Выпуск 39(56) ОПТИМИЗАЦИЯ 1986 г.
Выпуклый анализ и смежные вопросы

УДК 519.853.3

ОБ УСЛОВИЯХ КВАЗИВЫПУКЛОСТИ СУММ ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

И.А.Быкадоров

Устанавливаемые в статье результаты относительно сумм дробно-линейных функций дополняют и обобщают полученные ранее для сумм линейных и дробно-линейных функций.

1°. Задача поиска экстремумов сумм дробно-линейных функций на выпуклых многогранных множествах $X \subset R^n$ является одним из наименее изученных обобщений задачи дробно-линейного программирования [1]. При исследовании этой задачи важное значение имеет квазивыпуклость или квазивогнутость соответствующих функций

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{a_i^T x}{b_i^T x}, \tag{1.1}$$

где a_i и b_i - фиксированные векторы из R^n, причем $b_i^T x \neq 0$, $x \in X$, при всех $i = \overline{1, m}$.

Напомним [2], что вещественную функцию F, определенную на выпуклом множестве $X \subset R^n$, называют квазивыпуклой, если для любых $x', x'' \in X$ и $\lambda \in (0,1)$ имеют место неравенства

$$F(\lambda x' + (1-\lambda) x'') \leq \max\{F(x'), F(x'')\}; \tag{1.2}$$

причем эти неравенства являются строгими, если $F(x') \neq F(x'')$. Аналогично, функцию F называют квазивогнутой, если для любых $x', x'' \in X$ и $\lambda \in (0,1)$ имеют место неравенства

$$F(\lambda x' + (1-\lambda) x'') \geq \min\{F(x'), F(x'')\}; \tag{1.3}$$

причем эти неравенства являются строгими, если $F(x')\neq F(x'')$. Наконец, функцию называют **квазимонотонной**, если она является квазивыпуклой и квазивогнутой.

ЗАМЕЧАНИЕ. Часто (см., например, [3]) под квазивыпуклыми (квазивогнутыми) понимают более широкий класс функций, для которых при $F(x')\neq F(x'')$ неравенства (I.2) (соответственно неравенства (I.3)) не обязательно являются строгими. При этом, естественно, рассматриваемые функции могут иметь локальные минимумы (соответственно локальные максимумы), отличные от глобальных.

Известно (см., например, [I]), что при $m=1$ функция (I.I) является квазимонотонной. Однако уже сумма линейной и дробно-линейной функций, т.е. функция

$$\frac{a_1^T x}{b_1^T x} + a_2^T x, \quad x\in X, \tag{I.4}$$

вообще говоря, не является ни квазивыпуклой, ни квазивогнутой [4].

По-видимому, впервые с указанных позиций функция (I.4) исследовалась в работе [5]. Однако приведенные в этой работе условия, как выяснилось впоследствии [4,6], не являются ни необходимыми, ни достаточными для квазивыпуклости функции (I.4). Более того, из этих условий, вообще говоря, не следует выполнение неравенств (I.2) и (I.3).

В дальнейшем каждому множеству $X\subset R^n$, вектору $d\in R^n$ и вещественному числу D сопоставляются следующие множества:

$$\begin{aligned} X_+(d,D)&=\{x\in X: d^T x\geq D\},\\ X_+^0(d,D)&=\{x\in X: d^T x> D\},\\ X_-(d,D)&=\{x\in X: d^T x\leq D\},\\ X_-^0(d,D)&=\{x\in X: d^T x< D\}. \end{aligned} \tag{I.5}$$

В работах [4] и [7] устанавливается, что при линейно-независимых a_1 и b_1 и произвольном $a_2\neq 0$ справедливы следующие утверждения.

(i) Если функции $a_1^T x$, $b_1^T x$ и $a_2^T x$ являются линейно-независимыми на X, то функция (I.4) не удовлетворяет на X как условию (I.2), так и условию (I.3). Следовательно, указан-

ная функция не является ни квазивыпуклой, ни квазивогнутой.

