УДК 519.8: 658.12.122

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ СПЕЦИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДРОБНО-КУБИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Е.Н.Егорова

В настоящее время все большее внимание уделяется вопросам использования экономико-математического моделирования для оценки и сравнения различных систем экономического стимулирования и ценообразования [1-3]. Результаты таких исследований могут использоваться для обоснования целесообразности проведения экономических экспериментов, реализующих предложения по совершенствованию хозяйственного механизма. В этих исследованиях интересы хозяйственной единицы (как праило, предприятия) моделируются с помощью целевых функций. Одной из таких функций является размер фондов поощрения, который предприятие стремится максимизировать.

В работе рассмотрены две задачи дробно-кубического программирования с линейными ограничениями, которые интерпретируются как задачи максимизации величины фондов поощрения промышленного предприятия при различных системах фондообразующих показателей, применяющихся в одиннадцатой пятилетке. Предложен общий подход к решению таких задач, основанный на сведении исходной задачи к соответствующей паре последовательно решаемых задач, первая из которых - линейного или дробно-параметрического программирования, вторая - достаточно простая задача нелинейного программирования с переменными, являвшимися параметрами в первой задаче. На основе этого подхода, именуемого в дальнейшим *параметрическим*, разработаны методы решения рассматриваемых задач.

§ I. Постановка задач и их экономическая интерпретация

Рассмотрим две задачи дробно-кубического программирования:

$$F(X)=(SX+z)\cdot(z_1+C_0X+\frac{C_1X+d}{CX+h}\rightarrow \max_{X\in G}; \quad (I)$$

$$F(X)=(SX+z)(z_1+C_0X)+\frac{C_1X+d}{CX+h}\rightarrow \max_{X\in G}, \quad (2)$$

где S, C, C_0, C_1 – вектор-строки размерности n; z, z_1, d, h – числа; $G\subset R^n$ – выпуклый многогранник

$$G\equiv\{X \mid AX=B,\ X\geqslant 0\};$$

$A=(a_{ij})$ – матрица размерности $m\times n$; B – вектор-столбец размерностии m; X – вектор переменных размерности n.

<u>Экономическая интерпретация задач</u>. Пусть X – вектор выпуска различных видов продукции в натуральном выражении; G – множество производственных возможностей предприятия, определяемое наличием различных видов ресурсов, их затратами на единицу изделия, необходимостью достижения заданных технико-экономических показателей; $F(X)$ – величина фондов поощрения в зависимости от плана X; S, C, C_0, C_1 – векторы для расчета фондообразующих показателей, умноженные на соответствующие нормативы; z, z_1, d, h – константы для расчета показателей; это могут быть значения показателей по номенклатуре, жестко заданной "сверху", обязательные отчисления в бюджет и т.п.

Вид функции $F(X)$ зависит от того, какие фондообразующие показатели установлены, и по отношению к какому показателю определены нормативы. Если исходить из методики расчета фондов поощрения [4], то задачи вида (I) возникают, когда нормативы отчислений в ФМП за все показатели установлены по отношению к прибыли или к расчетной прибыли. Примером системы фондообразующих показателей могут служить производительность труда и затраты на рубль продукции или нормативно-чистая продукция и затраты на рубль товарной продукции. С задачами вида (2) сталкиваемся при установлении норматива отчислений в ФМП за достижение первого показателя по отношению к прибыли, а второго – по отношению к ФМП по пятилетнему плану. Пример системы фон-

дообразующих показателей - НЧП и удельный вес продукции высшей категории качества в общем объеме производства.

§ 2. Параметрический подход к решению задач

Характер целевых функций задач (I) и (2) не позволяет, вообще говоря, использовать для их решения традиционные методы поиска глобального оптимума [5]. Однако учет определенной специфики этих задач, как будет показано ниже, позволяет найти для них глобальное решение.

<u>Общая идея используемого подхода</u>. Исходная задача нелинейного программирования сводится к эквивалентной паре последовательно решаемых задач, первая из которых - задача параметрического программирования, а вторая - нелинейного программирования с переменными, являвшимися параметрами в первой задаче. При этом обе задачи пары должны быть относительно несложными.

Отметим, что общая идея этого параметрического подхода не нова и уже применялась ранее в [6] для решения задачи (2) в случае $S = 0$, но не была четко сформулирована.

