Численные методы

УДК 519.61

О ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В.Г.Дудник

Темой статьи являются алгоритмы поиска неподвижных точек непрерывных отображений, основанные на симплициальном разбиении их области определения. Подобные алгоритмы предполагают наличие некоторой функции нумерации L, заданной на множестве всех узлов разбиения. В работе используется целочисленная функция нумерации, строящаяся с помощью некоторых специальных угловых координат в пространстве R^n, которые в случае R^3 подобны сферическим. Такой способ нумерации гарантирует единственность почти полнонумерованного симплекса на границе положительного ортанта, и тем самым обеспечивается простота начала описываемого алгоритма.

В качестве области определения отображений рассматриваются положительный ортант R_+^n и некоторые его подмножества. Множество R_+^n представляет особый интерес в связи с приложениями в математической экономике.

Угловые координаты также дают возможность методами симплициального разбиения искать собственные векторы отображений. В частности, такие методы применимы для задачи о собственном значении, возникающей в математической экономике в связи с моделями сбалансированного роста. Для решения этих задач в статье строится алгоритм поиска неподвижной точки непрерывного отображения положительного ортанта в себя.

I. Рассмотрим множество $B=\{x\in R_+^n : \sum_{i=1}^n x_i \le 1\}$ и непрерывное отображение $f: B\to B$. По теореме Брауэра существует

такая точка $x^* \in B$, что $f(x^*) = x^*$. При поиске этой точки применим метод симплициальных разбиений, причем для триангуляции пространства R^n_+ возьмем за основу триангуляцию единичного куба [I, с.II6]. Это приводит к следующему разбиению.

Пусть π - некоторая перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$, а достаточно малое положительное число δ - шаг разбиения. Через P обозначим квадратную матрицу порядка n, у которой все элементы главной диагонали равны -I, на диагонали под главной всюду стоит +I, а остальные элементы - нулевые. Под P^i будем подразумевать i-й столбец матрицы P.

Обозначим через H^o_1 совокупность точек пространства R^n_+ с целочисленными координатами, а через δH^o_1 - аналогичную решетку, но с шагом δ по всем координатам. Каждой вершине $y^o \in \delta H^o_1$ и каждой перестановке π соотнесем n_o-мерный симплекс $\sigma = (y^o y^1 \ldots y^n)$ с вершинами $y^o, y^1, \ldots, y^n$, где $y^i = y^{i-1} + \delta \cdot P^{\pi(i)}$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. Вершину y^o будем считать начальной вершиной симплекса. Если $int\, \sigma \cap B \neq \emptyset$, то обозначим σ через $h_1(y^o, \pi)$. Пусть $\delta H_1(B)$ - множество всех таких $h_1(y^o, \pi)$. Аналогично можно определить разбиение $\delta H_1(R^n_+)$.

Для произвольной точки $x \in R^n_+$ обозначим через $\varphi_n(x)$ величину $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i$, а для $j = 1, 2, \ldots, n-1$ положим $\varphi_j(x) = \frac{x_{j+1}}{\bar{x}}$, если $x \neq 0$ и $\varphi_j(0) = 0$. Пусть также $\varphi_0(x) = 1$ при любом $x \in R^n_+$. Заметим, что точка $x \in R^n_+$ однозначно восстанавливается по набору $(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))$. Из определения $\varphi_i(x)$ при $x \in B$ получаем, что $\varphi_i(x) \in [0, 1]$ для $i = 0, 1, \ldots, n$.

Определим функцию целочисленной нумерации $L : R^n_+ \to \{0, 1, \ldots, n\}$, полагая $L(x) = \max\limits_{i=0,1,\ldots,n} \{i : \varphi_i(x) > 0,\ \varphi_i(f(x)) \leq \varphi_i(x)\}$.