(ii) Если $a_2 = \alpha a_1, \alpha \neq 0$, то при $\alpha > 0$ функция (I.4) квазивыпукла на множестве

$$X_+ (a_1, 0) \cap X_+^o (b_1, 0)$$

(см. (I.5)) и квазивогнута на множестве

$$X_- (a_1, 0) \cap X_+^o (b_1, 0).$$

Если же $\alpha < 0$, то функция (I.4) квазивыпукла на множествах

$$X_- (a_1, 0) \cap X_+^o (b_1, 0) \cap X_- (b_1, -\frac{1}{\alpha}),$$

$$X_+ (a_1, 0) \cap X_+ (b_1, -\frac{1}{\alpha})$$

и квазивогнута на множествах

$$X_+ (a_1, 0) \cap X_+^o (b_1, 0) \cap X_- (b_1, -\frac{1}{\alpha}),$$

$$X_- (a_1, 0) \cap X_+ (b, -\frac{1}{\alpha}).$$

(iii) Если $a_2 = \beta b_1, \ \beta \neq 0$, то функция (I.4) на множестве $X_+^o (b_1, 0)$ квазивыпукла при $\beta > 0$ и квазивогнута при $\beta < 0$.

(iv) Если $a_2 = \alpha a_1 + \beta b_1, \alpha \neq 0, \ \beta \neq 0$, то функция (I.4) имеет те же свойства, что и при $\beta = 0$ (ср. утверждение (ii)).

2°. Перейдем теперь к рассмотрению функций (I.I) при $m = 2$, т.е. функций вида

$$\frac{a_1^T x}{b_1^T x} + \frac{a_2^T x}{b_2^T x}. \qquad (2.I)$$

Задача минимизации или максимизации этой функции, как показано в [8], с помощью преобразования Чарнса - Купера [9] сводится к задаче минимизации или максимизации некоторой функции вида (I.4). Поэтому при поиске экстремума функции (2.I) вопрос о квазивыпуклости или квазивогнутости этой функции не представляет интереса. Аналогично, при $m > 2$ минимизация или максимизация функции (I.I) сводится к минимизации или максимизации функции того же вида, в которой одно из слагаемых является линейной функцией.

Совсем другая ситуация возникает при переходе к задачам

так называемого (ср.[I]) обобщенного дробного программирования, например к задаче минимизации на выпуклом множестве $X \subset R^n$ функции

$$\max_{1 \le j \le m_1} \sum_{i=1}^{m} \frac{a_{ij}^T x}{b_{ij}^T x} \tag{2.2}$$

при $m_1 > 1$ или к задаче максимизации функции

$$\min_{1 \le j \le m_2} \sum_{i=1}^{m} \frac{a_{ij}^T x}{b_{ij}^T x} \tag{2.3}$$

при $m_2 > 1$. В этом случае, как отмечается в [I], преобразование Чарнса – Купера неприменимо. В то же время для квазивыпуклости функции (2.2) (квазивогнутости функции (2.3)) достаточно, чтобы соответствующие суммы дробно-линейных функций являлись квазивыпуклыми при всех $j=\overline{1,m_1}$ (соответственно квазивогнутыми при всех $j=\overline{1,m_2}$). Поэтому представляет интерес вопрос о квазивыпуклости или квазивогнутости функции (I.I) в случае, когда $b_i^T x \not\equiv 1$ на X при всех $i=\overline{1,m}$, где $m>1$, и, в частности, в случае $m=2$.

Предположим вначале, что рассматриваемая функция (2.I) удовлетворяет условию

$$a_2 = \alpha a_1, \quad \alpha \neq 0. \tag{2.4}$$

Тогда при

$$c = \alpha^2 b_1 + \alpha b_2 \tag{2.5}$$

справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 2.I. *Если выполнено условие (2.4), то функция (2.I) квазивыпукла на множествах*

$$X_+(a_1,0) \cap X_+^0(c,0), \qquad X_-(a_1,0) \cap X_-^0(c,0) \tag{2.6}$$

(см. (I.5) и (2.5)) *и квазивогнута на множествах*

$$X_+(a_1,0) \cap X_-^0(c,0), \qquad X_-(a_1,0) \cap X_+^0(c,0). \tag{2.7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая

$$y_1 = a_1^T x, \; y_2 = b_1^T x, \; y_3 = b_2^T x, \; y = (y_1, y_2, y_3) \tag{2.8}$$

(ср.[4]), функцию (2.I) с учетом (2.4) можно привести к виду

$$f(y) = \frac{y_1}{y_2} + \alpha \; \frac{y_1}{y_3} \; .$$

Имеем

$$f(y) = \frac{y_1}{f_1(y)} ,$$

где

$$f_1(y) = \frac{y_2 y_3}{y_3 + \alpha y_2} \; .$$

Далее,

$$\frac{\partial^2}{\partial y_2 \, \partial y_2} \, f_1(y) = -\frac{2\alpha}{(y_2)^3 y_3} \, (f_1(y))^3 ,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y_2 \partial y_3} \, f_1(y) = \frac{2\alpha}{(y_2)^2 (y_3)^2} \, (f_1(y))^3 ,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y_3 \, \partial y_3} \, f_1(y) = -\frac{2\alpha}{y_2 (y_3)^3} \, (f_1(y))^3 .$$

