

Далее, поскольку мы предполагали, что мера μ полная, то можно считать, что σ-алгебра $N \cap \mathcal{A}$ есть булеан множества N и мера $\lambda(N \cap A)$ определена на булеане некоторого множества $N \subset T$. Но тогда мера $\lambda(N \cap A)$ может быть только тривиальной, так как $card\,T$ является неизмеримым кардинальным

числом и, следовательно,

$$\lambda(A)=\int\limits_A f d\mu,\ A\in\mathcal{A}.$$

Поскольку $f\neq 0$ и $\mathcal{A}(\mu)$ - однородная булева алгебра, то $\rho_\mu(\mathcal{A})=\rho_\lambda(\mathcal{A})$ для каждой нетривиальной меры $\lambda\in$ $\in M(\mathcal{A},\mathbb{R}^+)$. Но тогда и $\rho(\mathcal{A})=\rho_\mu(\mathcal{A})$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Лемма 3 обнаруживает интересный факт относительно пространства $(T,\mathcal{A},\mu)$ с полной мерой μ, σ-алгебра которого имеет однородную метрическую структуру $\mathcal{A}(\mu)$, а $card\, T$ является неизмеримым кардиналом. В этом случае не существует нетривиальной неатомической меры, метрический вес σ-алгебры $\mathcal{A}$ относительно которой был бы отличен от характера $\rho(\mathcal{A})$, совпадающего с метрическим весом $\rho_\mu(\mathcal{A})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Известна следующая гипотеза (ж): каждое бесконечное кардинальное число является неизмеримым. Она совместима с аксиоматикой теории множеств (см. [6, с.54 и дополнение I]), и если принимать ее во внимание, то лемма 3 позволяет нам строить σ-алгебры с произвольным наперед заданным характером. Достаточно, например, рассмотреть несчетное произведение σ-алгебр борелевских подмножеств отрезка и пополнить его по мере - произведению лебеговских мер на отрезках. Полученная σ-алгебра будет иметь характер, совпадающий с числом экземпляров в произведении.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $(T,\mathcal{A})$ - измеримое пространство и класс $M(\mathcal{A},\mathbb{R}^+)$ содержит хотя бы одну нетривиальную меру. Пусть, далее, X - произвольное $\mathcal{B}$-пространство мощности $card\, X=\alpha$. Тогда если $\rho(\mathcal{A})>\alpha$, то пространство X является $\mathcal{A}$-ляпуновским.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m\in M(\mathcal{A},X)$. Тогда по теореме Бартла - Данфорда - Шварца существует скалярная мера $\mu:\mathcal{A}\to$ $\to\mathbb{R}^+$ такая, что $\mu E=0$ тогда и только тогда, когда $m(E\cap A)=\{0\}$. Причем из неатомичности векторной меры m следует неатомичность скалярной меры μ. Возьмем произвольное множество $E\in\mathcal{A}$, $\mu E>0$. Определим меру $\lambda(A)=$ $=\mu(E\cap A),\ A\in\mathcal{A}$. Очевидно что $\lambda\in M(\mathcal{A},\mathbb{R}^+)$ и, следовательно, $\rho_\lambda(\mathcal{A})\geq\rho(\mathcal{A})>\alpha$. Но тогда $card\{L_\infty(\lambda)\}>$

$> \operatorname{card} X$ и каждый оператор, действующий из $L_\infty(\lambda)$ в X не является инъективным. Таким образом, оператор

$$I_E : f \to \int_E f\,dm,$$

действующий из $L_\infty(\lambda)$ в X, также не является инъективным. Теперь из результатов Ноулса [7, с.263] следует, что мера является ляпуновской векторной мерой, чем и завершается доказательство теоремы.

СЛЕДСТВИЕ. Если выполнена гипотеза (ж), то всякое B-пространство является $\mathcal{A}$-ляпуновским относительно некоторой σ-алгебры $\mathcal{A}$.

Это утверждение вытекает из последней теоремы и замечания 2, где конкретно указан способ построения требуемых σ-алгебр.