Поясним основные моменты использования параметрического подхода на примере следующей задачи:

$$F(X) \longrightarrow \max_{X \in G}, \qquad (3)$$

где $G \subset R^n$ - многогранное множество, а функция $F(X)$ непрерывна и ограничена на G.

I. Введем вспомогательные переменные-параметры в задаче (3): $\varphi(X) = M$, где $\varphi(X)$ - аффинная вектор-функция размерности n_1; M - вектор параметров той же размерности, и подставим их в эту задачу. Например, в задаче (I) можно ввести
$M = \binom{H}{P}, \quad \varphi(X) = \binom{CX+h}{SX+z}.$

2. Пусть теперь целевая функция задачи (3) представима в виде

$$F(X) = \psi(X, M) = \psi_1(M) + \psi_2(M) \cdot \psi_3(X, M),$$

где $\psi_1(M)$, $\psi_2(M)$ - непрерывные числовые функции, дифференцируемые на множестве $D = \{M / G \cap G_1 \neq \varnothing\}$, причем $G_1 = \{X / \varphi(X) = M\}$.

Относительно функции $\psi_3(X, M)$ будем предполагать, что она удовлетворяет следующим условиям:

а) является линейной или дробно-линейной по X ;

б) является линейной по M (для $n_1=1$ может быть квадратичной или полиномиальной по M).

После введения параметров задача (3) запишется следующим образом:

$$\psi(X,M)=\psi_1(M)+\psi_2(M)\cdot\psi_3(X,M)\to\max_{X,M},\ X\in G\cap G_1,\ M\in D. \quad (3')$$

(Условие $\varphi(X)=M$ добавлено к ограничениям для обеспечения эквивалентности преобразований.) Например, для задачи (I) имеем

$$\psi(X,H,P)=P\cdot(r_1+\frac{d}{H})+P\cdot(\frac{H\cdot C_0X+C_1X}{H})\longrightarrow\max_{X,H,P},$$

$$X\in G\cap G_1,\ M\in D,$$

где $G_1\equiv\{X\,|\,SX=P-r;\ CX=H-h\}$; $D\equiv\{(H,P)\,|\,G\cap G_1\neq\emptyset\}$.

3. Для задачи (3′) выпишем пару последовательно решаемых задач, которую назовем соответствующей:

$$f(M)=\max_{X\in G\cap G_1}\psi_3(X,M),\ M\in D; \quad (3.1)$$

$$R(M)=\psi_1(M)+\psi_2(M)\cdot f(M)\longrightarrow\max_{M\in D}. \quad (3.2)$$

Например, для задачи (I) такая пара будет следующей:

$$f(H,P)=\max_{X\in G\cap G_1}[H\cdot C_0X+C_1X],\ (H,P)\in D; \quad (1.1)$$

$$R(H,P)=P\cdot(r_1+\frac{d}{H}+\frac{f(H,P)}{H})\longrightarrow\max_{(H,P)\in D}. \quad (1.2)$$

В задаче (3.I) M рассматривается как вектор-параметр, в задаче (3.2) – как вектор переменных.

4. Решение пары задач (3.I)–(3.2) находится по следующей схеме:

– решается задача (3.I), при этом определяется $\hat{X}(M)$ – зависимость оптимального плана от вектора M и функция $f(M)$;

– $f(M)$ подставляется в целевую функцию задачи (3.2) и находится решение этой задачи M^* ;

– вычисляется $X^*=\hat{X}(M^*)$, где $\hat{X}(M)$ – функция, найденная при решении задачи (3.I).

Таким образом, решением пары задач (3.I)-(3.2) является точка (X^*, M^*). Имеет место следующая легко доказываемая

ТЕОРЕМА. Пара задач (3.I) - (3.2) эквивалентна задачам (3′) и (3).

"Эквивалентность" в формулировке теоремы означает, что любое решение (X^*, M^*) пары задач (3.I)-(3.2) есть решение задачи (3′), и наоборот, причем X^* - решение задачи (3). Кроме того, если $\bar{X}$ - решение задачи (3), то $(\bar{X}, \Psi(\bar{X}))$ - решение задачи (3′) и пары задач (3.I)-(3.2).