Из условий неотрицательности и неположительности главных миноров матрицы вторых производных функции f_1 следует [10,11], что функция f_1 выпукла при $\alpha(\alpha y_2 + y_3) < 0$ и вогнута при $\alpha(\alpha y_2 + y_3) > 0$. Следовательно [3], функция (2.1) квазивыпукла на множествах (2.6) и квазивогнута на множествах (2.7). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $b_2^T x = 1$ при всех $x \in X$, то при $\alpha > 0$ и $b_1^T x > 0$, $x \in X$, множество $X_-^o(c, 0)$ является пустым, а множество $X_+^o(c, 0)$ совпадает со всем X . Следовательно, лемму 2.1 можно рассматривать как обобщение утверждения (ii) из п.1°.

ЛЕММА 2.2. Если функция (2.1) удовлетворяет условию

$$a_2 = \alpha b_1, \quad \alpha = 0, \tag{2.9}$$

то эта функция квазивыпукла на множествах

$$X_+^o(b_1, 0) \cap X_+^o(\alpha b_2, 0), \tag{2.10}$$

$$X_-^o(b_1, 0) \cap X_+^o(\alpha b_2, 0) \tag{2.11}$$

и квазивогнута на множествах

$$X_+^o(b_1,0)\cap X_-^o(\alpha b_2,0), \tag{2.12}$$

$$X_-^o(b_1,0)\cap X_+^o(\alpha b_2,0). \tag{2.13}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью преобразования (2.8) функцию (2.I), учитывая (2.9), можно привести к виду

$$f(y)=\frac{f_2(y)}{y_2},$$

где

$$f_2(y)=y_1+\alpha\frac{(y_2)^2}{y_3}.$$

Далее,

$$\frac{\partial^2}{\partial y_2\,\partial y_2}f_2(y)=\frac{2\alpha}{y_3},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y_2\,\partial y_3}f_2(y)=-\frac{2\alpha y_2}{(y_3)^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y_3\,\partial y_3}f_2(y)=\frac{2\alpha(y_2)^2}{(y_3)^3}.$$

Следовательно, функция f_2 выпукла при $\alpha y_3>0$ и вогнута при $\alpha y_3<0$. Итак [3], функция (2.I) квазивыпукла на множествах (2.I0) и (2.II) и квазивогнута на множествах (2.I2) и (2.I3). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Приведенное в п.I^o утверждение (iii) является частным случаем леммы 2.2.

ЛЕММА 2.3. Пусть функция (2.I) удовлетворяет условию (2.9) и, кроме того,

$$a_1=\beta b_2,\quad \beta\neq 0. \tag{2.14}$$

Тогда если $\alpha\beta<0$, то функция (2.I) квазимонотонна на множестве X. Если же $\alpha\beta>0$, то функция (2.I) квазимонотонна на каждом из следующих множеств:

$$\left\{x\in X:\frac{a_1^Tx}{b_1^Tx}\leq-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right\},\quad \left\{x\in X:-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\leq\frac{a_1^Tx}{b_1^Tx}<0\right\}, \tag{2.15}$$

$$\left\{x\in X:0<\frac{a_1^Tx}{b_1^Tx}\leq\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right\},\quad \left\{x\in X:\frac{a_1^Tx}{b_1^Tx}\geq\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что поскольку $b_2^T x \neq 0$, $x \in X$, то в силу (2.14) имеем

$$\frac{a_1^T x}{b_1^T x} \neq 0, \quad x \in X.$$

Кроме того, напомним, что функция (I.I) при $m=1$ квазимонотонна на X.

Далее, функцию (2.I) с учетом (2.9) и (2.14) можно представить в виде

$$F(x) = h\left(\frac{a_1^T x}{b_1^T x}\right),$$

где

$$h(z) = \frac{\alpha}{z} + \beta z, \quad z \neq 0. \tag{2.16}$$

Пусть $\alpha\beta < 0$. Тогда функция (2.16) строго монотонна как при $z > 0$, так и при $z < 0$. Следовательно [3], функция (2.I) квазимонотонна на X.