Будем пользоваться стандартной терминологией, вводимой в следующих определениях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Симплекс $\sigma = (y^o y^1 \ldots y^n)$ называется полнонумерованным, если среди номеров его вершин $L(y^o), L(y^1), \ldots, L(y^n)$ встречаются по одному разу все числа от 0 до n.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Симплекс $\sigma = (y^o y^1 \ldots y^n)$ или $(n-1)$-мерный симплекс $\tau = (y^o y^1 \ldots y^{n-1})$ называются почти полнонумерованными, если среди номеров их вершин встречаются все числа от 0 до $n-1$ и не встречается число n.

В пространстве R_+^n рассмотрим произвольный кубик K^δ с ребрами длины δ, параллельными осям координат. Пусть $a(K^\delta)$ - вершина кубика, ближайшая по $\|\cdot\|_2$ к началу координат, и $\bar{a}(K^\delta)=\sum_{i=1}^{n} a_i(K^\delta)$.

ЛЕММА I. Для любых $x,y\in K^\delta$

$$|\varphi_i(x)-\varphi_i(y)|\leq\frac{\bar{a}(K^\delta)\cdot\delta+a_{i+1}(K^\delta)\cdot\delta(n-2)+\delta^2(n-1)}{(\bar{a}(K^\delta)+\delta)(\bar{a}(K^\delta)+\delta(n-1))},$$

если $i=1,2,\ldots,n-1$ и $|\varphi_n(x)-\varphi_n(y)|\leq n\delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению, $\arg\max_{x\in K^\delta}\varphi_n(x)=a(K^\delta)+\delta e$, где $e=(11\ldots1)^T\in R^n$; $\arg\min_{x\in K^\delta}\varphi_n(x)=a(K^\delta)$. Следовательно, при любых $x,y\in K^\delta$ имеем $|\varphi_n(x)-\varphi_n(y)|\leq n\delta$. Аналогично, для $i=1,2,\ldots,n-1$ имеем $\arg\max_{x\in K^\delta}\varphi_i(x)=a(K^\delta)+\delta e^{i+1}$, $\arg\min_{x\in K^\delta}\varphi_i(x)=a(K^\delta)+\delta(e-e^{i+1})$. А значит, для любых $x,y\in K^\delta$ и $i=1,2,\ldots,n-1$

$$|\varphi_i(x)-\varphi_i(y)|\leq\frac{a_{i+1}(K^\delta)+\delta}{\bar{a}(K^\delta)+\delta}-\frac{a_{i+1}(K^\delta)}{\bar{a}(K^\delta)+\delta(n-1)}=$$

$$=\frac{\bar{a}(K^\delta)\delta+a_{i+1}(K^\delta)\delta(n-2)+\delta^2(n-1)}{(\bar{a}(K^\delta)+\delta)(\bar{a}(K^\delta)+\delta(n-1))}\leq\frac{\delta(n-1)}{\bar{a}(K^\delta)+\delta(n-1)}+\frac{\delta}{\bar{a}(K^\delta)+\delta}.$$

Лемма доказана.

Для произвольного симплекса $\sigma=(y^0y^1\ldots y^n)\in\delta H_1(R_+^n)$ существует кубик K^δ с ребрами длины δ, параллельными осям координат, и такой, что $\sigma\subset K^\delta$.

Зафиксируем непрерывное отображение $f:R_+^n\to R_+^n$ (т.е. для всякого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что из $\|x-y\|_\infty\leq\delta$ следует $\|f(x)-f(y)\|_\infty\leq\varepsilon$. Тогда для симплекса σ соответствующие точки $f(y^0),f(y^1),\ldots,f(y^n)$ лежат в некотором кубике K^ε с ребрами длины ε, параллельными осям координат. Пусть $a(K^\varepsilon)$ - ближайшая по $\|\cdot\|_2$ к началу координат вершина кубика K^ε и $\bar{a}(K^\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n}a_i(K^\varepsilon)$.