Отметим, что последний результат верен и для произвольного полного метризуемого локально-выпуклого пространства. Более того, теорема 3 дословно переносится на случай строгого индуктивного предела последовательности B-пространств.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $(T,\mathcal{A})$ – измеримое пространство, X – строгий индуктивный предел возрастающей последовательности банаховых пространств $(X_n)_{n\in N}$ [5, с.87]. Тогда если имеет место неравенство $\operatorname{card} X < \rho(\mathcal{A})$, то X является $\mathcal{A}$-ляпуновским пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как каждое ограниченное множество в X содержится в некотором из пространств $(X_n)_{n\in N}$ и ограничено в нем [5, предл.6, с.151], то любая векторная мера $m\in M(\mathcal{A},X)$ принимает свои значения в некотором из пространств последовательности $(X_n)_{n\in N}$. Далее, поскольку топология в строгом индуктивном пределе индуцирует на каждом из X_n топологию, совпадающую с рассматриваемой в X_n, как в банаховом пространстве [5, предл. 3, с.87], то можно считать, что $m\in M(\mathcal{A},X_n)$ для некоторого номера $n\in N$. Но так как $X_n\subset X$, то $\operatorname{card} X_n \le \operatorname{card} X < \rho(\mathcal{A})$, и в силу теоремы 3 $m(\mathcal{A})$ является выпуклым множеством в X_n, а следовательно, и в X.

СЛЕДСТВИЕ. Если верна гипотеза (ж), то строгий индуктивный предел возрастающей последовательности банаховых пространств является $\mathcal{A}$-ляпуновским пространством относительно некоторой σ-алгебры $\mathcal{A}$.

В заключение остановимся отдельно на случае, когда исследуемое β-пространство X имеет мощность континуума. Такими, например, являются все сепарабельные гильбертовы пространства.

В [9] построен пример измеримого пространства с мерой $([0,1], \mathcal{A}, \mu)$, обладающего рядом любопытных свойств. Оно является инвариантным продолжением лебеговского пространства $([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$, где $\mathcal{B}$ - σ-алгебра борелевских подмножеств и λ - мера Лебега. Мера μ является полной, а метрическая структура $\mathcal{A}(\mu)$ - однородной булевой алгеброй. Наконец, метрический вес $\rho_\mu(\mathcal{A})$ σ-алгебры $\mathcal{A}$ относительно μ принимает максимально возможное значение 2^c. Известно, что если верна гипотеза континуума, то кардинал c (мощность континуума) является неизмеримым (см. [6, с.182]). Тогда в силу леммы 3 характер $\rho(\mathcal{A})$ σ-алгебры $\mathcal{A}$ равен 2^c.

Таким образом, при справедливости гипотезы континуума каждое банахово пространство мощности континуума является ляпуновским пространством относительно σ-алгебры $\mathcal{A}$ подмножеств отрезка $[0,1]$, упомянутой выше. При этом гипотеза континуума заменяет гипотезу (ж).

Автор благодарит Д.А.Владимирова за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. ЛЯПУНОВ А.А. О вполне аддитивных вектор-функциях. I. - Изв. АН СССР. Сер. мат., 1940, т.4, № 6, с.465-478.
2. Knowles G. Lyapunov vector measures. - SIAM J. Control, 1975, N 2, p. 294-303.
3. Kluvanek I. The range of a vector-valued measure. - Math. Systems Theory, 1973, v.7, N 1, p.44-54.

4. БАЖЕНОВ И.И. К вопросу о выпуклости множества значений векторной меры.- В кн.: Операторные уравнения и функции множеств. Межвузовский сборник. Сыктывкар, 1985, с.13-17.
5. БУРБАКИ Н. Топологические векторные пространства. - М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
6. Харазишвили А.Б. Инвариантные продолжения меры Лебега. Тбилиси, 1983.
7. Diestel J., Uhl J. Vector measures. - Math. surveys, 1977, N 15.
8. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. - М.: Мир, 1969.
9. Kakutani S., Oxtoby J. Construction of non-separable invariant extension of the Lebesque measure space. - Ann. Math., 1950, 52, p.580-590.

Поступила в ред.-изд. отдел
08.12.1985 г.