Выпуск 39(56) ОПТИМИЗАЦИЯ 1986 г.

Выпуклый анализ и смежные вопросы

УДК 513.82

МИНИМИЗАЦИЯ КОЛИЧЕСТВА БУЛЕВЫХ И ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ПРИ ЗАДАНИИ МНОГОГРАННЫХ МНОЖЕСТВ

М.А.Нудельман

Под многогранным множеством в работе понимается множество $A \subset R^s$, представимое в виде

$$A = \bigcup_{j=1}^{J} A_j ,$$

где $A_j = \{x \in R^s \mid D_j x \leq b_j\}$, $j = 1, 2, \dots, J$, - некоторые компактные выпуклые многогранники. Каждое такое множество, очевидно, совпадает с проекцией на R^s множества $\tilde{A} \subset R^s \oplus R^J$, состоящего из точек

$$\tilde{x} = (x, t) = (x_1, \dots, x_s, t_1, \dots, t_J),$$

удовлетворяющих условиям

$$t_j \in \{0, 1\}, \quad j = \overline{1, J}, \quad \sum_{j=1}^{J} t_j = 1,$$

$$D_j x \leq b_j + t_j b'_j, \quad j = \overline{1, J},$$

где в качестве b'_j принимаются векторы с достаточно большими компонентами. Существование таких векторов следует из предполагаемой компактности соответствующих выпуклых многогранников.

Таким образом, каждое многогранное множество A может быть задано одной системой линейных неравенств, в которой число булевых переменных не превосходит минимального числа $N(A)$ выпуклых многогранников, объединение которых совпадает с A.

В §I устанавливается, что минимальное количество $m(A)$ булевых переменных, необходимых для задания рассматриваемого многогранного множества A, следующим образом связано с $N(A)$:

$$m(A) = -\mathrm{entier}\,(-\log_2 N(A)).$$

В § 2 исследуется класс часто встречающихся в приложениях многогранных множеств, обозначаемых через L_n. Для них в явном виде строятся определяющие их системы неравенств, содержащие $m(L_n)$ булевых переменных, а также доказывается, что они не могут быть заданы системами линейных неравенств, содержащих меньшее число произвольных целочисленных переменных.

§ I. Общий случай

Пусть

$$Dy \leq b \tag{I}$$

– система с булевыми переменными; $y = col(x,t)$, где $x \in R^s$, $t \in \{0,1\}^k$. Наряду с (I) рассмотрим систему

$$Dy' \leq b, \tag{2}$$

где $y' = col(x,t') \in R^s \oplus R^k \stackrel{Df}{=} R_1 \oplus R_2$ и определяемый ею многогранник обозначим через B.

Обозначим через P_i $(i=1,2)$ ортопроектор $R_1 \oplus R_2$ на R_i и положим

$$C = P_2(B).$$

Пусть h_j $(j=\overline{1,J})$ – все булевы точки множества C. Легко видеть, что система (I) задает множество

$$\bigcup_{j=1}^{J} P_1(P_2^{-1}(h_j) \cap B). \tag{3}$$

ТЕОРЕМА I. *Минимальное количество $m(A)$ булевых переменных, необходимых для задания многогранного множества A, равно*

$$m(A) = -\mathrm{entier}\,(-\log_2 N(A)),$$

где $N(A)$ – наименьшее количество компактных выпуклых многогранников, на которые можно разбить множество A.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Убедимся сначала, что существует система линейных неравенств, содержащая $-\mathrm{entier}\,(-\log_2 N(A))$ булевых переменных и задающая множество A.

Пусть $A=\bigcup_{j=1}^{N(A)} A_j$, где A_j - компактные выпуклые многогранники. Положим $k=-\mathrm{entier}(-\log_2 N(A))$.

Пусть $c_j\ (j=\overline{1,N(A)})$ - двоичное представление числа $j-1$. Так как $2^k \geq N(A)$, то количество двоичных разрядов в этом представлении не превышает k. Дописав, если потребуется, слева нули к c_j, получим k-разрядный двоичный набор, который обозначим через q_j.

Положим

$$\tilde{A}_j=\{(x,q_j)\,|\,x\in A_j\},\quad B=\mathrm{conv}\bigcup_{j=1}^{N(A)}\tilde{A}_j.$$

Множество B есть замкнутый выпуклый многогранник в пространстве $R_1\oplus R_2$ (замкнутость вытекает из компактности множеств A_j). Его можно задать системой линейных неравенств относительно переменных x, t'. В этой системе заменим вещественные переменные t' булевыми переменными t (ср. системы (I) и (2)).

