Выпуск 39(56) ОПТИМИЗАЦИЯ 1986 г.

Численные методы

УДК 519.61

О ПОИСКЕ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК НА СТАНДАРТНОМ СИМПЛЕКСЕ

В.Г.Дудник

В статье предлагается модификация метода симплициальных разбиений, описанного в [1], для поиска неподвижных точек непрерывных отображений стандартного симплекса $S=\{x\in R_+^n : \sum_{i=1}^{n} x_i=1\}$ в себя. Модифицированный алгоритм может начинать работу в любой точке $x\in S$ и сколь угодно близко приближать неподвижную точку.

1. Как и в [1], введем некоторые вспомогательные функции. При всяком $x\in R_+^n$ положим $\varphi_0(x)=1$ и $\varphi_n(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i$. Для остальных $i=1,2,\ldots,n-1$ примем $\varphi_i(x)=x_{i+1}/\varphi_n(x)$, если $x\in R_+^n\setminus\{0\}$ и $\varphi_i(0)=0$. Понадобится также функция целочисленной нумерации $L: R_+^n\to\{0,1,\ldots,n-1\}$, определяемая равенством $L(x)=\max\limits_{i=0,1,\ldots,n-1}\{i:\varphi_i(x)>0,\ \varphi_i(g(x))<\varphi_i(x)\}$. Здесь g - некоторое непрерывное отображение положительного ортанта в себя. Таким образом, каждому отображению g соответствует своя функция нумерации.

Ниже, помимо триангуляции $H_1(R_+^n)$ множества R_+^n, описанной в [1], будет использоваться специальный симплициальный комплекс $H_1(S)$ с вершинами из множества S.

Как обычно, q-мерный симплекс $\sigma=(y^0y^1\ldots y^q)$ с вершинами $y^0,y^1,\ldots,y^q$ будет называться полнонумерованным, если среди меток вершин $y^0,y^1,\ldots,y^q$ встречаются все числа от 0 до q, и почти полнонумерованным, если среди меток вершин $y^0,y^1,\ldots,y^q$ встречаются все числа от 0 до $q-1$, но не встречается число q. Таким образом в почти полнонумерованном симплексе ровно две вершины имеют одинаковые метки.

Зафиксируем некоторое непрерывное отображение $f: S \to S$. Построим алгоритм, который мог бы начинать работу в любой, наперед заданной точке множества S и сколь угодно близко приближать неподвижную точку отображения f.

Иногда бывает известно, где примерно находится неподвижная точка. Пусть задана точка $b \in S$ и число $\gamma > 0$, и согласно предварительным сведениям неподвижная точка отображения f находится в γ-окрестности точки b. Найдем целое число $t \sim 1/\gamma$. Через $\tilde{b}$ обозначим точку пересечения множества $S^t = \{x \in R_+^n : \sum_{i=1}^n x_i = t\}$ и луча, проходящего через точку b. В пространстве R_+^n существует кубик K с ребрами длины I, параллельными осям координат, и такой, что $\tilde{b} \in K$ и $K \cap S^{t-1} \neq \emptyset$. Обозначим через a произвольную вершину кубика K, лежащую в симплексе S^{t-1}.

Нам понадобится вспомогательное отображение h, положительного ортанта в себя, задаваемое равенством

$$h(x) = a, \text{ если } \sum_{i=1}^n x_i \in [0, t]; \quad h(x) = \sum_{i=1}^n x_i f\left(\frac{x}{\sum_{i=1}^n x_i}\right),$$

если $\sum_{i=1}^n x_i \geq t+1$ и

$$h(x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i - t\right) \sum_{i=1}^n x_i \cdot f\left(\frac{x}{\sum_{i=1}^n x_i}\right) + \left(\sum_{i=1}^n x_i - t + 1\right) a$$

для $\sum_{i=1}^n x_i \in (t, t+1)$.

Построим алгоритм, ищущий "собственный вектор" отображения h, а затем покажем, как с помощью этого алгоритма решать исходную задачу.

