Выпуск 39(56) ОПТИМИЗАЦИЯ 1986 г.

Выпуклый анализ и смежные вопросы

УДК 519.21

# КОРРЕКТНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СУБДИФФЕРЕНЦИАЛОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.А.Бедельбаев

Пусть $E$ - вещественное банахово пространство с нормой $\|x\|$ элемента $x$, $\bar{R}$ - расширенная действительная прямая $R\cup\{\pm\infty\}$ и $f: E\to\bar{R}$ - расширеннозначный действительный функционал над банаховым пространством $E$. Введем следующие обозначения:

$$\operatorname{epi} f := \{(x,\mu)\in E\times\bar{R} \,/\, \mu \ge f(x)\};\quad \operatorname{dom} f := \{x\in E \,/\, |f(x)|<+\infty\};$$

$$Q^2_f(\bar{x}, f(\bar{x});\lambda,\mu; v, v_1, v_2) := \lambda^{-1}\mu^{-1}\{f(\bar{x}+\lambda v_1+\mu v_2+\lambda\mu v)-$$

$$-f(\bar{x}+\lambda v_1)-f(\bar{x}+\mu v_2)+f(\bar{x})\}.$$

Пусть $x\in\operatorname{dom} f$. Субпроизводной второго порядка функционала $f$ в точке $x$ по направлениям $v$, $v_1$ и $v_2$ называем функционал

$$f^{[2]}_x(v; v_1, v_2) := \overline{\lim_{\bar{x}\to x,\ \lambda\downarrow 0,\ \mu\downarrow 0}}\ Q^2_f(\bar{x}, f(\bar{x}); \lambda,\mu; v; v_1, v_2).$$

Всюду в работе рассматриваются функционалы $f$, которые удовлетворяют в точке $x$ условию $(G^2_x)$: существуют такие окрестности $U$ точки $x$, окрестности $V$, $V_1$ и $V_2$ нуля пространства $E$, константы $l>0$ и $b>0$, возможно зависящие от $U$, $V$, $V_1$ и $V_2$, (непрерывные) линейный функционал $l: E\to R$ и билинейный функционал $b: E\times E\to R$, что

$$l(v)+b(v_1,v_2)\le Q^2_f(\bar{x}, f(\bar{x}); 1, 1; v, v_1, v_2)\le l\|v\|+b\|v_1\|\cdot\|v_2\|$$

при всех $\bar{x} \in U$, $v \in V$, $v_1 \in V_1$ и $v_2 \in V_2$.

Пусть

$$f_x^o(v) := \overline{\lim_{\bar{x}\to x,\, \lambda \downarrow 0}}\ Q_f^1(\bar{x}, f(\bar{x}); \lambda; v) := \overline{\lim_{\bar{x}\to x,\, \lambda\downarrow 0}}\ \lambda^{-1}\{f(\bar{x}+\lambda v) - f(\bar{x})\}.$$

Субпроизводную первого порядка впервые ввел и исследовал Ф.Кларк в [1]. Отображение $f_x^o(v)$ – полунепрерывная сверху по $x$, сублинейная (т.е. выпуклая и положительно однородная), а если $f$ – локально-липшицевый функционал, то и непрерывная по $v$ функция.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть $x \in dom\, f$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $f_x^{[2]}(v; v_1, v_2) = f_x^{[2]}(v; v_2, v_1)$;

2) $f_x^{[2]}(\alpha v; \alpha v_1, v_2) = \alpha f_x^{[2]}(v; v_1, v_2)$, $\alpha > 0$;

3) если $f$ удовлетворяет в точке $x$ условию $(G_x^2)$, то

$$f_x^{[2]}(v^1+v^2; v_1^1+v_1^2, v_2) \le f_x^{[2]}(v^1; v_1^1, v_2) + f_x^{[2]}(v^2; v_1^2, v_2);$$

4) $f_x^{[2]}(v; 0, 0) = f_x^o(v)$;

5) если $f$ удовлетворяет в точке $x$ условию $(G_x^2)$, то

$$l(v) + b(v_1, v_2) \le f_x^{[2]}(v; v_1, v_2) \le l\|v\| + b\|v_1\|\cdot\|v_2\| \quad (1)$$

для всех $v$, $v_1$, $v_2$ из $E$;

6) функционал $x \to f_x^{[2]}(v; v_1, v_2)$ полунепрерывен сверху.

Все приведенные утверждения непосредственно следуют из приведенных выше определений.

Из предложения I вытекает, что если $f$ удовлетворяет в точке $x$ условию $(G_x^2)$, то субпроизводная второго порядка $f_x^{[2]}$ является бисублинейным по паре $(v, v_1)$ и $(v, v_2)$ непрерывным функционалом на $E \times E \times E$. Значит, он индуцирует на пространстве $E \otimes E \otimes E$ функционал

$$\hat{f}_x^{[2]}(v \oplus u) := \inf\Big\{\sum_i f_x^{[2]}(v; v_1^i, v_2^i) : u = \sum_i v_1^i \otimes v_2^i\Big\}, \quad (2)$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным конечным представлениям тензора $u$ в указанном виде. В дальнейшем функционал $\hat{f}_x^{[2]}$ будем называть тензорным расширением $f_x^{[2]}$.

В случае, если $\hat{f}_x^{[2]}(0)=0$, то он будет называться нетривиальным тензорным расширением.

Пусть $r(v;v_1,v_2):=\ell\|v\|+b\|v_1\|\|v_2\|$ и

$$\hat{r}(v\oplus u):=\inf\{\sum_i r(v;v_1^i,v_2^i):u=\sum_i u_1^i\otimes v_2^i\}. \quad (3)$$

Функционал $v\oplus u\to\hat{r}(v\oplus u)$ является нормой пространства $E\oplus E\otimes E$ (см., например, [2, с.121]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $x\in dom\, f$. Тогда

1) $epi\,\hat{f}_x^{[2]}=co\,epi\,f_x^{[2]}$, если $epi\,f_x^{[2]}$ рассматривать как подмножество пространства $E\oplus E\otimes E\times R$, где $co\,M$ – выпуклая оболочка множества $M$;

2) $w\to\hat{f}_x^{[2]}(w)$ является сублинейным функционалом над $E\oplus E\otimes E$;

3) если $f$ удовлетворяет в точке $x$ условию $(G_x^2)$, то функционал $\hat{f}_x^{[2]}$ является нетривиальным тензорным расширением $f_x^{[2]}$ и

$$\hat{f}_x^{[2]}(v\oplus u)\le\hat{r}(v\oplus u)\ \forall v\in E,\ \forall u\in E\otimes E;$$

4) если $f$ удовлетворяет в точке $x$ условию $(G_x^2)$, то на всех одновалентных элементах $v\oplus v_1\otimes v_2$ пространства $E\oplus E\otimes E$ имеет место

$$\hat{f}_x^{[2]}(v\oplus v_1\otimes v_2)=f_x^{[2]}(v\oplus v_1\otimes v_2); \quad (4)$$