Пусть $\alpha\beta > 0$. Тогда функция (2.16) строго монотонна на каждом из следующих промежутков:

$$z \leqslant -\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \quad -\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \leqslant z < 0, \quad 0 < z \leqslant \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \quad z \geqslant \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Следовательно, функция (2.I) квазимонотонна на каждом из множеств (2.15). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В приведенном доказательстве используется лишь квазимонотонность функции (I.I) при $m=1$. Следовательно, какова бы ни была квазимонотонная функция

$$G : X \to R, \quad G(x) \neq 0, \quad x \in X,$$

функция

$$H(x) = \frac{\alpha}{G(x)} + \beta G(x),$$

при $\alpha\beta \leqslant 0$ квазимонотонна на множестве X, а при $\alpha\beta > 0$ квазимонотонна на каждом из множеств

$$\left\{x \in X : G(x) \leqslant -\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right\}, \quad \left\{x \in X : -\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \leqslant G(x) < 0\right\},$$

$$\left\{x \in X : 0 < G(x) \leqslant \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right\}, \quad \left\{x \in X : G(x) \geqslant \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right\}.$$

3°. Установим некоторые обобщения леммы 2.2. Рассмотрим функцию

$$\frac{a_1^T x}{b_1^T x} + \frac{a_2^T x}{b_2^T x} + a_3^T x. \qquad (3.1)$$

ЛЕММА 3.1. Пусть выполнено условие (2.9) и, кроме того,

$$a_3 = \beta b_1. \qquad (3.2)$$

Тогда если $\beta \geq 0$, то функция (3.1) квазивыпукла на множестве (2.10) и квазивогнута на множестве (2.13). Если же $\beta \leq 0$, то функция (3.1) квазивыпукла на множестве (2.11) и квазивогнута на множестве (2.12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью преобразования (2.8) функцию (3.1), учитывая (2.9) и (3.2), можно привести к виду

$$f(y) = \frac{f_3(y)}{y_2},$$

где

$$f_3(y) = y_1 + \alpha \frac{(y_2)^2}{y_3} + \beta (y_2)^2.$$

Из доказательства леммы 2.2 следует, что функция f_3 выпукла при $\alpha y_3 > 0$ и $\beta \geq 0$ и вогнута при $\alpha y_3 < 0$ и $\beta \leq 0$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из приведенного доказательства следует, что утверждение леммы можно обобщить на случай, когда в функции (3.1) вместо последнего слагаемого взята любая функция $\beta Q(x)$ такая, что функция $Q(x) b_1^T x$ является выпуклой.

В дальнейшем каждой вещественной функции F, определенной на выпуклом множестве X, сопоставляются следующие множества:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_+(F) &= \{x \in X : F(x) \geq 0\}, \\ \tilde{X}_+^o(F) &= \{x \in X : F(x) > 0\}, \\ \tilde{X}_-(F) &= \{x \in X : F(x) \leq 0\}, \\ \tilde{X}_-^o(F) &= \{x \in X : F(x) < 0\}. \end{aligned} \qquad (3.3)$$

Далее, положим

$$F_0(x) = 4\alpha\beta b_1^T x - \beta^2 (b_2^T x)^2, \quad x \in X. \tag{3.4}$$

ЛЕММА 3.2. Пусть выполнено условие (2.9) и, кроме того,

$$a_3 = \beta b_2. \tag{3.5}$$

Тогда функция (3.I) квазивыпукла на множествах

$$X_+^o(b_1, 0) \cap X_+^o(\alpha b_2, 0) \cap \tilde{X}_+(F_0), \tag{3.6}$$

$$X_-^o(b_1, 0) \cap X_-^o(\alpha b_2, 0) \cap \tilde{X}_+(F_0) \tag{3.7}$$

(см. (I.5) и (3.4)) и квазивогнута на множествах

$$X_+^o(b_1, 0) \cap X_-^o(\alpha b_2, 0) \cap \tilde{X}_+(F_0), \tag{3.8}$$

$$X_-^o(b_1, 0) \cap X_+^o(\alpha b_2, 0) \cap \tilde{X}_+(F_0). \tag{3.9}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью преобразования (2.8) функцию (3.I), учитывая (2.9) и (3.5), можно записать в виде

$$f(y) = \frac{f_4(y)}{y_2},$$

где

$$f_4(y) = y_1 + \alpha \frac{(y_2)^2}{y_3} + \beta y_2 y_3.$$

Далее,

$$\frac{\partial^2}{\partial y_2 \partial y_3} f_4(y) = -\frac{2\alpha y_2}{(y_3)^2} + \beta.$$