ЛЕММА 2. Если $\sigma=(y^0 y^1 \dots y^n)$ – полнонумерованный симплекс, $L(y^0)=0$, то $\|f(y^0)-y^0\|_\infty \le \max(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\varepsilon_3$, где $\varepsilon_1=3n(\varepsilon+\delta)$,

$$\varepsilon_2=(\delta+2\varepsilon)2n+\frac{\varepsilon^2 n(n-1)}{\bar a(K^\varepsilon)+\varepsilon}+\frac{\delta^2 n(n-1)}{\bar a(K^\delta)+\delta}+\frac{\delta\varepsilon n(n-1)}{\bar a(K^\delta)+\delta}.$$

Здесь отображение f, кубики K^δ и K^ε определены перед леммой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению и ввиду того, что при $x\in R^n_+\setminus\{0\}$ имеем $x_i=\varphi_n(x)\varphi_{i-1}(x)$ для $i=2,3,\dots,n$ и $x_1=\varphi_n(x)\left(1-\sum_{j=1}^{n-1}\varphi_j(x)\right)$, справедливо равенство

$$\|f(y^0)-y^0\|_\infty=\max\Big\{\max_{i=2,3,\dots,n}|\varphi_n(f(y^0))\varphi_{i-1}(f(y^0))-\varphi_n(y^0)\varphi_{i-1}(y^0)|,$$

$$|\varphi_n(f(y^0))[1-\sum_{j=1}^{n-1}\varphi_j(f(y^0))]-\varphi_n(y^0)[1-\sum_{j=1}^{n-1}\varphi_j(y^0)]|\Big\}.$$

Так как $\sigma=(y^0 y^1\dots y^n)$ полнонумерованный, то, перенумеровав вершины, можно добиться, чтобы $L(y^i)=i$ при $i=0,1,\dots,n$. Отсюда и из леммы I следует, что

$$0\le\varphi_n(f(y^0))\varphi_i(f(y^0))-\varphi_n(y^0)\varphi_i(y^0)=$$

$$=\varphi_i(f(y^0))[\varphi_n(f(y^0))-\varphi_n(f(y^n))]+\varphi_n(f(y^n))[\varphi_i(f(y^0))-\varphi_i(f(y^i))]+$$

$$+\varphi_i(f(y^i))[\varphi_n(f(y^n))-\varphi_n(y^n)]+\varphi_n(y^n)[\varphi_i(f(y^i))-\varphi_i(y^i)]+$$

$$+\varphi_i(y^i)[\varphi_n(y^n)-\varphi_n(y^0)]+\varphi_n(y^0)[\varphi_i(y^i)-\varphi_i(y^0)]\le$$

$$\le n\varepsilon+(\bar a(K^\varepsilon)+\varepsilon n)\left(\frac{\varepsilon(n-1)}{\bar a(K^\varepsilon)+\varepsilon(n-1)}+\frac{\varepsilon}{\bar a(K^\varepsilon)+\varepsilon}\right)+0+0+$$

$$+n\delta+(\bar a(K^\delta)+\delta n)\cdot\left(\frac{\delta(n-1)}{\bar a(K^\delta)+\delta(n-1)}+\frac{\delta}{\bar a(K^\delta)+\delta}\right)\le\dots\le 3n(\varepsilon+\delta)=$$

$$=\varepsilon_1$$

при $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Кроме того,

$$\varphi_n(f(y^0))\left[1-\sum_{j=1}^{n-1}\varphi_j(f(y^0))\right]-\varphi_n(y^0)\left[1-\sum_{j=1}^{n-1}\varphi_j(y^0)\right]\leq$$

$$\leq \varphi_n(f(y^0))-\varphi_n(y^0)=\varphi_n(f(y^0))-\varphi_n(f(y^n))+\varphi_n(f(y^n))-\varphi_n(y^n)+$$

$$+\varphi_n(y^n)-\varphi_n(y^0)\leq n(\varepsilon+\delta).$$

Это следует из соотношений $\varphi_j(f(y^0)) \underset{n-1}{\geq} \varphi_j(y^0)$ (либо $\varphi_j(y^0)=0$) для $j=1,2,\ldots,n-1$, а величина $1-\sum_{j=1}^{n-1}\varphi_j(y^0)\leq 1$.