Так как $P_2(B)=\mathrm{conv}(q_1,\ldots,q_{N(A)})$, то полученная система задает множество

$$\bigcup_{j=1}^{N(A)} P_1(P_2^{-1}(q_j)\cap B)$$

(см. (3)). Докажем, что оно совпадает с A. Для этого достаточно доказать, что

$$P_2^{-1}(q_j)\cap B=\tilde{A}_j,\quad j=\overline{1,N(A)}. \tag{4}$$

Очевидно, $P_2^{-1}(q_j)\cap B\supseteq\tilde{A}_j$. Пусть теперь $a\in P_2^{-1}(q_j)\cap B$. Поскольку $a\in B=\mathrm{conv}\bigcup_{n=1}^{N(A)}\tilde{A}_n$, то

$$a=\sum_{n=1}^{N(A)}\alpha_n a_n, \tag{5}$$

где $a_n\in\tilde{A}_n$, $\alpha_n\geq 0$, $\sum_{n=1}^{N(A)}\alpha_n=1$. Проектируя (5) на R_2, получим

$$q_j=\sum_{n=1}^{N(A)}\alpha_n q_n. \tag{6}$$

Ввиду того, что q_n - вершины единичного куба, из (6) следует $\alpha_n=\delta_{nj}$ (символ Кронекера). Поэтому $a=a_j\in\tilde{A}_j$, т.е. $P_2^{-1}(q_j)\cap B\subset\tilde{A}_j$, и (4) доказано.

Тем самым доказано существование системы линейных неравенств, содержащей $k=-\mathrm{entier}(-\log_2 N(A))$ булевых переменных и задающей A. Таким образом, $m(A) \leq k$.

Докажем теперь, что ни для какого $m < k$ не существует системы линейных неравенств, задающей A и содержащей m булевых переменных.

Допустим противное: пусть такая система существует. Перебирая все 2^m комбинаций булевых переменных, получим разбиение множества A в объединение J выпуклых многогранников, где $J \leq 2^m$, что противоречит минимальности $N(A)$. Теорема доказана.

Аналогичные рассуждения показывают, что для минимального количества $\ell(A)$ целочисленных переменных, необходимых для задания A, имеет место оценка

$$\ell(A) \leq -entier\ (-\log_2 N(A)),$$

т.е. оценка

$$\ell(A) \leq m(A). \tag{7}$$

§ 2. Частный случай

В этом параграфе переменные x_j предполагаются неотрицательными.

Обозначим через L_n многогранное множество в пространстве R^n, представляющее собой объединение отрезков $[0, M_j]$ координатных осей этого пространства ($M_j > 0,\ j = \overline{1,n}$). Без ограничения общности можно считать, что все числа M_j равны единице.

Ясно, что $N(L_n) = n$, так что $m(L_n) = -entier(\log_2 n)$. Далее вместо $m(L_n)$ будем писать k.

Через $q_j(i)$ обозначим i-ю цифру набора q_j (см. §I) и положим

$$E_i = \{ j \in \{1, \ldots, n\} \mid q_j(i) = 1 \},$$

$$N_i = \{ j \in \{1, \ldots, n\} \mid q_j(i) = 0 \}.$$

ТЕОРЕМА 2. Множество решений системы линейных неравенств

$$\begin{aligned} &\sum_{j \in E_i} x_j \leq t_i, \quad i = \overline{1,k}; \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t_i \in \{0,1\}, \\ &\sum_{j \in N_j} x_j \leq 1 - t_i, \quad i = \overline{1,k}; \end{aligned} \tag{8}$$

совпадает с множеством L_n.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим множество решений системы (8) через L'_n и докажем равенство $L'_n = L_n$. Сначала покажем, что $L'_n \subset L_n$.

Пусть $y=(x_1,\dots,x_n; t_1,\dots,t_k)$ удовлетворяет системе (8). Рассмотрим случаи.

1) Набор значений $(t_1,\dots,t_k)$ совпадает с одним из наборов q_j, $j=\overline{1,n}$. Обозначим его через q_{j_0}. Утверждается, что среди значений переменных x_j все значения, кроме x_{j_0}, равны 0.

Действительно, пусть $j \neq j_0$. Тогда $q_j \neq q_{j_0}$. Это возможно в одном из двух случаев.

1.1. Для некоторого i_0 имеем $q_j(i_0)=1$, $q_{j_0}(i_0)=0$. Тогда $t_{i_0}=0$ и $j \in E_{i_0}$. Из неравенства $\sum_{\ell\in E_{i_0}} x_\ell \leqslant t_{i_0}$, получаем, что $x_j=0$.