Понадобятся некоторые дополнительные построения. Возьмем произвольное отображение $g: R_+^n \to R_+^n$, разбиение $H_1(R_+^n)$ множества R_+^n, нумерацию L. Рассмотрим симплекс $\sigma_0 = k_1(y^0, \pi)$, где $y^0 = e^1$ – первый единичный вектор в R^n, π - перестановка $(12 \ldots n)$, а $k_1(y^0, \pi)$ – краткое обозначение симплекса $\sigma_0 = (y^0 y^1 \ldots y^n)$ с вершинами y^0 и $y^i = y^{i-1} + P^{\pi(i)}$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. Здесь P^k – k-й столбец n-мерной квадратной матрицы

$$P = \begin{bmatrix} -1 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Заметим, что σ_0 - почти полнонумерованный симплекс, так как $\bar{L}(y^i) = i$ при $i = 0, 1, \ldots, n-1$ и $\bar{L}(y^n) = \bar{L}(0) = 0$. Причем σ_0 имеет в качестве одной из своих $(n-1)$ -мерных граней полнонумерованный симплекс $\tau = (y^1 y^2 \ldots y^n)$.

ЛЕММА 1. Для непрерывного отображения $g: R_+^n \to R_+^n$, соответствующей ему нумерации $\bar{L}$ и разбиения $H_1(R_+^n)$ симплекс $\tau = (y^1 \cdot y^2 \ldots y^n)$ является единственным $(n-1)$ -мерным полнонумерованным симплексом, принадлежащим $Fr\, R_+^n$ (границе множества R_+^n).

Для доказательства достаточно повторить часть доказательства теоремы 1 из [1] с учетом замены нумерации L, используемой там, на $\bar{L}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Одним из свойств триангуляции $H_1(R_+^n)$ является то, что σ_0 - единственный n -мерный симплекс из $H_1(R_+^n)$, имеющий полнонумерованный симплекс τ своей гранью.

В [1] неподвижная точка непрерывного отображения ищется с помощью алгоритма Куна. Приведем этот алгоритм в удобном для нас виде.

Алгоритм Куна.

ШАГ 0. $y^- = y^n$, $k = 0$.

ШАГ 1. Находим симплекс σ_{k+1}, имеющий одинаковые с симплексом σ_k вершины, за исключением y^-. И пусть y^+ - вершина симплекса σ_{k+1}, не являющаяся вершиной симплекса σ_k. Полагаем $k = k+1$.

ШАГ 2. Существует единственная вершина y^- симплекса σ_k, для которой $\bar{L}(y^-) = \bar{L}(y^+)$. Идем на шаг 1.

Переход по смежным симплексам, осуществляемый на шаге 1, проходит в соответствии со следующей таблицей. Пусть требуется перейти от симплекса $\sigma = h_1(y^0; \pi) = (y^0 \cdot y^1 \cdots y^n)$ к $\sigma_1 = h_1(z^0, \rho)$, отбросив вершину $y^- = y^i$.

Таблица переходов

	z^0	ρ
$i=0$	$y^0+\rho^{\pi(1)}$	$(\pi(2)\dots\pi(n)\ \pi(1))$
$0<i<n$	y^0	$(\pi(1)\dots\pi(i+1)\pi(i)\dots\pi(n))$
$i=n$	$y^0-\rho^{\pi(n)}$	$(\pi(n)\pi(1)\dots\pi(n-1))$

Алгоритм Куна, примененный к произвольному непрерывному отображению $g: R_+^n \to R_+^n$, порождает некоторую последовательность почти полнонумерованных симплексов $\sigma_0, \sigma_1, \dots$ Согласно лемме I и следующему за леммой замечанию эта последовательность не выходит за пределы положительного ортанта. Иначе существовал бы еще один, отличный от τ, $(n-1)$-мерный граничный полнонумерованный симплекс τ', являющийся общей гранью некоторых n-мерных почти полнонумерованных симплексов σ_i и σ_{i+1}, принадлежащих построенной последовательности. Этот путь из симплексов не имеет циклов, так как у всякого симплекса, принадлежащего последовательности, существует только один, предшествующий ему (у σ_0 вообще нет предшествующего). Поэтому для всякого $\alpha>0$ существует индекс $k\in\{0,1,\dots\}$, при котором $\sigma_k \cap S^\alpha \neq \emptyset$. Здесь и дальше будем обозначать через S^α симплекс $\{x\in R_+^n : \sum_{i=1}^n x_i=\alpha\}$, а через N - множество натуральных чисел вместе с нулем.