5) функционал $x\to\hat{f}_x^{[2]}(w)$ полунепрерывен сверху на пространстве $E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства утверждения 1 предположим, что $(w,\gamma)\in epi\,\hat{f}_x^{[2]}$. Тогда $\gamma\ge\hat{f}_x^{[2]}(w)$. Следовательно, по определению тензорного расширения (2)

$$\gamma\ge\inf\{\sum_i\beta^i:(v,v_1^i,v_2^i,\beta^i)\in epi\,f_x^{[2]},w=\sum_i v\oplus v_1^i\otimes v_2^i\}.$$

Значит, существуют такие $\beta^i$, $v_1^i$, $v_2^i$, что

$$\gamma\ge\sum_i\beta^i,\ w=\sum_i v\oplus v_1^i\otimes v_2^i,\ (v,v_1^i,v_2^i,\beta^i)\in epi\,f_x^{[2]}.$$

В силу утверждений 2 и I предложения I для субпроизводной второго порядка $f_x^{[2]}$ это означает, что $(w,\gamma)\in \mathrm{co}\, \mathrm{epi}\, f_x^{[2]}$.

Обратно, если $(w,\gamma)\in \mathrm{co}\, \mathrm{epi}\, f_x^{[2]}$, то по определению выпуклой оболочки существуют такие $(v, v_1^i, v_2^i, \beta^i)\in \mathrm{epi}\, f_x^{[2]}$ и $\lambda_i \geq 0$, $\sum\limits_i \lambda_i = 1$, что

$$\gamma = \sum_i \lambda_i \beta^i, \quad w = \sum_i \lambda_i (v \oplus v_1^i \otimes v_2^i).$$

Следовательно, снова используя утверждения 2 и I предложения I, имеем

$$\gamma \geq \inf\Big\{\sum_i \lambda_i \beta^i : w = \sum_i \lambda_i (v\oplus v_1^i \otimes v_2^i), (v, v_1^i, v_2^i, \beta^i)\in$$

$$\in \mathrm{epi}\, f_x^{[2]}\Big\} = \inf\Big\{\sum_i f_x^{[2]}(\lambda_i v; \lambda_i v_1^i, v_2^i) : w = \sum_i \lambda_i v \oplus \lambda_i v_1^i \otimes$$

$$\otimes v_2^i\Big\} = \inf\Big\{\sum_i f_x^{[2]}(v; v_1^i, v_2^i) : w = \sum_i v\oplus v_1^i \otimes v_2^i\Big\} := \hat{f}_x^{[2]}(w),$$

где точная нижняя грань берется по всем конечным представлениям тензора $w$ в указанном виде.

Справедливость утверждения 2 вытекает теперь непосредственно из доказанного утверждения I, так как множество $\mathrm{epi}\, \hat{f}_x^{[2]}$ представляет собой выпуклый конус с вершиной в нуле пространства $E\oplus E \otimes E \times R$.

Для доказательства утверждения 3 заметим, что в силу свойства 5 из предложения I

$$f_x^{[2]}(v; v_1, v_2) \leq \tau(v; v_1, v_2). \tag{6}$$

Значит, $\mathrm{epi}\, f_x^{[2]} \supset \mathrm{epi}\, \tau$; следовательно, в силу доказанного утверждения I и определения 3 функционала $\hat{\tau}$

$$\mathrm{epi}\, \hat{f}_x^{[2]} = \mathrm{co}\, \mathrm{epi}\, f_x^{[2]} \supset \mathrm{co}\, \mathrm{epi}\, \tau = \mathrm{epi}\, \hat{\tau}. \tag{7}$$

Таким образом,

$$\hat{f}_x^{[2]}(v\oplus u) \leq \hat{\tau}(v\oplus u) \qquad \forall v\in E,\ \forall u \in E\otimes E. \tag{8}$$

С другой стороны, в силу того же утверждения 5 предложения I справедливо следующее неравенство:

$$f_x^{[2]}(v; v_1, v_2) \geq l(v) + b(v_1, v_2) \qquad \forall v,\ \forall v_1,\ \forall v_2.$$

Следовательно, для любого конечного представления тензора $w = v \oplus u$ в виде $\sum_i v^i \oplus v_1^i \otimes v_2^i$ выполнено

$$\sum_i f_x^{[2]}(v^i; v_1^i, v_2^i) \geq \sum_i l(v^i) + \sum_i b(v_1^i, v_2^i).$$

Но $b(v_1^i, v_2^i) = \hat{b}(v_1^i \otimes v_2^i)$, где $\hat{b}$ – тензорное расширение билинейной формы $b$, которое, как известно (см., например, [2]), является линейным непрерывным функционалом над тензорным произведением $E \otimes E$ в его проективной топологии, поэтому справедливо следующее неравенство:

$$\sum_i f_x^{[2]}(v^i; v_1^i, v_2^i) \geq l(\sum_i v^i) + \hat{b}(\sum_i v_1^i \otimes v_2^i) = l(v) + \hat{b}(u).$$

Значит,

$$l(v) + \hat{b}(u) \leq \inf\{\sum_i f_x^{[2]}(v^i; v_1^i, v_2^i) : v \oplus u = \sum_i v^i \oplus v_1^i \otimes$$

$$\otimes v_2^i\} := \hat{f}_x^{[2]}(v \oplus u).$$

Таким образом, отсюда и из неравенства (8) можем заключить, что

$$l(v) + \hat{b}(u) \leq \hat{f}_x^{[2]}(v \oplus u) \leq \hat{q}(v \oplus u) \qquad (9)$$

для всех $v \in E$ и $u \in E \otimes E$. Теперь легко заметить, что $\hat{f}_x^{[2]}$ является нетривиальным тензорным расширением субпроизводной второго порядка $f_x^{[2]}$.

Для доказательства утверждения 4 заметим, что в силу доказанного утверждения 3 $epi\, \hat{f}_x^{[2]}$ представляет собой телесный не совпадающий со всем пространством выпуклый конус с вершиной в нуле. По теореме Хана – Банаха [2] существует такой нетривиальный линейный непрерывный функционал $g' \in (E \oplus E \otimes E)'$, что

$$\hat{f}_x^{[2]}(v \oplus u) \geq \langle v \oplus u, g' \rangle \quad \forall v \in E,\ \forall u \in E \otimes E.$$

В частности,

$$\hat{f}_x^{[2]}(v \oplus v_1 \otimes v_2) \geq \langle v \oplus v_1 \otimes v_2, g' \rangle \quad \forall v,\ \forall v_1,\ \forall v_2.$$

По той же теореме Хана – Банаха этот функционал $g'$ можно выбрать таким, что для любой из крайних точек $(v^0, v_1^0, v_2^0, f_x^{[2]}(v^0;$

$v_1^0, v_2^0)$) множества $epi\, f_x^{[2]}$ выполняется

$$f_x^{[2]}(v^0; v_1^0, v_2^0) = \langle v^0 \oplus v_1^0 \otimes v_2^0, g' \rangle . \tag{10}$$

Следовательно, отсюда и из (9) можем заключить, что

$$\hat{f}_x^{[2]}(v^0 \oplus v_1^0 \otimes v_2^0) \geqslant \langle v^0 \oplus v_1^0 \otimes v_2^0, g' \rangle = f_x^{[2]}(v^0; v_1^0, v_2^0).$$

Но, с другой стороны, по определению тензорного расширения $\hat{f}_x^{[2]}$ справедливо обратное неравенство:

$$\hat{f}_x^{[2]}(v \oplus v_1 \otimes v_2) \leqslant f_x^{[2]}(v; v_1, v_2) \quad \forall v,\ \forall v_1,\ \forall v_2 .$$

Значит, верно заключение доказываемого предложения 2 о справедливости равенства (4).