Отсюда и из доказательства леммы 2.2 следует, что если

$$4\alpha\beta y_2 - \beta^2 (y_3)^2 \geq 0,$$

то функция f_4 выпукла при $\alpha y_3 > 0$ и вогнута при $\alpha y_3 < 0$. Следовательно, функция (3.I) квазивыпукла на множествах (3.6) и (3.7) и квазивогнута на множествах (3.8) и (3.9). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. При $\beta = 0$ множество $\tilde{X}_+(F_0)$ совпадает со всем X и, следовательно, множества (3.6)-(3.9) совпадают с соответствующими множествами (2.10)-(2.13). Далее, при $\alpha = 0$ и $\beta = 1$ функция (3.I) имеет вид функции (I.4). Однако в этом случае множество $\tilde{X}_+(F_0)$ является пустым.

Перейдем теперь к рассмотрению функций (I.I) при $m = 3$,

т.е. функций вида

$$\frac{a_1^T x}{b_1^T x} + \frac{a_2^T x}{b_2^T x} + \frac{a_3^T x}{b_3^T x}. \qquad (3.10)$$

Введем обозначения:

$$F_1(x) = 4\alpha\beta\, b_1^T x\, b_3^T x - \beta^2 (b_2^T x)^2, \qquad (3.11)$$

$$F_2(x) = b_2^T x\, b_3^T x. \qquad (3.12)$$

ЛЕММА 3.3. Если выполнены условия (2.9) и (3.5), то функция (3.10) квазивыпукла на множествах

$$X_+^0(b_1,0) \cap X_+^0(\alpha b_2,0) \cap \tilde{X}_+(F_1) \cap \tilde{X}_+^0(F_2),$$
$$X_-^0(b_1,0) \cap X_-^0(\alpha b_2,0) \cap \tilde{X}_+(F_1) \cap \tilde{X}_+^0(F_2) \qquad (3.13)$$

(см. (1.5), (3.3), (3.11) и (3.12)) и квазивогнута на множествах

$$X_+^0(b_1,0) \cap X_-^0(\alpha b_2,0) \cap \tilde{X}_+(F_1) \cap \tilde{X}_-^0(F_2),$$
$$X_-^0(b_1,0) \cap X_+^0(\alpha b_2,0) \cap \tilde{X}_+(F_1) \cap \tilde{X}_-^0(F_2). \qquad (3.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая

$$y_1 = a_1^T x, \quad y_{i+1} = b_i^T x, \quad i = 1,2,3, \quad y = (y_1, \dots, y_4),$$

функцию (3.10) с учетом (2.9) и (3.5) можно привести к виду

$$f(y) = \frac{f_5(y)}{y_2},$$

где

$$f_5(y) = y_1 + \alpha \frac{(y_2)^2}{y_3} + \beta \frac{y_2 y_3}{y_4}.$$

Далее,

$$\frac{\partial^2}{\partial y_2 \partial y_3} f_5(y) = -\frac{2\alpha y_2}{(y_3)^2} + \frac{\beta}{y_4}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial y_2 \partial y_4} f_5(y) = -\beta \frac{y_3}{(y_4)^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y_3 \partial y_4} f_5(y) = -\beta \frac{y_2}{(y_4)^2}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial y_4 \partial y_4} f_5(y) = 2\beta \frac{y_2 y_3}{(y_4)^3}.$$

(Остальные элементы матрицы $f_5''(y)$ равны соответсвующим элементам матрицы $f_2''(y)$, фигурирующей в доказательстве леммы 2.2.) Определитель матрицы $f_5''(y)$ и все ее главные миноры третьего порядка тождественно равны нулю. Миноры вто-

рого порядка этой матрицы, отвечающие строкам и столбцам с номерами k и l ($k=\overline{1,4}$, $l=2,3,4$, $k<l$), обозначим через $d_{kl}(y)$. Имеем

$$d_{1i}(y)\equiv 0, \quad i=2,3,4, \quad d_{23}(y)=\frac{1}{(y_3)^2(y_4)^2}\, g(y),$$

$$d_{24}(y)=\frac{1}{(y_4)}\, g(y), \quad d_{34}(y)=\frac{(y_2)^2}{(y_3)^2(y_4)^4}\, g(y),$$

где

$$g(y)=4\alpha\beta y_2 y_4-\beta^2(y_3)^2.$$

Следовательно, для выпуклости или вогнутости функции f_5 необходимо, чтобы

$$g(y)\geqslant 0.$$

Из анализа диагональных элементов матрицы $f_5''(y)$ следует, что выпуклость или вогнутость функции f_5 зависит от знака выражений αy_3 и $\beta y_2 y_3 y_4$. Поэтому функция (3.10) квазивыпукла на множествах (3.13) и квазивогнута на множествах (3.14).