С другой стороны,

$$\varphi_n(y^0)\left[1-\sum_{j=1}^{n-1}\varphi_j(y^0)\right]-\varphi_n(f(y^0))\left[1-\sum_{j=1}^{n-1}\varphi_j(f(y^0))\right]\leq$$

$$\leq \varphi_n(f(y^0))\sum_{j=1}^{n-1}\left[\varphi_j(f(y^0))-\varphi_j(y^0)\right]\leq$$

$$\leq(\bar{\alpha}(K^{\varepsilon})+\varepsilon n)\sum_{j=1}^{n-1}\left[\varphi_j(f(y^0))-\varphi_j(f(y^j))+\varphi_j(f(y^j))-\varphi_j(y^j)+\varphi_j(y^j)-\varphi_j(y^0)\right]\leq$$

$$\leq(\bar{\alpha}(K^{\varepsilon})+\varepsilon n)\left[\frac{2\varepsilon(n-1)}{\bar{\alpha}(K^{\varepsilon})+\varepsilon(n-1)}+\frac{\varepsilon^2(n-1)^2}{(\bar{\alpha}(K^{\varepsilon})+\varepsilon(n-1))(\bar{\alpha}(K^{\varepsilon})+\varepsilon)}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\delta(n-1)}{\bar{\alpha}(K^{\delta})+\delta(n-1)}+\frac{\delta^2(n-1)^2}{(\bar{\alpha}(K^{\delta})+\delta(n-1))(\bar{\alpha}(K^{\delta})+\delta)}\right].$$

Заметим, что $\bar{\alpha}(K^{\varepsilon})\leq\varphi_n(f(y^n))\leq\varphi_n(y^n)\leq\bar{\alpha}(K^{\delta})+\delta n$.
Следовательно,

$$\varphi_n(f(y^0))\sum_{j=1}^{n-1}\left[\varphi_j(f(y^0))-\varphi_j(y^0)\right]\leq\ldots\leq$$

$$\leq(2\varepsilon+\delta)2n+\frac{\varepsilon^2 n(n-1)}{\bar{\alpha}(K^{\varepsilon})+\varepsilon}+\frac{\delta^2 n(n-1)}{\bar{\alpha}(K^{\delta})+\delta}+\frac{\delta\varepsilon n(n-1)}{\bar{\alpha}(K^{\delta})+\delta}=\varepsilon_2.$$

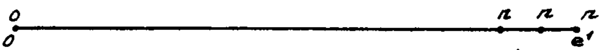
А значит, $\|f(y^0)-y^0\|_\infty\leq\max(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\varepsilon_3$. Лемма доказана.

Пусть теперь x - произвольная точка из полнонумерованного симплекса $\sigma=(y^0 y^1 \ldots y^n)$, где $L(y^i)=i$ при

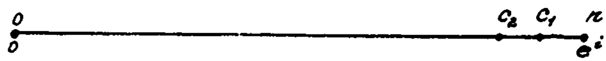
$i=0,1,\dots,n$. Тогда $|f(x)-x|_\infty \le \varepsilon+\delta+\varepsilon_3$.

ТЕОРЕМА I. Для непрерывного отображения $f:B\to B$ при любом шаге разбиения $\delta>0$ существует полнонумерованный симплекс $\sigma\in\delta H_1(B)$ либо существует такая точка $x\in B$, что $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \le \delta$ и $|f(x)-x|_\infty \le \delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению нумерации L на ребре $[0,e^1]$



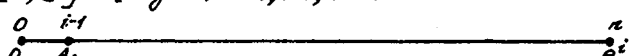
имеются лишь метки $0, n$. Рассмотрим ребро $[0,e^i]$ при $i\in\{2,3,\dots,n\}$. По определению $L(e^i)=n$ и точки $c_1, c_2,\dots$ помечены



меткой n , пока

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \ge \sum_{j=1}^{n} f_j(x). \tag{I}$$

Но $f(0)\ge 0$. И в точке $x=\delta e^i$ либо сохраняется неравенство (I), либо нарушается. В первом случае имеем $\delta=\sum\limits_{j=1}^{n} x_j \ge \sum\limits_{j=1}^{n} f_j(x)$ и $|f(x)-x|_\infty<\delta$. Во втором случае заметим, что при всех $x\in[0,e^i]$ угловая координата $\varphi_{i-1}(f(x))<\varphi_{i-1}(x)=1$. И в то же время $\varphi_j(x)=0$ для тех же $x\in[0,e^i]$ при $j=i, i+1,\dots, n-1$.