ЛЕММА 2. Пусть задано непрерывное отображение $g: R_+^n \to R_+^n$, соответствующая ему нумерация L, разбиение $H_1(R_+^n)$ и построена последовательность $\{\sigma_k\}_{k\in N}$, порожденная алгоритмом Куна. Тогда для любого целого числа $\alpha\geqslant 1$ существуют по крайней мере два индекса $k(\alpha), k(\alpha)+1\in N$ таких, что n вершин симплекса $\sigma_{k(\alpha)}$ и n вершин симплекса $\sigma_{k(\alpha)+1}$ лежат в S^α.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению триангуляции $H_1(R_+^n)$ для любого симплекса $\sigma=(z^0, z^1 \dots z^n)$ из $H_1(R_+^n)$ вершина $z^0\in H_1^0$ (H_1^0 - целочисленная решетка множества R_+^n), а

$$x^i = x^{i-1} + P^{\pi(i)} \qquad \text{для} \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (2)$$

где π - некоторая перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$. Для симплекса $\sigma = (x^0, x^1, \ldots, x^n)$ из соотношений (2) и вида матрицы P, задаваемой равенством (I), следует, что существуют только два множества типа S^α (например, S^α и $S^{\alpha-1}$), которым могут принадлежать вершины симплекса σ. Здесь $\alpha \geq 1$ - целое число. И путь из почти полнонумерованных симплексов тогда и только тогда пересечет множество S^α, когда для некоторой пары индексов $k(\alpha)$, $k(\alpha)+1 \in N$, вершины симплекса $\sigma_{k(\alpha)+1}$ лежат либо в S^α, либо в $S^{\alpha+1}$, а вершины симплекса $\sigma_{k(\alpha)}$ лежат либо в $S^{\alpha-1}$, либо в S^α, т.е. $\sigma_{k(\alpha)+1}$ - первый симплекс из последовательности $\{\sigma_k\}_{k \in N}$, вершины которого принадлежат множеству $\{x \in R_+^n : \sum_{i=1}^n x_i \geq \alpha\}$, в то время как вершины симплекса $\sigma_{k(\alpha)}$ принадлежат множеству $\{x \in R_+^n : \sum_{i=1}^n x_i \leq \alpha\}$. Но $\sigma_{k(\alpha)}$ и $\sigma_{k(\alpha)+1}$ следуют друг за другом, т.е. они смежные. Значит, их общая грань, содержащая n общих вершин, принадлежит множеству S^α. Лемма доказана.

Вернемся к отображению h, точке a и числу t, построенным для исходного отображения $f : S \to S$. Зафиксируем симплекс $\bar{\sigma}_0 = h_1(y^0, \pi)$, где $y^0 = a + l^1$, а π - перестановка $(12 \ldots n)$.

ТЕОРЕМА. Пусть дано отображение h, определенное выше, соответствующая ему нумерация $\bar{L}$ и триангуляция $H_1(R_+^n)$. Построена бесконечная последовательность $\{\sigma_k\}_{k \in N}$ почти полнонумерованных симплексов, порожденная алгоритмом Куна для отображения h. Тогда существует индекс $m \in N$ такой, что $\sigma_m = \bar{\sigma}_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что при $\sum_{i=1}^n x_i < t = \sum_{i=1}^n a_i + 1$ отображение $h(x) = a$.

Симплекс $\bar{\sigma}_0 = h_1(a + l^1, \pi)$ имеет вершины $y^0, y^1, \ldots, y^n$, где $y^0 = a + l^1, y^1 = a + l^2, \ldots, y^{n-1} = a + l^n, y^n = a$. Для вершины y^{n-1} имеем

$$\varphi_{n-1}(y^{n-1}) = \frac{a_n+1}{t} \geqslant \frac{a_n}{t-1} = \varphi_{n-1}(h(y^{n-1})).$$

А так как $a_n+1>0$, то $L(y^{n-1})=n-1$. Кроме того, для любого $j=0,1,\ldots,n-2$

$$\varphi_{n-1}(h(y^j)) = \frac{a_n}{t-1} > \frac{a_n}{t} = \varphi_{n-1}(y^j)$$

либо $a_n=0$, поэтому $L(y^j)\neq n-1$ при $j=0,1,\ldots,n-2$.