Покажем теперь, что множество $\widetilde{X}_+(F_1)$ является выпуклым. Действительно, если $b_1^T x>0,\ x\in X$, то

$$\widetilde{X}_+(F_1)=\left\{x\in X: 4\alpha\beta b_3^T x-\beta^2\,\frac{(b_2^T x)^2}{b_1^T x}\geqslant 0\right\}.$$

Если же $b_1^T x<0,\ x\in X$, то

$$\widetilde{X}_+(F_1)=\left\{x\in X: 4\alpha\beta b_3^T x-\beta^2\,\frac{(b_2^T x)^2}{b_1^T x}\leqslant 0\right\}.$$

Остается заметить, что функция

$$\frac{(b_2^T x)^2}{b_1^T x}$$

выпукла при $b_1^T x>0$ и вогнута при $b_1^T x<0$ (ср.[12], см. также лемму 4.1). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. При $\alpha=0$ и $\beta=1$ функция (3.10) имеет вид функции (1.1) при $m=2$. Однако при $\alpha=0$ множество $X_+^0(F_1)$ является пустым.

4°. В этом пункте устанавливаются условия квазивыпуклости и квазивогнутости для функций вида

$$\Phi(x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i^T x}{b_i^T x}+\Psi(x)\prod_{i=1}^{m}a_i^T x,\quad x\in X, \tag{4.1}$$

где Ψ - некоторая функция.

Предварительно докажем лемму, представляющую также самостоятельный интерес. Рассмотрим функцию

$$\theta(x)=\theta(x_1,\dots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{(x_i)^{\alpha_i}},\quad x\in X, \tag{4.2}$$

где α_i, $i=\overline{1,n}$, - некоторые целые числа, причем если для всех $x=(x_1,\dots,x_n)\in X$ и некоторого $1\leq i_0\leq n$ выполняется условие

$$x_{i_0}>0,$$

то α_{i_0} может быть произвольным вещественным числом.

ЛЕММА 4.1. Функция (4.2) является выпуклой на множестве $\tilde{X}_+^o(\theta)$ (см. (3.3)) и вогнутой на множестве $\tilde{X}_-^o(\theta)$ в том и только в том случае, если при каждом $s=\overline{1,n}$ и любых натуральных $1\leq i_1<i_2<\dots<i_s\leq n$ имеют место неравенства

$$\left(1+\sum_{k=1}^{s}\alpha_{i_k}\right)\prod_{k=1}^{s}\alpha_{i_k}\geq 0. \tag{4.3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Главные миноры s-го порядка матрицы вторых производных функции (4.2) в точке $x\in X$, отвечающие строкам и столбцам с номерами $i_1,\dots,i_s$, обозначим через $d_{i_1\dots i_s}(x)$. Требуется показать, что при выполнении условий (4.3) имеют место следующие неравенства:

$$d_{i_1\dots i_s}(x)\geq 0,\quad x\in\tilde{X}_+^o(\theta),$$

$$(-1)^s d_{i_1\dots i_s}(x)\geq 0,\quad x\in\tilde{X}_-^o(\theta).$$

Покажем, что интересующие нас миноры представимы в виде

$$d_{i_1\dots i_s}(x)=(\theta(x))^s\left(1+\sum_{k=1}^{s}\alpha_{i_k}\right)\prod_{k=1}^{s}\frac{\alpha_{i_k}}{(x_{i_k})^2}. \tag{4.4}$$

Для этого рассмотрим матрицу $E+T$, где E - единичная матрица порядка s, а

$$T = \begin{Vmatrix} \alpha_{i_1} & \dots & \alpha_{i_s} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i_1} & \dots & \alpha_{i_s} \end{Vmatrix}$$

Нетрудно показать, что

$$d_{i_1 \dots i_s}(x) = (\theta(x))^s \det(E+T) \prod_{k=1}^{s} \frac{\alpha_{i_k}}{(x_{i_k})^2}, \tag{4.5}$$

где $\det(E+T)$ - определитель матрицы $E+T$.