Следовательно, в δ-окрестности нуля на ребре $[0,e^i]$ точки имеют метку $i-1$. Других меток, кроме $0, i-1, n$, на этом ребре нет. Пусть $A_i=\delta e^i$. Тогда $L(A_i)=i-1$.
Аналогично определим $A_1=\delta e^1$ и $A_0=0$.

Рассмотрим B_i^n - грань множества B , натянутую на ребра $[0,e^1],\dots,[0,e^{i-1}],[0,e^{i+1}],\dots,[0,e^n]$ для $i=2,3,\dots,n$. На этой грани $\varphi_{i-1}(x)=0$. А значит, ни одна из точек множества B_i^n не имеет метки $i-1$. Обозначим через τ $(n-1)$-мерный симплекс $(A_0\cdot A_2\cdot A_3\cdots A_n)$. Тогда по построению τ -

почти полнонумерованный. Покажем, что множество B не содержит другого почти полнонумерованного граничного симплекса.

На грани B_i^n при $i=2,3,\dots,n$ нет точек с меткой $i-1$. На грани B_1^n только A_0 имеет метку 0. Но триангуляция $\delta H_1(B)$ такова, что τ является единственным ($n-1$)-мерным симплексом, имеющим A_0 своей вершиной и лежащим в B_1^n. С другой стороны, $L(x)=n$ для всех

$$x\in Fr B\setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i^n\subset\{x\in R_+^n:\sum_{i=1}^{n} x_i=1\}.$$

Единственность доказана.

Если найти путь по смежным граням n-мерных почти полнонумерованных симплексов, который начинается с $\sigma=(A_0.A_1\dots A_n)$, не проходит дважды через один и тот же симплекс, не выходит за границу множества B и кончается в полнонумерованном симплексе, то теорема будет доказана. Всем этим условиям удовлетворяет путь из симплексов, порождаемый алгоритмом Куна (см. [2,3]). Теорема доказана.

Алгоритм Куна для нашего случая имеет следующий вид. Пусть $\sigma_0=(A_0.A_1\dots A_n)$.

ШАГ 0. $y^+=A_1$, $k=0$.

ШАГ I. Если $L(y^+)=n$, то σ_k - искомый; конец. В противном случае существует единственная вершина $y^-\in\sigma_k$ такая, что $L(y^-)=L(y^+)$.

ШАГ 2. Находим симплекс σ_{k+1}, имеющий те же вершины, что и σ_k, за исключением y^-. Если y^+ - вершина симплекса σ_{k+1}, но $y^+\notin\sigma_k$, то, полагая $k=k+1$, идем на шаг I.

Для доказательства сходимости метода Куна достаточно заметить, что у каждого симплекса, порожденного алгоритмом, существует только один, предшествующий ему, что исключает возможность зацикливания.

Для триангуляции $\delta H_1(R_+^n)$ переход по смежным симплексам осуществляется в соответствии со следующей таблицей. Пусть следует перейти от симплекса $\sigma=(y^0.y^1\dots y^n)=h_1(y^0;\pi)$ к симплексу $\sigma_1=h_1(z^0;\rho)$, отбросив вершину $y^-=y^i$.

	z^0	ρ
$i=0$	$y^0+\delta\cdot\rho^{\pi(1)}$	$(\pi(2)\ldots\pi(n)\pi(1))$
$0<i<n$	y^0	$(\pi(1)\ldots\pi(i+1)\pi(i)\ldots\pi(n))$
$i=n$	$y^0-\delta\cdot\rho^{\pi(n)}$	$(\pi(n)\pi(1)\ldots\pi(n-1))$

Для лучшего приближения неподвижной точки следует уменьшить δ и повторить поиск полнонумерованного симплекса.