1.2. Для некоторого i_0 имеем $q_j(i_0)=0$, $q_{j_0}(i_0)=1$. Тогда $j=N_{i_0}$, $t_{i_0}=1$. Из неравенства $\sum_{\ell\in N_{i_0}} x_\ell \leqslant 1-t_{i_0}$ следует, что $x_j=0$.

2) Набор значений переменных t_i не содержится среди наборов q_j, $j=\overline{1,n}$. Тогда, повторяя рассуждения случая 1), устанавливаем, что $x_j=0$, $j=\overline{1,n}$.

В обоих случаях 1) и 2) точка $(x_1,\dots,x_n)\in L_n$. Таким образом, включение $L'_n \subset L_n$ доказано.

Докажем обратное включение. Пусть $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)\in L_n$, причем $x_j=0$ при $j\neq j_0$. Придадим переменным t_i значения, которые являются элементами набора q_{j_0}. Те неравенства системы (8), в которых не участвует переменная x_{j_0}, выполнены для точки x^0 автоматически, поскольку все остальные переменные x_j в этой точке равны 0.

Рассмотрим неравенство вида

$$\sum_{j\in E_i} x_j \leqslant t_i, \tag{9}$$

причем E_i содержит j_0. Тогда $t_i=1$ и (9) принимает вид

$$\sum_{j\in E_i} x_j \leqslant 1.$$

Поскольку все x_j^0 при $j\neq j_0$ равны 0 и $x_{j_0}^0 \leqslant 1$, то неравенство (9) выполнено для точки x^0. Аналогично рассматривается случай, когда неравенство имеет вид

$$\sum_{j\in N_i} x_j \leq 1 - t_i .$$

Таким образом, при выбранном наборе переменных t_i точка x° удовлетворяет всем неравенствам системы (8). Следовательно, $L_n' \subset L_n$. Теорема доказана.

Напомним, что через $l(A)$ обозначается наименьшее количество целочисленных переменных, необходимых для задания многогранного множества A.

ТЕОРЕМА 3. Справедлива формула

$$l(L_n) = m(L_n).$$

Доказательство основано на следующей лемме.

ЛЕММА. Если в пространстве R^k заданы n целочисленных точек, причем $n > 2^k$, то среди них найдутся две такие точки, что середина соединяющего их отрезка есть целочисленная точка.

Доказательство леммы известно, приведем его для полноты изложения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Каждой из n точек поставим в соответствие k-значный двоичный набор по следующему правилу: если значение какой-либо координаты этой точки четно, то на место этой координаты ставим нуль, а если нечетно, то единицу. Поскольку $n > 2^k$, то среди этих наборов найдутся совпадающие. У отвечающих им точек соответствующие координаты имеют одинаковую четность и, таким образом, середина соединяющего их отрезка есть целочисленная точка. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. В силу (7) $l(L_n) \leq m(L_n)$.

Докажем обратное неравенство. Допустим, что существует система линейных неравенств, задающая L_n и содержащая k' вспомогательных целочисленных переменных $t_1, \dots, t_{k'}$, причем $k' < -\mathrm{entier}(-\log_2 n)$, т.е. $n > 2^{k'}$. Так же, как в начале §I, заменим целочисленные переменные вещественными. Пусть $B \subset R_1 \oplus R_2$ есть множество решений получившейся системы неравенств, $C = P_2(B)$, где P_2 - ортопроектор $R_1 \oplus R_2$ на R_2. Пусть h_j, $j = \overline{1,J}$, - все целочисленные точки множества C. Для каждой из них имеем

$$\dim (P_2^{-1}(h_j) \cap B) \leqslant 1, \tag{10}$$

так как $P_2(P_2^{-1}(h_j) \cap B) = h_j = const$, а $P_1(P_2^{-1}(h_j) \cap B)$ есть подмножество одной из координатных осей. При этом для каждой из n координатных осей должна найтись точка h_j такая, что

$$\dim (P_2^{-1}(h_j) \cap B) = 1,$$

и $P_1(P_2^{-1}(h_j) \cap B)$ есть подмножество этой оси.

В силу леммы, среди точек h_j найдутся две точки (пусть это h_1 и h_2) такие, что $(h_1 + h_2)/2$ есть h_j при некотором j. Пусть

$$P_2^{-1}(h_1) \cap B = ([a, b], 0, \ldots, 0, h_1),$$

$$P_2^{-1}(h_2) \cap B = (0, [c, d], \ldots, 0, h_2).$$

В силу выпуклости множества B, $P_2^{-1}((h_1 + h_2)/2) \cap B \supset \supset ([a/2, b/2], [c/2, d/2], \ldots, 0, (h_1 + h_2)/2)$, что противоречит (10). Теорема доказана.

Поступила в ред.-изд. отдел
18.01.1986 г.