Справедливость утверждения 5 вытекает из того, что функционал $x \to \hat{f}_x^{[2]}$ есть нижняя огибающая семейства полунепрерывных сверху функционалов $x \to f_x^{[2]}$, которая, очевидно, будет полунепрерывным сверху функционалом.

СЛЕДСТВИЕ I. *Если $f$ удовлетворяет в точке $x$ условию $(G_x^2)$, то тензорное расширение $\hat{f}_x^{[2]}$ субпроизводной второго порядка $f_x^{[2]}$ является непрерывным сублинейным функционалом над $E \oplus E \otimes E$.*

Множества

$$\partial f(x) := \{x^* \in E' \,|\, \langle v, x^* \rangle \leqslant f_x^{[2]}(v; 0, 0) \quad \forall v \in E\}; \tag{11}$$

$$\partial_x^2 (x^*) f(x) := \{x^\Delta \in \mathcal{L}(E, E'_\sigma) \,|\, \langle v, x^* \rangle + \langle v_2, x^\Delta v_1 \rangle \leqslant$$
$$\leqslant f_x^{[2]}(v; v_1, v_2) \quad \forall v,\ \forall v_1,\ \forall v_2 \in E\}, \tag{12}$$

(здесь $\mathcal{L}(E, E'_\sigma)$ – пространство линейных непрерывных операторов $x^\Delta : E \to E'_\sigma$, где $E'_\sigma$ – топологически сопряженное с $E$ пространство, снабженное слабой топологией $\sigma(E', E)$) будем называть соответственно субдифференциалами первого и второго порядков функционала $f$ в точке $x$ .

ТЕОРЕМА I. *Пусть $x \in dom\, f$ и $f$ удовлетворяет в этой точке $x$ условию $(G_x^2)$. Тогда субдифференциалы первого и второго порядков функционала $f$ в точке $x$ определяются корректно и представляют собой*

непустые выпуклые компактные в топологии поточечной сходимости соответственно пространств $E'$ и $\mathcal{L}(E, E'_{\sigma})$ множества. При этом

$$f_x^{[2]}(v; v_1, v_2) = \max\{\langle v, x^*\rangle + \langle v_2, x^{\Delta} v_1\rangle \mid \forall x^* \in \partial f(x), \forall x^{\Delta} \in \partial_x^2(x^*)\} \quad \forall v,\ \forall v_1,\ \forall v_2 \in E. \tag{13}$$

Отображения $x \to \partial f(x)$ и $(x^*, x) \to \partial_x^2(x^*) f(x)$ являются полунепрерывными сверху многозначными функциями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия I предложения 2 тензорное расширение $\hat{f}_x^{[2]}$ субпроизводной второго порядка функционала $f$ в точке $x$ является непрерывным сублинейным функционалом над пространством $E \oplus E \otimes E$. Таким образом, в смысле выпуклого анализа [3] корректно определение субдифференциала такого функционала:

$$\partial \hat{f}_x^{[2]}(0) := \{g' \in (E \oplus E \otimes E)' \mid \langle w, g'\rangle \leq \hat{f}_x^{[2]}(w) \quad \forall w \in E \oplus E \otimes E\}.$$

При этом $\partial \hat{f}_x^{[2]}(0)$ представляет собой непустое выпуклое компактное (в топологии поточечной сходимости пространства $(E \oplus E \otimes E)'$) множество,

$$\hat{f}_x^{[2]}(w) = \max\{\langle w, g'\rangle \mid \forall g' \in \partial \hat{f}_x^{[2]}(0)\} \quad \forall w \tag{14}$$

и отображение $x \to \partial \hat{f}_x^{[2]}(0)$ является полунепрерывным сверху. Поскольку $(E \oplus E \otimes E)' = E' \times \mathcal{B}(E, E)$, где $\mathcal{B}(E, E)$ – пространство всех непрерывных билинейных форм над $E \times E$, а пространство $E \otimes E$ снабжено проективной топологией тензорного произведения [2] и изоморфно пространству $\mathcal{L}(E, E'_{\sigma})$, можно заключить, что

$$\partial \hat{f}_x^{[2]}(0) := \{(x^*, x^{\Delta}) \in E' \times \mathcal{L}(E, E'_{\sigma}) \mid \langle v \oplus u, (x^*, x^{\Delta})\rangle \leq \hat{f}_x^{[2]}(v \oplus u) \quad \forall v \in E,\ \forall u \in E \otimes E\}.$$

Но так как $\hat{f}_x^{[2]}$ является нетривиальным тензорным расширением функционала $f_x^{[2]}$, то в силу утверждения 4 предложения 2

$$\partial \hat{f}_x^{[2]}(0) \subset \{ (x^*, x^\Delta) \in E' \times \mathcal{L}(E, E'_\sigma) \mid \langle v, x^* \rangle +$$

$$+ \langle v_2, x^\Delta v_1 \rangle \le f_x^{[2]}(v; v_1, v_2) \quad \forall v, \forall v_1, \forall v_2 \}.$$

Если

$$gr\, \partial_x^2(\cdot) f(x) := \{ (x^*, x^\Delta) \in E' \times \mathcal{L}(E, E'_\sigma) \mid x^* \in \partial f(x),$$

$$x^\Delta \in \partial_x^2 (x^*) f(x) \},$$

то предыдущее включение означает, что

$$\partial \hat{f}_x^{[2]}(0) \subset gr\, \partial_x^2(\cdot) f(x).$$

Обратное включение легко следует из того, что если $(x^*, x^\Delta) \in$ $\in gr\, \partial_x^2(\cdot) f(x)$, то

$$\langle v, x^* \rangle + \langle v_2^i, x^\Delta v_1^i \rangle \le f_x^{[2]}(v; v_1^i, v_2^i)$$

для произвольного конечного набора $v_1^i$, $v_2^i$ из $E$. Следовательно,

$$\langle v \oplus u, (x^*, x^\Delta) \rangle := \inf \{ \langle v, x^* \rangle + \sum_i \langle v_2^i, x^\Delta v_1^i \rangle : u = \sum_i v^i \otimes$$

$$\otimes v_2^i \} \le \inf \{ \sum_i f_x^{[2]}(v; v_1^i, v_2^i) : u = \sum_i v_1^i \otimes v_2^i \} := \hat{f}_x^{[2]}(v \oplus u),$$

где точная нижняя грань, как всегда, берется по всем конечным представлениям тензора $u$ в указанном виде. Таким образом,

$$(x^*, x^\Delta) \in \partial \hat{f}_x^{[2]}(0).$$

Значит, так как по доказанному $\partial \hat{f}_x^{[2]}(0)$ – непустое выпуклое компактное (в топологии поточечной сходимости пространства $E' \times \mathcal{L}(E, E'_\sigma)$ ) множество, то таким же будет и множество $gr\, \partial_x^2(\cdot) f(x)$ .