Формально параметрический подход можно применять для решения разных классов задач нелинейного программирования (причем условия а) и б) относительно вида функций $\Psi_j(X, M)$ могут не выполняться), но его использование, по-видимому, имеет смысл лишь тогда, когда

I) методы решения задач (3.I) и (3.2) "не сложны" или значительно "проще", чем "прямой" метод решения задачи 3, или

2) не существует метода нахождения глобального решения задачи (3), а методы решения задач (3.I) и (3.2) имеются или могут быть легко получены.

Для задач (I)-(2) имеет место условие (2).

Далее параметрический подход применяется для решения задачи (I).

§ 3. Алгоритм решения задачи (I)

Алгоритм включает следующие основные этапы.

I. Задача (I) сводится к соответствующей паре задач (I.I)-(I.2).

2. Решается задача линейного параметрического программирования (I.I) с двумя параметрами в целевой функции и в векторе ограничений. Параметрами являются H и P. В процессе ее решения множество D разбивается на ℓ критических областей d_u таких, что

$$\bigcup_{u=1}^{\ell} d_u = D, \quad X = \hat{X}_u(H, P)$$

$$f(H, P) = f_u(H, P), \text{ если } (H, P) \in d_u,$$

где $\hat{X}_u$ - линейная функция; f_u - квадратичная функция; d_u - выпуклые многоугольники, не имеющие общих внутренних точек [7,8]. При этом $(\forall (H, P))(\exists \hat{X}(H, P))$, так как G ограничено.

3. Решается задача нелинейного программирования (I.2), в которой две переменные:

а) найденная зависимость $f(H,P)$ подставляется в целевую функцию задачи (I.I):

$$R(H,P)=R_u(H,P)-P(r_1+\frac{d}{H}+\frac{t_u(H,P)}{H}),\text{ если } (H,P)\in d_u;$$

б) решается l задач вида

$$R_u(H,P)\rightarrow\max_{(H,P)\in d_u}, \qquad (I.3)$$

пусть они имеют решения (H^u, P^u) соответственно;

в) решается задача

$$R_u(H^u, P^u)\rightarrow\max_{u=\overline{1,l}}, \qquad (I.4)$$

пусть ее решение - точка (H^*, P^*).

4. Зная (H^*, P^*), находим $X^*=\hat{X}_u(H^*P^*)$, где u такое, что $(H^*, P^*)\in d_u$. X^* есть решение задачи (I).

ЗАМЕЧАНИЕ I. Число областей d_u всегда конечно [6,7], поэтому каждый этап алгоритма имеет конечное число шагов.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Задачи (I.3) и (I.4) могут иметь несколько решений. Поэтому если нужно найти все решения задачи (I), то каждое решение задачи (I.3) удобно записывать в таблицу с графами, соответствующими $R_u(H^u, P^u)$, H^u и P^u. Тогда, зная (H^*, P^*), будет легко найти другие точки, дающие то же значение целевой функции $R(H,P)$. Далее будем считать, что требуется найти только одно решение задачи (I).

Экономическая интерпретация алгоритма. Решая задачу (I.I) для каждого допустимого сочетания значений показателей H и P, находим план $\hat{X}$, максимизирующий фонды поощрения. Затем, решая задачу (I.2), среди всех сочетаний H и P выбираем то, которое дает наибольшее значение среди всех максимумов, найденных на этапе I при решении задачи (I.I). Подставляем в это решение оптимальное сочетание показателей H^* и P^* и находим тем самым оптимальный план X^*.

При реализации алгоритма возникает проблема решения задачи (I.3). Для этого достаточно сравнить значения функций $R_u(H,P)$ в вершинах многоугольников d_u и в стационарных точках внутри и на их границах. Поскольку каждый многоугольник d_u имеет общие стороны с некоторыми многоугольниками

$d_j, j<u$, то нецелесообразно включать в процедуру сравнения такие общие стороны. Этого можно достичь, если выполнять п.2 и а)-б) п.3 не последовательно сразу для всех u, а поочередно для каждого u: после нахождения области d_u решаем для нее задачу (I.3), переходим к определению следующей области d_{u+1} и так далее. Для обеспечения удобства и экономии вычислений при такой процедуре алгоритм решения задачи линейного программирования должен удовлетворять следующим требованиям:

I) обеспечивать вычисление

- координат вершин многоугольников d_u;
- уравнений сторон многоугольников d_u;
- уравнений сторон, не являющихся общими ни с одним многоугольником $d_j, j<u$;

2) использовать эти величины при переходе от области d_u к области d_{u+1}.