Далее, для матриц

$$V = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \dots & & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ \cdot & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad W = \begin{Vmatrix} \gamma & \alpha_{i_2} & \dots & & \alpha_{i_s} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

порядка s, где

$$\gamma = 1 + \sum_{k=1}^{s} \alpha_{i_k},$$

имеем

$$(E-V)(E+T)(E+V) = W.$$

Следовательно,

$$\det(E+T) = 1 + \sum_{k=1}^{s} \alpha_{i_k}. \tag{4.6}$$

Из (4.5) и (4.6) следует (4.4). Тем самым лемма 4.I доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Функция (4.2) является выпуклой на множестве $\overset{\circ}{X}_-(\theta)$ и вогнутой на множестве $\overset{\circ}{X}_+(\theta)$ в том и только в том случае, если при каждом $s = \overline{1,n}$ и любых натуральных $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq n$ имеют место неравенства

$$(-1)^s \left(1 + \sum_{k=1}^{s} \alpha_{i_k}\right) \prod_{k=1}^{s} \alpha_{i_k} \geq 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ I. Доказанная лемма позволяет сформулировать утверждение, аналогичное лемме 2.2, для функций вида

$$B_1\left(\frac{a_1^T x}{b_1^T x}\right)^{\beta_1}+\sum_{i=2}^{m} B_i\left(\frac{b_1^T x}{b_i^T x}\right)^{\beta_i}+C\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{b_1^T x}{b_i^T x}\right)^{\gamma_i},$$

где B_i, $i=\overline{1,m}$, и C - некоторые вещественные числа, а β_i, γ_i, $i=\overline{1,m}$, - некоторые целые числа.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Аналогично доказательству леммы 4.I можно показать, что главные миноры матрицы вторых производных функции

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{x_i}}, \quad x\in X,$$

отвечающие строкам и столбцам с номерами $i_1,\dots,i_s$, представимы в виде

$$(-1)^{s-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{x_i}\right)^{-2s-1}\left(\prod_{k=1}^{s}\frac{2\alpha_{i_k}}{(x_{i_k})^3}\right)\left(\sum_{k=1}^{s}\frac{\alpha_{i_k}}{x_{i_k}}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{x_i}\right).$$

Это позволяет получить аналог леммы 2.I для функций вида

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\alpha_i a_i^T x}{b_i^T x}, \quad x\in X,$$

при $m\geqslant 3$ и, в частности, при $m=3$.

Для формулировки основного утверждения относительно функции (4.I) введем следующие обозначения:

$$\varphi_i(x)=\frac{a_i^T x}{b_i^T x}, \quad i=\overline{1,m}, \tag{4.7}$$

$$\varphi_{m+1}(x)=\prod_{i=1}^{m} a_i^T x. \tag{4.8}$$

ТЕОРЕМА. I) Если фигурирующая в (4.I) функция ψ является выпуклой на множестве

$$\left(\bigcap_{i=1}^{m}\tilde{X}_+^o(\varphi_i)\right)\cap\tilde{X}_+^o(\varphi_{m+1})\cap\tilde{X}_-(\varphi) \tag{4.9}$$

(см. (3.3), (4.I), (4.7) и (4.8)), то функция (4.I) на этом множестве является квазивыпуклой.

2) Если функция ψ выпукла на множестве

$$\left(\bigcap_{i=1}^{m} \tilde{X}_-^o(\Phi_i)\right) \cap \tilde{X}_-^o(\Phi_{m+1}) \cap \tilde{X}_+(\Phi), \tag{4.10}$$

то функция (4.1) на этом множестве квазивогнута.

3) Если функция Ψ вогнута на множестве

$$\left(\bigcap_{i=1}^{m} \tilde{X}_+^o(\Phi_i)\right) \cap \tilde{X}_-^o(\Phi_{m+1}) \cap \tilde{X}_-(\Phi), \tag{4.11}$$

то функция (4.1) на этом множестве квазивыпукла.