Представление (I3) доказываемой теоремы является следствием представления (I4) и утверждения 4 предложения 2.

Справедливость заключительного утверждения о полунепрерывности сверху отображений $x \to \partial f(x)$ и $(x, x^*) \to \partial_x^2 (x^*) f(x)$ следует из полунепрерывности сверху отображения $x \to \partial f_x^{[2]}(0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Приведенное условие $(G_x^2)$ , при котором возможно корректное определение субдифференциалов первого и второго

порядков, является достаточным условием. Действительно, для функции $f(x)=|x|$ на $R$ в точке $x=0$ не выполнено условие $(G_x^2)$. Но тем не менее

$$f_x^{[2]}(v;v_1,v_2)=\begin{cases}|v|, & v_1\cdot v_2\leq 0;\\ +\infty, & v_1\cdot v_2>0.\end{cases}$$

При этом тензорное расширение этого функционала имеет вид

$$\hat{f}_x^{[2]}(v\oplus u)=\begin{cases}|v|, & u\leq 0;\\ +\infty, & u>0.\end{cases}$$

Ясно, что это нетривиальное тензорное расширение, поэтому субдифференциалы первого и второго порядков имеют вид

$$\partial f(0)=[-1,1],\ \partial_x^2(0)f(0)=[0,+\infty).$$

В рамках рассматриваемого подхода к доказательству корректности определения субдифференциалов первого и второго порядков условие $(G_x^2)$ можно существенно ослабить.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что $f$ удовлетворяет в точке $x$ условию $(D_x^2)$, если

$$\operatorname{int} F_x^2(f):=\operatorname{int}\{(v,v_1,v_2)\in E^3\,/\,f_x^{[2]}(v;v_1,v_2)<+\infty\}\neq\emptyset,$$

и существуют такое подпространство $N\subset E$ и (непрерывные) линейная форма $\ell$ и билинейная форма $b$ на нем, что

$$f_x^{[2]}(v;v_1,v_2)\geq\ell(v)+b(v_1,v_2)\quad\forall v,\ \forall v_1,\ \forall v_2\in N.$$

Тогда для функционала $f$, удовлетворяющего в точке $x$ условию $(D_x^2)$, ясно, что

$$\operatorname{int}\hat{F}_x^2(f):=\operatorname{int}\{v\oplus u\,/\,\hat{f}_x^{[2]}(v\oplus u)<+\infty\}\supset$$

$$\supset\operatorname{int}\operatorname{co}F_x^2(f)\supset\operatorname{int}F_x^2(f)\neq\emptyset.$$

и

$$\hat{f}_x^{[2]}(v\oplus u)\geq\ell(v)+\hat{b}(u)\quad\forall v\in N,\ \forall u\in N\otimes N.$$

Следовательно, по теореме Хана – Банаха линейные функционалы $\ell$ и $b$ имеют нетривиальные линейные продолжения $\ell_1$ и $b_1$ соответственно на все $E$ и $E \otimes E$ такие, что

$$\hat{f}_x^{[2]}(v \oplus u) \geq \ell_1(v) + \hat{b}_1(u) \quad \forall v \in E, \ \forall u \in E \otimes E.$$

Применим снова предложенный нами подход к доказательству корректности определения субдифференциалов первого и второго порядков, если вместо условия непрерывности тензорного расширения $\hat{f}_x^{[2]}$ на $E \oplus E \otimes E$ потребовать лишь его полунепрерывность снизу. Последнее требование легко выполнить, перейдя к замыканию снизу:

$$\hat{\bar{f}}_x^{[2]}(v \oplus u) := \lim_{\substack{\bar{v} \oplus \bar{u} \to v \oplus u \\ \bar{v} \oplus \bar{u} \in \operatorname{int} F_x^2(f)}} \hat{f}_x^{[2]}(\bar{v} \oplus \bar{u}).$$

Ясно, что при таком определении субдифференциалы первого и второго порядков теряют свою компактность в топологии поточечной сходимости соответственно пространств $E'$ и $\mathcal{L}(E, E_\sigma')$.

Займемся теперь построением исчисления введенных субдифференциалов первого и второго порядков негладких функционалов, удовлетворяющих условию $(G_x^2)$. Отметим здесь, что можно построить аналогичное исчисление для субдифференциалов негладких функционалов, удовлетворяющих более слабому условию $(D_x^2)$.

Будем говорить, что функционал $f$ субдифференциально регулярен в точке $x$ порядка два, если

$$f_x^{[2]}(v; v_1, v_2) = \lim_{\lambda \downarrow 0, \mu \downarrow 0} Q_f^2(x, f(x); \lambda, \mu; v, v_1, v_2).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть функционал $f$ субдифференциально регулярен в точке $x$ порядка два и удовлетворяет в ней условию $(G_x^2)$. Тогда для всех $v$, $v_1$ и $v_2$ существует односторонняя* производная второго порядка:

$$(D^2 f)_x(v; v_1, v_2) := \lim_{\lambda \downarrow 0, \mu \downarrow 0} Q_f^2(x, f(x); \lambda, \mu; v, v_1, v_2) \tag{15}$$

и

$$f_x^{[2]}(v; v_1, v_2) = (D^2 f)_x(v; v_1, v_2). \tag{16}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $f$ удовлетворяет в точке $x$ условию $(G_x^2)$, то

$$\overline{\lim_{\lambda\downarrow 0,\mu\downarrow 0}} Q_f^2(x, f(x); \lambda, \mu; v, v_1, v_2) \leq f_x^{[2]}(v; v_1, v_2).$$