Таким образом, наиболее сложной частью в решении пары задач (I.I)-(I.2) является процедура разбиения области D на многоугольники d_u в задаче (I.I), согласованная с решением задачи (I.3). Свойствами I)-2) обладает алгоритм линейного двупараметрического программирования (АОДП), изложенный в приложении.

В процессе решения задачи (I.I) с помощью АЛДП области определяются последовательно, начиная с некоторой области, содержащей начальную точку (H_0, P_0). Для каждой d_u определяются смежные, т.е. имеющие с ней общую сторону или часть стороны, области d_j. Смежные области, уже исследованные на предыдущих шагах, исключаются из рассмотрения, а остальные вносятся в "список" на последующих шагах. При этом на шаге u для области d_u определяются:

I) уравнения границ

$$p_v^u H + q_v^u P + g_v^u = 0, \qquad (4)$$

где v - номер границы; p_v^u, q_v^u, g_v^u - числа, определяемые в процессе решения;

2) интервалы $H \in [\alpha_v^u, \beta_v^u]$ $(P \in [\alpha_v^u, \beta_v^u])$, в которых эти уравнения задают отрезок прямой, являющийся стороной v;

3) коэффициенты O_i^u, $i=\overline{1,6}$, функции $f_u(H,P)$, ко-

торая имеет вид

$$f_u(H,P)=O_1^u H^2+O_5^u P\cdot H+O_3^u H+O_5^u\cdot P+O_6^u+O_2^u P,(O_2^u=0);$$

4) множество V^u номеров сторон многоугольника d_u, не являющихся общими ни с одной из сторон многоугольников d_j, $j<u$.

После завершения этих расчетов можно сразу решать задачу (I.3) для области d_u. Ниже приводится алгоритм решения этой задачи.

I. Для нахождения стационарных точек функции $R^u(H,P)$ внутри области d_u решаем систему уравнений

$$\frac{\partial R^u(H,P)}{\partial H}=\frac{P}{H}(O_1^u H^2-O_5^u P-O_6^u-d)=0; \tag{4.I}$$

$$\frac{\partial R^u(H,P)}{\partial P}=\frac{1}{H}(O_1^u H^2+2O_5^u P+(\tau_1+O_4^u)H+O_6^u+d)=0 \tag{4.2}$$

Эта система несложна и решается аналитически. Решения, попавшие в область d_u, включаем в множество стационарных точек L^u.

2. Для всех $v\in V^u$ определяем координаты вершин многоугольника $d_u(H_v^u, P_v^u)$. При этом $H_v^u=\alpha_v^u$ ($P_v^u=\alpha_v^u$), если $\beta_v^u=\alpha_{v-1}^u$, и $H_v^u=\beta_v^u$ ($P_v^u=\beta_v^u$), если $\alpha_v^u=\beta_{v-1}^u$. Значения P_v^u (H_v^u) вычисляются по формуле (4).

3. Для нахождения стационарных точек функции $R^u(H,P)$ на отрезках, являющихся сторонами многоугольника d_u, выразим из (4) значения параметра P через H (или H через P) и подставим полученную зависимость в уравнение (4.I) (или в (4.2)). Получим в итоге уравнение, которое легко решается аналитически. Для его решений, попавших в интервал $H\in[\alpha_v^u,\beta_v^u]$ ($P\in[\alpha_v^u,\beta_v^u]$), вычислим значение P_v^u (H_v^u) и включим эти точки в множества L^u.

4. Находим $R^u=\max\limits_{(H,P)\in L^u} R^u(H,P)$. Точку, в которой достигнуто значение R^u, обозначим через (H^u, P^u).

После того, как с помощью АЛШП определены все области d_u, легко решить задачу (I.4).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Применим параметрический подход к решению задачи (2). Введем параметры следующим образом:

$$M=\binom{H}{P}=\varphi(X)=\binom{C_0X+z_1}{SX+z}$$

и выпишем соответствующую пару задач

$$f(H,P)=\max_{X\in G\cap G_1}\left[\frac{C_1X+d}{CX+h}\right], \qquad (2.\text{I})$$

$$R(H,P)=P\cdot H+f(H,P)\to\max_{(H,P)\in D}, \qquad (2.2)$$

где $G_1=\{X\,|\,C_0X=H-z_1;\ SX=P-z\};\ D=\{(H,P)\,|\,G\cap G_1\neq\varnothing\}$.