Для вершины y^{n-2} имеем

$$\varphi_{n-2}(y^{n-2}) = \frac{a_{n-1}+1}{t} \geqslant \frac{a_{n-1}}{t-1} = \varphi_{n-2}(h(y^{n-2})).$$

А так как $a_{n-1}+1>0$, то $L(y^{n-2})=n-2$. Кроме того, для любого $j=0,1,\ldots,n-3$ будет $\varphi_{n-2}(h(y^j)) = \frac{a_{n-1}}{t-1} >$ $> \frac{a_{n-1}}{t} = \varphi_{n-2}(y^j)$ либо $a_{n-1}=0$, поэтому $L(y^j)\neq n-2$ при $j=0,1,\ldots,n-3$.

Аналогично показывается, что $L(y^j)=j$ для $j=n-3,n-4,\ldots,1$.

При любом $i=1,2,\ldots,n-1$

$$\varphi_i(h(y^0)) = \frac{a_{i+1}}{t-1} > \frac{a_{i+1}}{t} = \varphi_i(y^0)$$

либо $a_{i+1}=0$, поэтому $L(y^0)=0$.

Для вершины y^n метка определяется из соотношения

$$L(y^n) = \max_{i=0,1,\ldots,n-1} \{i : a_{i+1}>0\}.$$

Следовательно, $\bar{\sigma}_0$ - почти полнонумерованный симплекс.

Обозначим через $\bar{\tau}_0$ $(n-1)$- мерный полнонумерованный симплекс $(y^0 \cdot y^1 \ldots y^{n-1}) \subset S^t$. Покажем, что $\bar{\tau}_0$ - единственный $(n-1)$ -мерный полнонумерованный симплекс, являющийся гранью некоторого n-мерного симплекса σ' из $H_1(R^n_+)$ и принадлежащий множеству S^t .

Рассмотрим произвольный $(n-1)$ -мерный симплекс τ , являющийся гранью некоторого n-мерного симплекса σ'' из $H_1(R^n_+)$ и принадлежащий S^t . Совокупность симплексов $H_1(R^n_+)$ - триангуляция. Поэтому $\mathrm{int}\,\tau \cap \mathrm{int}\,\bar{\tau}_0 = \emptyset$, так как $\dim \tau =$ $= \dim \bar{\tau}_0$. А значит, $\tau \cap \bar{\tau}_0$ равно либо их общей грани, либо пустому множеству. Симплекс τ можно представить в виде $\tau = h_1(\omega^0, \rho) = (\omega^0 \cdot \omega^1 \ldots \omega^{n-1})$, где $\omega^0 \in H_1^0 \cap S^t$, а ρ - перестановка чисел $1, 2, \ldots, n-1$. Индекс $n \notin \rho$, так как в этом случае τ не будет принадлежать S^t (это следует из вида матрицы P).

Введем вспомогательные множества $T_i = \{x \in S^t : x_{i+1} \leq \alpha_{i+1}\}$ для $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Заметим, что $\bigcup_{i=0}^{n-1} T_i \cup \{\bar{\tau}_0\} = S^t$. Значит, существует индекс $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, для которого $\mathrm{int}\,\tau \cap T_i \neq \emptyset$. По виду первых $n-1$ столбцов матрицы P, если $\tau \not\subset \mathrm{int}\,T_i$, то для любого $j = 0, 1, \ldots, n-1$ координата ω^j_{i+1} равна либо α_{i+1}, либо $\alpha_{i+1} - 1$, т.е. $\tau \subset T_i$. Рассмотрим подробнее множества T_i при $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Для любого $x \in T_i$ имеет место неравенство

$$\varphi_i(h(x)) = \frac{\alpha_{i+1}}{t-1} \geq \frac{\alpha_{i+1}}{t} \geq \frac{x_{i+1}}{t} = \varphi_i(x).$$