Но в силу предложения о субдифференциальной регулярности функционала $f$ в точке $x$ порядка два справедливо указанное равенство (16).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $f_1$ и $f_2$ – расширеннозначные действительные функционалы над $E$, конечные в точке $x$. Допустим, что $f_1$ и $f_2$ удовлетворяют в этой точке $x$ условию $(G_x^2)$. Тогда

$$(f_1+f_2)_x^{[2]}(v; v_1, v_2) \leq f_{1,x}^{[2]}(v; v_1, v_2) + f_{2,x}^{[2]}(v; v_1, v_2); \tag{17}$$

$$\partial(f_1+f_2)(x) \subset \partial f_1(x) + \partial f_2(x); \tag{18}$$

$$\partial_x^2(x^*)(f_1+f_2)(x) \subset \partial_x^2(x_1^*) f_1(x) + \partial_x^2(x_2^*) f_2(x), \tag{19}$$
$$x^* = x_1^* + x_2^*,$$

где множества, стоящие в правых частях включений (18) и (19), компактны в топологии поточечной сходимости соответственно пространств $E'$ и $\mathcal{L}(E, E'_\sigma)$. В этих включениях имеет место знак равенства, если $f_1$ и $f_2$, помимо предположенного, являются еще субдифференциально регулярными порядка два. То же относится и к неравенству (17), причем $f_1+f_2$ также оказывается субдифференциально регулярным в точке $x$ порядка два.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем предварительно, как из неравенства (17) можно получить включения (18) и (19), а также сопровождающие их утверждения. Для этого сначала покажем, что если $b_0$ – тензорное расширение функционала $b_0 := (f_1+f_2)_x^{[2]}$, а $b_1$ и $b_2$ – соответственно функционалов $b_1 := f_{1,x}^{[2]}$ и $b_2 := f_{2,x}^{[2]}$, то выполняется

$$\hat{b}_0(v\oplus u)\le \hat{b}_1(v\oplus u)+\hat{b}_2(v\oplus u). \tag{20}$$

Заметим, что неравенство (17) эквивалентно включению

$$epi\,(f_1+f_2)_x^{[2]}\supset epi\, f_{1,x}^{[2]}+epi\, f_{2,x}^{[2]}.$$

Ясно, что тогда в силу утверждения I предложения 2

$$epi\,\hat{b}_0=co\; epi\,(f_1+f_2)_x^{[2]}\supset co(epi\, f_{1,x}^{[2]}+epi_{2,x}^{[2]})=$$

$$=co\; epi\, f_{1,x}^{[2]}+co\; epi\, f_{2,x}^{[2]}=epi\,\hat{b}_1+epi\,\hat{b}_2.$$

Отсюда, так как

$$g\tau\;\partial_x^2(\cdot)f(x)=\partial\hat{f}_x^{[2]}(0),$$

то

$$g\tau\;\partial_x^2(\cdot)(f_1+f_2)(x)=\partial\hat{b}_0(0):=\{z\in E'\times\mathcal{L}(E,E'_\sigma)\,|<v\oplus u,$$

$$z>\le\hat{b}_0(v\oplus u),\;\forall v\in E,\;\forall u\in E\otimes E\}\subset\{z\in E'\times\mathcal{L}(E,E'_\sigma)|$$

$$<v\oplus u,z>\le(\hat{b}_1+\hat{b}_2)(v\oplus u),\;\forall v\in E,\;\forall u\in E\otimes E\}:=\partial(\hat{b}_1+\hat{b}_2)(0),$$

где последнее равенство справедливо в силу выпуклости функционала $(\hat{b}_1+\hat{b}_2)(u)$ и $(\hat{b}_1+\hat{b}_2)(0)=0$. По теореме о субдифференцировании суммы двух выпуклых функционалов, которая известна в выпуклом анализе [3], имеем

$$\partial(\hat{b}_1+\hat{b}_2)(0)=\partial\hat{b}_1(0)+\partial\hat{b}_2(0).$$

Отсюда вытекает, что

$$\partial(\hat{b}_1+\hat{b}_2)(0)=g\tau\;\partial_x^2(\cdot)f_1(x)+g\tau\;\partial_x^2(\cdot)f_2(x). \tag{21}$$

Следовательно,

$$g\tau\;\partial_x^2(\cdot)(f_1+f_2)(x)\subset g\tau\;\partial_x^2(\cdot)f_1(x)+g\tau\;\partial_x^2(\cdot)f_2(x). \tag{22}$$

Но это и означает справедливость включений (18) и (19). Заметим здесь дополнительно, что равенство (21) дает компактность множеств, стоящих в его правой части, в топологии поточечной сходимости пространства $E'\times\mathcal{L}(E,E'_\sigma)$. Если окажется, что $b_0\ge b_1+b_2$, а тем самым $\hat{b}_0\ge\hat{b}_1+\hat{b}_2$, то включение в (22) заменится на противоположное, и в силу уже полученных включений в (18) и (19) будут иметь место равенства.

Остается удостовериться в справедливости неравенства (I7). Это неравенство является простым следствием свойства верхнего предела. Субдифференциальная регулярность $f_1$ и $f_2$ и свойство нижнего предела приводит к тому, что

$$b_1(v;v_1,v_2)+b_2(v;v_1,v_2)\leq \varliminf_{\lambda\downarrow 0,\mu\downarrow 0} \lambda^{-1}\mu^{-1}\{(f_1+f_2)\times$$

$$\times(x+\lambda v_1+\mu v_2+\lambda\mu v)-(f_1+f_2)(x+\lambda v_1)-(f_1+f_2)\times$$

$$\times(x+\mu v_2)+(f_1+f_2)(x)\}\leq b_0(v,v_1,v_2), \tag{23}$$

где $(f_1+f_2)(x):=f_1(x)+f_2(x)$.

Следовательно, объединяя полученное неравенство с доказанным неравенством (I7), заключаем, что в соотношении (23) имеет место равенство. Но это, как уже говорилось, и означает, что в включениях (I8) и (I9) имеют место равенства, а $f_1+f_2$ является субдифференциально регулярным в точке порядка два.

Пусть $x\in dom\, f$. Суперпроизводной второго порядка функционала $f$ в точке $x$ называем функционал

$$f_{[2],x}(v;v_1,v_2):=\varlimsup_{\bar{x}\to x,\lambda\downarrow 0,\mu\downarrow 0} Q_f^2(\bar{x},f(\bar{x});\lambda,\mu;v,v_1,v_2). \tag{24}$$

Множества

$$\underline{\partial} f(x):=\{x^*\in E'\,|\,\langle v,x^*\rangle\leq f_{[2],x}(v;0,0)\quad \forall v\in E\}; \tag{25}$$

$$\underline{\partial}_x^2(x^*)f(x):=\{x^\Delta\in \mathcal{L}(E,E'_\sigma)\,|\,\langle v,x^*\rangle+\langle v_2,x^\Delta v_1\rangle\geq$$

$$\geq f_{[2],x}(v;v_1,v_2)\quad \forall v,\ \forall v_1,\ \forall v_2\}. \tag{26}$$