2. Изложенный выше метод применим и для поиска неподвижной точки непрерывного отображения $g: R_+^n \to R_+^n$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ I. Пусть для всякого $x\in\Gamma=\mathrm{Fr}A\cap R_+^n$, где A – открытая окрестность нуля в пространстве R^n, существует такой индекс $j(x)\in\{1,2,\ldots,n\}$, что $\varphi_{j(x)}(g(x))<\varphi_{j(x)}(x)$.

ТЕОРЕМА 2. Если g – непрерывное отображение R_+^n в себя, $\delta H_1(R_+^n)$ – триангуляция множества R_+^n, выполняется предположение I, то при достаточно малом шаге разбиения δ либо существует полнонумерованный симплекс $\sigma\in\delta H_1(R_+^n)$ (причем $\sigma\cap A\neq\emptyset$), либо существует такая точка $x\in R_+^n$, что $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\leqslant\delta$ и $\|g(x)-x\|_\infty\leqslant\delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По непрерывности $g(x)$ и $\varphi_i(x)$ при $x\in\Gamma$ и предположению I для всякой точки $x\in\Gamma$ существует окрестность $U_{\varepsilon_x}(x)$, в которой для всякого $y\in U_{\varepsilon_x}(x)$ выполняется неравенство $\varphi_{j(x)}(g(y))<\varphi_{j(x)}(y)$. Так как Γ – компакт, то из покрытия $U_{\varepsilon_x}(x)$, при $x\in\Gamma$, можно выбрать конечное подпокрытие множества Γ. Пусть это будет $U_{x^1},\ldots,U_{x^s}$. Возьмем $\delta=\min\limits_{i=1,\ldots,s}\varepsilon_{x^i}$. Тогда при разбиении с шагом δ для любого симплекса $\sigma=(y^0y^1\ldots y^n)$ из δ-окрестности множества Γ существует индекс $k\in\{1,2,\ldots,n\}$, для которого

$\varphi_k(g(y^i)) < \varphi_k(y^i)$ при $i=0,1,\dots,n$. Значит, $L(y^i)\neq 0$ для всякого i, т.е. симплекс σ – не почти полнонумерованный.

Таким образом, с помощью алгоритма Куна можно построить путь по смежным почти полнонумерованным симплексам, начинающийся на границе R^n_+. (Если не существует граничного $(n-1)$-мерного почти полнонумерованного симплекса, то, как и в теореме I, найдется $x \in R^n_+$, для которого $\sum_{i=1}^{n} x_i < 1$ и $\|g(x)-x\|_\infty < \delta$.) Построенный путь не имеет циклов, больше на границу R^n_+ не выходит и не может пройти через Γ. Следовательно, алгоритм заканчивает работу в полнонумерованном симплексе σ, причем $\sigma \cap A \neq \emptyset$. Теорема доказана.

Заметим, что предположение I можно заменить на следующее допущение, сформулированное без использования угловых координат.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. Пусть для всякого $x \in \Gamma = Fr A \cap R^n_+$, где A – открытая окрестность нуля в R^n, выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(x) < \sum_{i=1}^{n} x_i$$

или, в противном случае, существует индекс $j(x) \in \{2,3,\dots,n\}$ такой, что $g_{j(x)}(x) < x_{j(x)}$.

ЛИТЕРАТУРА

I. Todd M.J. The computation of fixed points and applications.- Berlin: Springer, 1976. (Русский перевод. Тодд М.Дж. Вычисление неподвижных точек и приложения к экономике. - М.: Наука, 1983.)

2. Kuhl H.W. Simplicial approximation of fixed points. - Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1968, v.6I, N 4, p.1238-1242.

3. Laan G. van der, Talman A.J.J. Simplicial fixed point algorithms. - Amsterdam: Mathematical Centre Tracts, N I29, I980.

Поступила в ред.-изд. отдел
30.0I.I986 г.