Равенство здесь возможно тогда и только тогда, когда $\alpha_{i+1} = 0$. А значит, для всякого $x \in T_i$ метка $L(x) \neq i$. Для существования точки $x \in T_0$ такой, что $L(x) = 0$, требуется, чтобы выполнялись неравенства $\varphi_i(h(x)) > \varphi_i(x)$ при $i = 1, 2, \ldots, n-1$ либо $\varphi_i(x) = \varphi_i(h(x)) = 0$, т.е. $\frac{\alpha_{i+1}}{t-1} > \frac{x_{i+1}}{t}$ для $i = 1, 2, \ldots, n-1$ либо $\alpha_{i+1} = x_{i+1} = 0$. Но по условию $x \in T_0$, если $x_1 \leq \alpha_1$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{t} < \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{t-1} = 1.$$

Отсюда $\sum_{i=1}^{n} x_i < t$ либо $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, но $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$, т.е. $t = x_1 \leq \alpha_1 \leq t-1$. Противоречие с тем, что $x \in T_0 \subset S^t$.

Симплекс τ содержится в некотором множестве T_i, но для всякого $x \in T_i$ метка $L(x) \neq i$ при $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Следовательно, τ не полнонумерованный симплекс.

Таким образом, единственность $(n-1)$-мерного полнонумерованного симплекса $\bar{\tau}_0$ в S^t доказана.

Как было показано перед леммой 2, для любого $\alpha > 0$ существует индекс $k \in N$, при котором $\sigma_k \cap S^\alpha \neq \emptyset$. Здесь σ_k - почти полнонумерованный симплекс, порожденный алгоритмом Куна для отображения h. И по лемме 2 существуют

$m, m+1 \in N$, для которых $\sigma_m \cap \sigma_{m+1} = \bar{\tau}_0 \subset S^t$. А в силу единственности $(n-1)$-мерного полнонумерованного симплекса $\bar{\tau}_0$ в S^t последовательность $\{\sigma_k\}_{k\in N}$ больше нигде не пересечет множества S^t . Полагаем $\sigma_m = \bar{\sigma}_0$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В дополнение к теореме можно утверждать, что, начиная работу алгоритма Куна с симплекса $\bar{\sigma}_0$, будет построен бесконечный путь по почти полнонумерованным симплексам, не пересекающий множества S^t (если не считать перехода от $\bar{\sigma}_0$ к следующему за ним симплексу этого пути) и пересекающий любое множество вида S^α для всякого $\alpha > t$. Это следует из той же единственности $(n-1)$-мерного полнонумерованного симплекса $\bar{\tau}_0$ в S^t . Таким образом, вместо всей последовательности $\{\sigma_k\}_{k\in N}$ можно строить только ее хвост $\{\bar{\sigma}_k\}_{k\in N}$, начинающийся с $\bar{\sigma}_0$.

2. В дальнейшем понадобится специальный симплициальный комплекс $H_1(S)$ с вершинами из S , который сам по себе не является триангуляцией. Но если рассматривать элементы этого комплекса как проекции на S некоторых симплексов из R^n_+ , то для множества R^n_+ эти симплексы составляют в совокупности обычное симплициальное разбиение $H_1(R^n_+)$.

Под совокупностью начальных вершин $H_1^0(S)$ будем подразумевать такие $y^0 \in S$, что существует натуральное число $m(y^0)$, для которого вектор $m(y^0)\cdot y^0$ целочисленный. Всякому $y^0 \in H_1^0(S)$ сопоставим число $k(y^0) = \min\{k \in \{1,2,\dots\} : k y_i^0$ целое при $i = 1,2,\dots,n\}$. Произвольному $y^0 \in H_1^0(S)$, перестановке π чисел $1,2,\dots,n$ и целому числу $m \in \{k(y^0), 2k(y^0),\dots\}$ соотнесем некоторое множество $\bar{\sigma} = (y^0 y^1 \dots y^n)$, являющееся выпуклой оболочкой вершин $y^0, y^1,\dots, y^n \in S$. Здесь y^i находится из системы

$$\begin{cases} m(y^i)y^i = m(y^{i-1})y^{i-1} + P^{\pi(i)}; \\ m(y^i) = \begin{cases} m(y^{i-1}), & \text{если } \pi(i) \neq n; \\ m(y^{i-1}) - 1, & \text{если } \pi(i) = n; \end{cases} \end{cases}$$

для $i = 1,2,\dots,n$. Начальное значение $m(y^0) = m$. Такое множество $\bar{\sigma}$ будем обозначать через $h_1(y^0, \pi, m)$, если $\bar{\sigma} \subset S$. А совокупность подобных множеств $h_1(y^0, \pi, m)$

обозначим через $H_1(S)$. Набор $H_1(S)$ и есть симплициальный комплекс с вершинами из S.