будем соответственно называть супердифференциалом первого и супердифференциалом второго порядков функционала $f$ в точке $x$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. П у с т ь $f$ удовлетворяет в точке $x$ условию $(G_x^2)$. Тогда

$$f_x^{[2]}(v;v_1,v_2)=-(-f)_{[2],x}(v;v_1,v_2) \tag{27}$$

и

$$\partial f(x) = \underline{\partial} f(x); \tag{28}$$

$$\partial_x^2 (x^*) f(x) = \underline{\partial}_x^2 (x^*) f(x). \tag{29}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По свойствам верхнего и нижнего пределов

$$(-f)_{[2],x}(v; v_1, v_2) = -\overline{\lim_{\bar{x}\to x,\lambda\downarrow 0,\mu\downarrow 0}}\ Q_f^2(\bar{x}, f(\bar{x}); \lambda, \mu; v, v_1, v_2) =$$

$$= -f_x^{[2]}(v; v_1, v_2) \quad \forall v,\ \forall v_1, \forall v_2,$$

откуда ясно, что

$$\partial(-f)(x) = -\underline{\partial} f(x), \quad \partial_x^2(x^*)(-f)(x) = -\underline{\partial}_x^2(x^*) f(x). \tag{30}$$

С другой стороны,

$$f_x^{[2]}(v; v_1, v_2) = \overline{\lim_{\bar{x}\to x,\lambda\downarrow 0,\mu\downarrow 0}}\ Q_f^2(\bar{x}, -f(\bar{x}); -\lambda, \mu; -v, -v_1, v_2).$$

Значит,

$$-\partial f(x) = \partial(-f)(x), \ -\partial_x^2(-x^*) f(x) = \partial_x^2(x^*)(-f)(x).$$

Поэтому отсюда и из равенства (30) следует справедливость равенств (28) и (29).

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть $x \in dom\, f$ и функционал $f$ удовлетворяет в точке $x$ условию $(G_x^2)$. Тогда для любого $\alpha \in R$

$$\partial(\alpha f)(x) = \alpha\, \partial f(x), \ \partial_x^2(\alpha x^*)(\alpha f)(x) = \alpha\, \partial_x^2(x^*) f(x). \tag{31}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $f = \varphi \cdot \psi$, где $\varphi$ и $\psi$ – расширеннозначные действительные функционалы над банаховым пространством $E$, конечные в точке $x$ и удовлетворяющие в ней условию $(G_x^2)$. Тогда

$$\partial f(x) \subset \partial\varphi(x)\cdot\psi(x) + \varphi(x)\cdot\partial\psi(x); \tag{32}$$

$$\partial_x^2(x^*) f(x) \subset \partial_x^2(x_1^*)\varphi(x)\cdot\psi(x) + \varphi(x)\cdot\partial_x^2(x_2^*)\psi(x) +$$

$$+ \partial\varphi(x) \otimes \partial\psi(x) + \partial\psi(x) \otimes \partial\varphi(x), \ x^* = x_1^*\psi(x) + \varphi(x) x_2^*. \tag{33}$$

Множества, стоящие в правых частях этих включений, являются

компактными в топологии поточечной сходимости пространств $E'$ и $\mathcal{L}(E, E'_6)$. Равенства в этих включениях будут иметь место в том случае, когда $\varphi$ и $\psi$ субдифференциально регулярны в точке $x$ порядка два.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что

$$Q^2_f(\bar{x}, f(\bar{x}); \lambda, \mu; v, v_1, v_2) = Q^2_\varphi(\bar{x}, \varphi(\bar{x}); \lambda, \mu; v, v_1, v_2) \cdot$$
$$\cdot \psi(\bar{x} + \lambda v_1 + \mu v_2 + \lambda\mu v) + \varphi(\bar{x} + \lambda v_1) \cdot Q^2_\psi(\bar{x}, \psi(x); \lambda, \mu; v, v_1, v_2) +$$
$$+ Q^1_\varphi(\bar{x}, \varphi(x); \mu; v_2) \cdot Q^1_\psi(\bar{x} + \mu v_2; \psi(\bar{x} + \mu v_2); \lambda; \mu v + v_1) +$$
$$+ Q^1_\varphi(\bar{x}, \varphi(\bar{x}); \lambda; v_1) \cdot Q^1_\psi(\bar{x}, \psi(\bar{x}); \mu; v_2).$$

С учетом свойства верхнего предела можно получить

$$f^{[2]}_x(v; v_1, v_2) := \overline{\lim_{\bar{x} \to x, \lambda \downarrow 0, \mu \downarrow 0}} Q^2_f(\bar{x}, f(\bar{x}); \lambda, \mu; v, v_1, v_2) \leq$$

$$\leq \overline{\lim_{x \to x, \lambda \downarrow 0, \mu \downarrow 0}} Q^2_\varphi(\bar{x}, \varphi(\bar{x}); \lambda, \mu; v, v_1, v_2) \cdot \psi(\bar{x} + \lambda v_1 + \mu v_2 + \lambda\mu v) +$$

$$+ \overline{\lim_{\bar{x} \to x, \lambda \downarrow 0, \mu \downarrow 0}} \varphi(\bar{x} + \lambda v_1) \cdot Q^2_\psi(\bar{x}, \psi(\bar{x}); \lambda, \mu; v_1, v_2) +$$

$$+ \overline{\lim_{\bar{x} \to x, \lambda \downarrow 0, \mu \downarrow 0}} Q^1_\varphi(\bar{x}, \varphi(\bar{x}); \mu; v_2) \cdot Q^1_\psi(\bar{x} + \mu v_2, \psi(\bar{x} + \mu v_2); \lambda; \mu v + v_1) +$$

$$+ \overline{\lim_{\bar{x} \to x, \lambda \downarrow 0, \mu \downarrow 0}} Q^1_\varphi(\bar{x}, \varphi(x); \lambda; v_1) \cdot Q^1_\psi(\bar{x}, \psi(\bar{x}); \mu; v_2). \qquad (34)$$

Рассмотрим в отдельности каждое слагаемое в правой части неравенства (34), зафиксировав предварительно выбранные векторы $v$, $v_1$ и $v_2$. Пусть

$$(\varphi \otimes \psi)^{\prime}_x(v_1, v_2) := \overline{\lim_{\bar{x} \to x, \lambda \downarrow 0, \mu \downarrow 0}} Q^1_\varphi(\bar{x}, \varphi(\bar{x}); \lambda; v_1) \cdot Q^1_\psi(\bar{x}, \psi(\bar{x}); \mu; v_2). \qquad (35)$$

Если существуют такая окрестность точки $U$ и положительные $\eta_1$ и $\eta_2$, что

$$Q^1_\varphi(\bar{x}, \varphi(\bar{x}); \lambda; v_1) \geq 0, \quad Q^1_\psi(\bar{x}, \psi(\bar{x}); \mu; v_2) \geq 0$$

$$\forall \bar{x} \in U, \quad \forall \lambda \in (0, \eta_1], \quad \forall \mu \in (0, \eta_2],$$