4) Если функция Ψ вогнута на множестве

$$\left(\bigcap_{i=1}^{m} \tilde{X}_-^o(\Phi_i)\right) \cap \tilde{X}_+^o(\Phi_{m+1}) \cap \tilde{X}_+(\Phi), \tag{4.12}$$

то функция (4.1) на этом множестве квазивогнута.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая

$$y_{2i-1} = y_{2i-1}(x) = a_i^T x, \quad y_{2i} = y_{2i}(x) = b_i^T x, \quad i = \overline{1, m}, \tag{4.13}$$

$$y = y(x) = (y_1(x), \ldots, y_{2m}(x)), \qquad x \in X,$$

функцию (4.1) можно переписать в виде

$$\varphi(y) = \sum_{i=1}^{m} \frac{y_{2i-1}}{y_{2i}} + \psi(y) \prod_{i=1}^{m} y_{2i-1},$$

где $\psi(y(x)) = \Psi(x)$, $x \in X$. Имеем

$$\varphi(y) = \frac{\varphi_1(y)}{\varphi_2(y)}, \tag{4.14}$$

где

$$\varphi_1(y) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{y_{2i-1}}{y_{2i}} \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{y_{2j-1}} \right) + \psi(y),$$

$$\varphi_2(y) = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{y_{2i-1}}.$$

Образ множества (4.9) при преобразовании (4.13) обозначим через Y_1. Тогда из леммы 4.1 следует, что если функция Ψ выпукла на множестве (4.9), то на множестве Y_1 функция φ_1 выпукла и неположительна. Кроме того, функция φ_2 на множестве Y_1 выпукла и положительна. Следовательно [3], функция

(4.I) квазивыпукла на множестве (4.9).

Аналогично показывается, что в условиях теоремы функция (4.I) квазивыпукла на множестве (4.II) и квазивогнута на множествах (4.I0) и (4.I2).

Остается проверить, что множества (4.9)-(4.I2) являются выпуклыми. Покажем, например, выпуклость множества (4.9). В силу (4.I4) это множество совпадает с множеством

$$\left(\bigcap_{i=1}^{m} \tilde{X}^{o}_{+}(\varphi_i)\right) \cap \tilde{X}^{o}_{+}(\varphi_{m+1}) \cap \tilde{X}_{-}(\varphi_0), \tag{4.I5}$$

где

$$\varphi_0(x) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{a_i^T x}{b_i^T x} \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{a_j^T x} \right) + \psi(x), \quad x \in X,$$

Выпуклость множества (4.I5) непосредственно следует из леммы 4.I. Теорема доказана.

В заключение отметим, что все полученные в этой статье результаты можно обобщить на случай, когда вместо функций $a_i^T x$ и $b_i^T x$, $i=\overline{1,m}$, взяты произвольные выпуклые или вогнутые функции (ср. [I3] и [I4]).

Автор благодарит Г.Ш.Рубинштейна за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

I. SCHAIBLE S. Fractional programming. - Z. Oper. Res., I983, Bd.27, NI, s.39-54.

2. ВЕРТГЕЙМ Б.А., РУБИНШТЕЙН Г.Ш. К определению квазивыпуклых функций. - В кн.: Математическое программирование. М., I966, с.I2I-I34.

3. MARTOS B. Nonlinear programming theory and methods. - Budapest: Academiai Kiado, I975.

4. SCHAIBLE S. A note on the sum of linear and linear-fractional function. - Nav. Res. Logist Quart., I977, v.24, N 4, pp.69I-693.

5. ТЕТЕРЕВ А.Г. Об одном обобщении линейного и дробно-линейного программирования. - Экономика и мат. методы, I969, т.5, с. 440-447.

6. HIRCHE J. Zur Exstremwertannahme und Dualitat bei Optimierungsproblemen mit linearem und gebrochen linearem Zielfunktionsantiel. - Z. Angew. Math. und Mech., I975, Bd. 55, Nr.3, s.I84-I85.

7. HIRCHE J. On programming problems with a linear-plus-linear-fractional objective function. - Cah. Cent.Etud. Rech. Oper., 1984, v.26, N 1-2, pp.59-64.
8. КРУПИЦКИЙ А.Е. Минимизация суммы двух дробно-линейных функций на выпуклом многогранном множестве. - Вестник ЛГУ, 1983, № 23, с.15-21.
9. CHARNES A., COOPER W.W. Programming with linear fractional functionals. - Nav. Res. Logist. Quart., 1962, v.9, N 3-4, pp.181-186.
10. ГАНТМАХЕР Ф.Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1967.
11. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. - М.: Мир, 1973.
12. BECTOR C.R. Programming problems with convex fractional functions. - Oper. Res., 1968, v.16, N 2, pp.383-391.
13. SCHAIBLE S. Simultanious optimization of absolute and relative terms. - Z. Angew. Math. und Mech., 1984, Bd.64, N 8, s.363-364.
14. HIRCHE J. Some remarks on generalized convexity of sums and products. - Z. Angew. Math. und Mech., 1985, Bd. 65, N N 1, s.62-63.

Поступила в ред.изд. отдел
04.06.1986 г.