В частности, множество S также содержится в $H_1(S)$, так как $S = h_1(\ell^1 + \ell^n, \pi, 2)$, где π - перестановка $(n\,1 \ldots n-1)$.

Как уже отмечалось, каждому симплексу из $H_1(R^n_+)$ соответствует некоторое множество из $H_1(S)$. Если $h_1(y^0, \pi) \in H_1(R^n_+)$, то этому симплексу соответствует множество $h_1(z^0, \pi, d) \in H_1(S)$, где $d = \sum_{i=1}^{n} y^0_i$, а $z^0 = \frac{1}{d} y^0$. Следовательно, последовательности симплексов $\{\bar{\sigma}_k\}_{k \in N}$ соответствует некоторая последовательность множеств $\{\tilde{\sigma}_k\}_{k \in N}$, где $\tilde{\sigma}_0 = h_1(x^0, \pi, t)$, а $x^0 = \frac{1}{t}(a + \ell^1)$.

Определим нумерацию для точек множества S. Если множеству $h_1(z^0, \pi, d) \in H_1(S)$ соответствует симплекс $h_1(y^0, \pi) \in H_1(R^n_+)$, то для вершин множества $h_1(z^0, \pi, d)$ полагаем $L(z^i) = L(y^i)$ при $i = 0, 1, \ldots, n$. Здесь следует отметить, что при $x = \lambda y$ (где $\lambda > 0$) $\varphi_k(x) = \varphi_k(y)$ для $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Таким образом, если заменить в формулировке алгоритма Куна слова "симплекс $\bar{\sigma}_k$" на "множество $\tilde{\sigma}_k$", то модифицированный алгоритм Куна применительно к отображению $h(x) / \sum_{i=1}^{n} x_i$ и комплексу $H_1(S)$ построит последовательность множеств $\{\tilde{\sigma}_k\}_{k \in N}$. Переход по множествам, осуществляемый на шаге I алгоритма, для комплекса $H_1(S)$ проходит в соответствии со следующей таблицей. Пусть требуется перейти от $h_1(y^0, \pi, m)$ к $h_1(z^0, \rho, r)$ заменив вершину $y^- = y^i$.

Таблица переходов

		z^0	ρ	r
$i=0$	$\pi(1)=n$	из системы (4)	$(\pi(2)\ldots\pi(n)\pi(1))$	из системы (4)
	$\pi(1)\neq n$	из уравнения (3)		m
$0<i<n$		y^0	$(\pi(1)\ldots\pi(i+1)\pi(i)\ldots\pi(n))$	m
$i=n$	$\pi(n)=n$	из системы (6)	$(\pi(n)\pi(1)\ldots\pi(n-1))$	из системы (6)
	$\pi(n)\neq n$	из уравнения (5)		m

$$mz^0 = my^0 + P^{\pi(1)}; \tag{3}$$

$$\begin{cases} rz^0 = my^0 + P^n; \\ r = m-1; \end{cases} \tag{4}$$

$$mz^0 = my^0 - P^{\pi(n)}; \tag{5}$$

$$\begin{cases} rz^0 = my^0 - P^n; \\ r = m+1 \end{cases} \tag{6}$$

Возникает вопрос, с какой точностью множества последовательности $\{\tilde{\sigma}_k\}_{k\in N}$ приближают неподвижную точку отображения f? На этот вопрос отвечают следующие леммы.

ЛЕММА 3. Если множество $\tilde{\sigma}$ равно $h_1(y^0, \pi, m) \in H_1(S)$, то для любых $x, y \in \tilde{\sigma}$ и всякого $i = 1, 2, \ldots, n-1$ имеет место оценка

$$|\varphi_i(x) - \varphi_i(y)| \leq \frac{m - 1 + a_{i+1}(K)(n-2)}{(m-n+1)(m-1)},$$