то ясно, что

$$(\varphi \otimes \psi)^o_x(v_1, v_2) = \varphi^o_x(v_1) \cdot \psi^o_x(v_2)$$

и

$$(\varphi \otimes \psi)^o_x(v_1, v_2) \geq \varphi_{0,x}(v_1) \cdot \psi_{0,x}(v_2) \geq 0,$$

где $\varphi_{0,x}$ и $\psi_{0,x}$ – суперпроизводные первого порядка соответственно функционалов $\varphi$ и $\psi$ в точке $x$. Если $x^*_1 \in \partial\varphi(x)$ и $x^*_2 \in \partial\psi(x)$, то, как показано в предложении 5,

$$\begin{aligned} &\varphi_{0,x}(v_1) \leq \langle v_1, x^*_1 \rangle \leq \varphi^o_x(v_1) \qquad \forall v_1 \in E; \\ &\psi_{0,x}(v_2) \leq \langle v_2, x^*_2 \rangle \leq \psi^o_x(v_2) \qquad \forall v_2 \in E. \end{aligned} \tag{36}$$

Следовательно,

$$(\varphi \otimes \psi)^o_x(v_1, v_2) = [\varphi^o_x(v_1) - \langle v_1, x^*_1 \rangle] \cdot [\psi^o_x(v_2) - \langle v_2, x^*_2 \rangle] +$$

$$+ \langle v_1, x^*_1 \rangle [\psi^o_x(v_2) - \langle v_2, x^*_2 \rangle] + [\varphi^o_x(v_1) - \langle v_1, x^*_1 \rangle] \cdot$$

$$\cdot \langle v_2, x^*_2 \rangle + \langle v_1, x^*_1 \rangle \langle v_2, x^*_2 \rangle \geq \langle v_1, x^*_1 \rangle \langle v_2, x^*_2 \rangle.$$

В случае, если существуют окрестность $U$ точки $x$ и положительные числа $\eta_1$, $\eta_2$ такие, что при всех $\bar{x} \in U$, $\lambda \in (0, \eta_1]$, $\mu \in (0, \eta_2]$ справедливы неравенства

$$Q^1_\varphi(\bar{x}, \varphi(\bar{x}); \lambda; v_1) \leq 0, \quad Q^1_\psi(\bar{x}, \psi(\bar{x}); \mu; v_2) \leq 0,$$

то ясно, что по определению нижнего предела и предложения 5

$$(\varphi \otimes \psi)^o_x(v_1, v_2) = (-\varphi)^o_x(v_1) \cdot (-\psi)^o_x(v_2).$$

Поэтому для этих $v_1$ и $v_2$ в силу неравенства (36)

$$(\varphi \otimes \psi)^o_x(v_1, v_2) = [(-\varphi)^o_x(v_1) - \langle v_1, -x^*_1 \rangle] \cdot [(-\psi)^o_x(v_2) - \langle v_2, x^*_2 \rangle] +$$

$$+ \langle v_1, -x^*_1 \rangle [(-\psi)^o_x(v_2) - \langle v_2, -x^*_2 \rangle] + [(-\varphi)^o_x(v_1) - \langle v_1, -x^*_1 \rangle] \cdot$$

$$\cdot\langle v_2,-x_2^*\rangle+\langle v_1,-x_1^*\rangle\langle v_2,-x_2^*\rangle \geq \langle v_1,x_1^*\rangle\langle v_2,x_2^*\rangle.$$

Пусть теперь существуют окрестность $U$ точки $x$, положительные числа $\eta_1$ и $\eta_2$ такие, что при всех $\bar{x}\in U$, $\lambda\in(0,\eta_1]$ и $\mu\in(0,\eta_2]$

$$Q_\varphi^1(\bar{x},\varphi(\bar{x});\lambda;v_1)\leq 0,\quad Q_\psi^1(\bar{x},\psi(\bar{x});\mu;v_2)\geq 0.$$

В этом случае

$$(\varphi\otimes\psi)_x^o(v_1,v_2)=\varphi_x^o(v_1)\cdot\psi_{o,x}(v_2)\leq 0.$$

Следовательно, с учетом неравенства (36)

$$(\varphi\otimes\psi)_x^o(v_1,v_2)=\varphi_x^o(v_1)\cdot\psi_{o,x}(v_2)\geq\varphi_x^o(v_1)\langle v_2,x_2^*\rangle=$$

$$=[\varphi_x^o(v_1)-\langle v_1,x_1^*\rangle]\langle v_2,x_2^*\rangle+\langle v_1,x_1^*\rangle\langle v_2,x_2^*\rangle\geq$$

$$\geq\langle v_1,x_1^*\rangle\langle v_2,x_2^*\rangle.$$

Если при тех же условиях имеет место неравенство

$$Q_\varphi^1(\bar{x},\varphi(\bar{x});\lambda;v_1)\geq 0,\quad Q_\psi^1(\bar{x},\psi(\bar{x});\mu;v_2)\leq 0,$$

то аналогичный анализ снова приводит к неравенству

$$(\varphi\otimes\psi)_x^o(v_1,v_2)\geq\langle v_1,x_1^*\rangle\langle v_2,x_2^*\rangle \tag{37}$$

для любых $x_1^*\in\partial\varphi(x)$ и $x_2^*\in\partial\psi(x)$.

Здесь возникает еще одна ситуация. Какие бы ни были окрестность $U$ точки $x$, положительные числа $\eta_1$ и $\eta_2$, найдутся такие $\bar{x}\in U$, $\lambda\in(0,\eta_1]$ и $\mu\in(0,\eta_2]$, что $Q_\varphi^1(\bar{x},\varphi(\bar{x});\lambda;v_1)$ и $Q_\psi^1(\bar{x},\psi(\bar{x});\mu;v_2)$ снова могут иметь различные знаки. Тем самым возникают еще четыре возможности и повторятся рассмотренные нами случаи, в каждом из которых справедливо приведенное выше неравенство (37).

Таким образом, если

$$(\hat{\varphi}\otimes\hat{\psi})_x^o(u):=\inf\left\{\sum_i(\varphi\otimes\psi)_x^o(v_1^i,v_2^i):u=\sum_i v_1^i\otimes v_2^i\right\}, \tag{38}$$

то он является тензорным расширением, нетривиальным в силу условия $(G_x^2)$, поэтому

$$(\hat{\varphi}\otimes\hat{\psi})_x^o(u)\geq\langle u,x_1^*\otimes x_2^*\rangle\quad\forall u\in E\otimes E.$$

Это означает, что

$$x_1^*\otimes x_2^*\in\partial(\hat{\varphi}\otimes\hat{\psi})_x^o(0). \tag{39}$$

Аналогичное обстоятельство имеет место и для предпоследнего слагаемого в правой части неравенства (34).