где $a_i(K)$ - i-я координата некоторого вектора $a(K) \in H_1^0(S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множеству $\tilde{\sigma} = h_1(y^0, \pi, m) \in H_1(S)$ в разбиении $H_1(R_+^n)$ соответствует симплекс $\sigma = h_1(m \cdot y^0, \pi)$. А σ содержится в некотором кубике K с ребрами длины I, параллельными осям координат. Пусть $a(K)$ - ближайшая по $\|\cdot\|_2$ к началу координат вершина куба K. Тогда для $i = 1, 2, \ldots, n-1$

$$\arg\max_{x\in\sigma} \varphi_i(x) = a(K) + \ell^{i+1};$$

$$\arg\min_{x\in\sigma} \varphi_i(x) = a(K) + \ell - \ell^{i+1}.$$

Следовательно,

$$\arg\max_{x\in\tilde{\sigma}} \varphi_i(x) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} a_j(K) + 1}\left(a(K) + \ell^{i+1}\right),$$

$$\arg\min_{x\in\tilde{\sigma}} \varphi_i(x) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} a_j(K) + n - 1}\left(a(K) + \ell - \ell^{i+1}\right).$$

Поэтому для любых $x, y \in \tilde{\sigma}$ имеет место оценка

$$|\varphi_i(x) - \varphi_i(y)| \leq \frac{a_{i+1}(K)+1}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j(K)+1} - \frac{a_{i+1}(K)}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j(K)+n-1} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j(K) + a_{i+1}(K)\cdot(n-2) + n-1}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_j(K)+1\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_j(K)+n-1\right)} .$$

Для триангуляции $H_1(R_+^n)$ справедливы неравенства

$$m\sum_{j=1}^{n} y_j^0 - n \leq \sum_{j=1}^{n} a_j(K) \leq m\sum_{j=1}^{n} y_j^0 - 1.$$

Но $y^0 \in S$, значит,

$$|\varphi_i(x) - \varphi_i(y)| \leq \max_{p=1,2,\ldots,n} \frac{m-p+n-1+a_{i+1}(K)(n-2)}{(m-p+n-1)(m+1-p)} =$$

$$= \frac{m-1+a_{i+1}(K)(n-2)}{(m-n+1)(m-1)} .$$

Лемма доказана.

По определению непрерывности отображения $f: S \to S$ для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\|f(x)-f(y)\|_\infty \leq \varepsilon$ при $|x-y|_\infty \leq \delta$.

Множеству $\tilde{\sigma} = h_1(y^0, \pi, m) \in H_1(S)$ соответствует симплекс $\sigma = h_1(m\cdot y^0, \pi) \in H_1(R_+^n)$. Для любых $x', y' \in \sigma = (z^0, z^1 \ldots z^n)$ по построению $|x'-y'|_\infty \leq 1$. Причем для вершин этого симплекса справедливо неравенство $\sum\limits_{i=1}^{n} z_i^j \geq m-1$ при $j = 0, 1, \ldots, n$. Поэтому для любых $x, y \in \tilde{\sigma}$ имеем

$$|x-y|_\infty \leq \max_{\substack{k,j=0,1,\ldots,n \\ k \neq j}} \left\| \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} z_i^k} z^k - \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} z_i^j} z^j \right\|_\infty \leq \frac{2}{m-1} .$$

И пусть $1/\rho$ равно наибольшему $\varepsilon > 0$, которому соответствует $\delta = \frac{2}{m-1}$.

ЛЕММА 4. Дано непрерывное отображение $f: S \to S$ и $h: R_+^n \to R_+^n$, построенное по f, как показывалось выше. Если $\tilde{\sigma} = h_1(y^0, \pi, m)$ – множество, соответствующее почти полнонумерованному симплексу $\sigma = h_1(m\, y^0, \pi)$ при $m \geq t+2$ (в смысле нумерации, определенной для отображения h), $\bar{L}(y^0) = 0$, то

$$\| f(y^0) - y^0 \|_\infty \leq \frac{2n-3}{m-n+1} + \frac{2n-3}{\rho} = \varepsilon_1 .$$

А при $m = n^{1+\alpha}$ и $\rho = n^{1+\beta}$ для $\alpha, \beta > 0$ оценка

$$\varepsilon_1 \sim \frac{2}{n^\alpha - 1} + \frac{2}{n^\beta} .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что при $m \geq t+2$ симплекс

$$h_1(m \cdot y^0, \pi) \subset \{ x \in R_+^n : \sum_{i=1}^n x_i \geq t+1 \}.$$

А при $\sum_{i=1}^n x_i \geq t+1$ отображение $h(x) / \sum_{i=1}^n x_i$ равно $f\left(x / \sum_{i=1}^n x_i \right)$.

По определению,

$$\| f(y^0) - y^0 \|_\infty = \max_{i=1,2,\dots,n} | f_i(y^0) - y_i^0 | = \max \{ \max_{i=1,2,\dots,n-1}$$

$$| \varphi_i(f(y^0)) \varphi_n(f(y^0)) - \varphi_i(y^0) \varphi_n(y^0) |, \; \Big| \left[1 - \sum_{j=1}^{n-1} \varphi_j(f(y^0)) \right] \varphi_n(f(y^0)) -$$

$$- \left[1 - \sum_{j=1}^{n-1} \varphi_j(y^0) \right] \varphi_n(y^0) \Big| \} = \Big| \sum_{j=1}^{n-1} \varphi_j(y^0) - \varphi_j(f(y^0)) \Big| .$$

Без ограничения общности можно считать, что $\bar{L}(y^i) = i$ при $i = 0, 1, \dots, n-1$. В противном случае достаточно перенумеровать вершины множества $\tilde{\sigma}$. Так как $\bar{L}(y^0) = 0$, то для $j = 1, 2, \dots, n-1$ имеем $\varphi_j(f(y^0)) - \varphi_j(y^0) \geq 0$. С другой стороны,

$$\sum_{j=1}^{n-1} \varphi_j(f(y^0)) - \varphi_j(y^0) = \sum_{j=1}^{n-1} \varphi_j(f(y^0)) - \varphi_j(f(y^j)) + \varphi_j(f(y^j)) - \varphi_j(y^j) +$$

$$+ \varphi_j(y^j) - \varphi_j(y^0) \le \sum_{j=1}^{n-1} \varphi_j(f(y^0)) - \varphi_j(f(y^j)) + \varphi_j(y^j) - \varphi_j(y^0).$$

По лемме 3

$$\sum_{j=1}^{n-1} \varphi_j(y^j) - \varphi_j(y^0) \le \sum_{j=1}^{n-1} \frac{m-1+a_{j+1}(K)(n-2)}{(m-n+1)(m-1)} \le$$

$$\le \frac{(m-1)(n-1)+(m-1)(n-2)}{(m-n+1)(m-1)} = \frac{2n-3}{m-n+1} = \varepsilon_2 .$$

Далее, если $\|f(x)-f(y)\|_\infty \le \varepsilon = \frac{1}{p}$, то $\|pf(x)-pf(y)\|_\infty \le 1$ и $p\cdot f(y^0), pf(y^1), \dots, pf(y^n)$ принадлежат некоторому кубику $\Pi \subset R^n_+$ с ребрами длины I, параллельными осям координат. Причем если $a(\Pi)$ – ближайшая по $\|\cdot\|_2$ вершина кубика Π к началу координат, то $\sum_{i=1}^{n} a_i(\Pi) = p-1$. Действуя теперь, как и в лемме 3, получим следующую оценку:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \varphi_j(f(y^0)) - \varphi_j(f(y^j)) \le \sum_{j=1}^{n-1} \left[\frac{a_{j+1}(\Pi)+1}{\sum_{i=1}^{n} a_i(\Pi)+1} - \frac{a_{j+1}(\Pi)}{\sum_{i=1}^{n} a_i(\Pi)+n-1} \right] \le$$

$$\le \frac{(p+n-2)(n-1)+(p-1)(n-2)}{p(p+n-2)} \le \frac{2n-3}{p} = \varepsilon_3 .$$

Полагаем $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. При $m = n^{1+\alpha}$ и $p = n^{1+\beta}$, где $\alpha, \beta > 0$, оценка $\varepsilon_1 \sim \frac{2}{n^{\alpha}-1} + \frac{2}{n^{\beta}}$. Лемма доказана.

В заключение автор выражает глубокую благодарность В.А.Булавскому за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

I. ДУДНИК В.Г. О приближенном вычислении неподвижных точек непрерывных отображений. - Оптимизация, 1986, вып. 38(55), с.145-154.

Поступила в ред.-изд. отдел
20.02.1986 г.