Рассмотрим теперь первые два слагаемых в правой части неравенства (34). В силу непрерывности функционалов $\varphi$ и $\psi$, следующей из условия $(G_x^2)$, получим

$$\overline{\lim_{\bar{x}\to x,\lambda\downarrow 0,\mu\downarrow 0}} Q_\varphi^2(\bar{x},\varphi(\bar{x});\lambda,\mu;v,v_1,v_2)\cdot\psi(\bar{x}+\lambda v_1+\mu v_2+\lambda\mu v)=$$

$$=\begin{cases}\varphi_x^{[2]}(v;v_1,v_2)\cdot\psi(x), & \text{если } \psi(x)>0;\\ \varphi_{[2],x}(v;v_1,v_2)\cdot\psi(x), & \text{если } \psi(x)<0;\end{cases} \tag{40}$$

и

$$\overline{\lim_{\bar{x}\to x,\lambda\downarrow 0,\mu\downarrow 0}} \varphi(\bar{x}+\lambda v_1)\cdot Q_\psi^2(\bar{x},\psi(x);\lambda,\mu;v,v_1,v_2)=$$

$$=\begin{cases}\varphi(x)\cdot\psi_x^{[2]}(v;v_1,v_2), & \text{если } \varphi(x)>0;\\ \varphi(x)\cdot\psi_{[2],x}(v;v_1,v_2), & \text{если } \varphi(x)<0.\end{cases} \tag{41}$$

Но в силу утверждения предложения 5

$$\varphi_{[2],x}(v;v_1,v_2)=-(-\varphi)_x^{[2]}(v;v_1,v_2);$$

$$\psi_{[2],x}(v;v_1,v_2)=-(-\psi)_x^{[2]}(v;v_1,v_2).$$

Таким образом,

$$(x_\varphi^*,x_\varphi^\Delta)\in\psi(x)gr\,\partial_x^2(\cdot)\varphi(x)\Leftrightarrow(x_\varphi^*,x_\varphi^\Delta)\in\psi(x)gr\,\underline{\partial}_x^2(\cdot)\varphi(x);$$

$$(x_\psi^*,x_\psi^\Delta)\in\varphi(x)\cdot gr\,\partial_x^2\psi(x)\Leftrightarrow(x_\psi^*,x_\psi^\Delta)\in\varphi(x)\cdot gr\,\underline{\partial}_x^2(\cdot)\psi(x).$$

Используя те же рассуждения, что и при доказательстве предложения 4, из всего сказанного выше и из неравенства (34) имеем

$$gr\,\partial_x^2(\cdot)f(x)\subset\psi(x)gr\,\partial_x^2(\cdot)\varphi(x)+\varphi(x)gr\,\partial_x^2(\cdot)\psi(x)+$$

$$+\partial\varphi(x)\otimes\partial\psi(x)+\partial\psi(x)\otimes\partial\varphi(x).$$

А это и есть требуемые включения (32) и (33).

Вторая часть этого предложения доказывается точно так же, как и заключительная часть предложения 4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть $f=\varphi\circ t$, где $\varphi$ - расширеннозначный действительный функционал над сепарабельным банаховым пространством $F$, $t:E\to F$ -

дважды строго дифференцируемое отображение с первой производной $t'(x)$ и второй производной $t''(x)$. Тогда если $\varphi$ обладает локально-липшицевой производной Фреше $D_\varphi$ в окрестности точки $t(x)$, то

$$f_x^{[2]}(v;v_1,v_2) \le \varphi_{t(x)}^{[2]}(t'(x)v + t''(x)v, v_2;\ t'(x)v_1,\ t'(x)v_2); \qquad (42)$$

$$\partial f(x) = \{t'^*(x) D\varphi(t(x))\}; \qquad (43)$$

$$\partial_x^2(x^*) f(x) \subset t'^*(x)\, \partial_y^2(x^*)\varphi(t(x))\, t'(x) +$$
$$+ t''^*(x)\, D\varphi(t(x)). \qquad (44)$$

В случае субдифференциальной регулярности функционала $\varphi$ в точке $t(x)$ порядка два в соотношениях (43) и (44) будут знаки равенства.

Доказательство этого утверждения не представляет трудностей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть $f = \varphi \circ t$, где $\varphi$ – расширеннозначный действительный функционал над конечномерным пространством $F$, а $t$ – отображение банахова пространства $E$ в $F$. Допустим, что $t$ в точке $x$ удовлетворяет условию $(G_x^2)$ и дважды непрерывно дифференцируемо по Гато в точке $t(x)$. Тогда в некотором базисе пространства $F$

$$f(x) \subset \sum_i D_i\, \varphi(t(x))\, \partial t_i(x); \qquad (45)$$

$$\partial_x^2(x^*) f(x) \subset \sum_i D_i\, \varphi(t(x))\, \partial_x^2(x^*) t_i(x) +$$
$$+ \sum_{i,j} D_{ij}^2\, \varphi(t(x))\, \partial t_i(x) \otimes \partial t_j(x). \qquad (46)$$

В случае субдифференциальной регулярности порядка два отображения $t$ в этом базисе во включениях (45) и (46) выполняются

равенства.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть функционал $f$ конечен в точке $x$ и удовлетворяет условию $(G^2_{x^\circ})$. Тогда для того чтобы $x^0$ была точкой локального минимума функционала $f$ на банаховом пространстве $E$, необходимо, чтобы

$$\in \partial f(x^0); \tag{47}$$

$$\exists x_0^\Delta \in \partial_x^2(0) f(x^0):\ v, x_0^\Delta v > \geq 0 \quad \forall v \in E. \tag{48}$$

Если $f$ субдифференциально регулярен в точке $x^0$ порядка два, выполнено условие (47),

$$\forall x^\Delta \in \partial_x^2(0) f(x^0): \langle v, x^\Delta v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in E; \tag{49}$$

$$\exists \alpha > 0, \exists x_0^\Delta \in \partial_x^2(0) f(x^0): \langle v, x_0^\Delta v \rangle \geq \alpha \|v\|^2 \quad \forall v \in E, \tag{50}$$

то точка $x^0$ является точкой строгого локального минимума функционала $f$ над $E$.

В заключение работы отметим, что построенные нами субдифференциалы второго порядка оказываются полезными и при исследовании негладкого функционала на выпуклость. Оказывается, что если функционал $f$ удовлетворяет всюду на $E$ условию $(G^2_x)$, то для его выпуклости на $E$ необходимо, а если он к тому же субдифференциально регулярен порядка два в каждой точке $E$, то и достаточно, чтобы

$$\forall x^\Delta \in \partial_x^2(x^*) f(x),\ \forall x^* \in \partial f(x),\ \forall x \in E: \langle v, x^\Delta v \rangle \geq 0,\ \forall v \in E.$$

## ЛИТЕРАТУРА


1. CLARKE F.H. Generalized gradients and applications. - Trans. Amer. Marh. Soc., 1975, v.205, p.247-262.
2. Шефер Х. Топологические векторные пространства. -М.:Мир, 1971.
3. Рокафеллар Р.Т. Выпуклый анализ. - М.: Наука, 1973.


Поступила в ред.-изд. отдел
26.02.1986 г.