Алгоритмы решения пар задач (2.I)-(2.2) и (I.I)-(I.2) практически не отличаются. Разница лишь в том, что (2.I) - задача параметрического дробно-линейного программирования с двумя параметрами в векторе ограничений (указания о решении такой задачи имеются в приложении). Решение задачи (2.2) отличается от решения задачи (I.2) лишь видом целевой функции и системы уравнений (4.I)-(4.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Параметрический подход позволяет легко решать задачи вида

$$F(X)=SX\cdot CX+C_0X+\sum_{i=1}^{k}\frac{C_iX+d_i}{k_iCX+t_i}\to\max_{X\in G}, \qquad (5)$$

где C_i, $i=\overline{1,k}$, - вектор-строки размерности n; k - некоторое целое число; k_i, t_i, d_i - числа ($k=1$). Алгоритм решения этой задачи описан в [IO]. Для $k=1$ задача (5) имеет ту же экономическую интерпретацию, что и задача (I)-(2).

На основе параметрического подхода удалось разработать методы решения специальных задач дробно-кубического программирования (I) и (2). Методы могут быть легко реализованы на ЭВМ и использоваться для решения задач в экономико-математических моделях.

Приложение

Алгоритм решения задачи линейного двупараметрического программирования (АЛДП)

Рассмотрим следующую задачу линейного двупараметрического программирования (ЗЛДП):

$$\mathcal{Z}(X) = C_0 X + H \cdot C_1 X + P \cdot C_2 X \to \max_X, \qquad \text{(AI)}$$
$$X \in G \equiv \{X \mid AX = B_0 + B_1 H + B_2 P,\ X \geq 0\},$$

где X – вектор-столбец размерности n; $A = (a_{ij})$ – матрица размерности $m \times n$; B_0, B_1, B_2 – вектор-столбцы размерности m; C_0, C_1, C_2 – вектор-строки размерности n; H и P – параметры.

Требуется найти решение задачи (AI) для всех пар $(H,P) \in D$, где D – множество таких пар (H,P), для которых существует оптимальное решение задачи (AI). Задача (AI) описана в [7], где рассмотрен алгоритм ее решения при $B_1 = 0$, $C_2 = 0$. Решением задачи (AI) является кусочно-линейная зависимость оптимального решения X^* от параметров H и P (пусть это будет функция $\hat{X}(H,P)$) и кусочно-квадратичная зависимость оптимального значения целевой функции $\mathcal{Z}^*$ от этих параметров (пусть это будет функция $\hat{\mathcal{Z}}(H,P)$). При этом область допустимых значений параметров $D \equiv \{(H,P) \mid G \neq 0 \wedge \exists \mathcal{Z}^*\}$ разбивается на ℓ областей d_u, называемых критическими, в которых $\hat{X}(H,P)$ линейна, $\hat{\mathcal{Z}}(H,P)$ квадратична, а матрица базисного решения W_u одна и та же [7,8]. При этом D и d_u – выпуклые многоугольные множества, причем $\bigcup_{u=1}^{\ell} d_u = D$ и d_u не имеют общих внутренних точек (рис.I), а критическая область оптимального базиса W_u задается системой неравенств

$$p \cdot H + q P + g \geq 0, \qquad \text{(A2)}$$

где p, q, g – векторы размерности r.

В систему (A2) включаются неравенства на неотрицательность значений переменных, входящих в базис, и неравенства на неотрицательность оценок небазисных переменных. Векторы p, q, g определяются из симплексной таблицы.

Решение задачи (AI) удобно оформлять в виде симплексных таблиц. Вид симплексной отличается от таблицы решения обычной задачи линейного программирования лишь тем, что вместо одного будет три столбца для вектора ограничений X_0, X_1, X_2 соответственно по B_0, B_1, B_2, а вместо одной – три строки оценок Δ_0, Δ_1, Δ_2 соответственно по C_0, C_1, C_2, вычисляемых, как в ЗЛП. В процессе решения вычисление значений базисных переменных и оценок производится по формулам

$$X = X_0 + X_1 \cdot H + X_2 \cdot P;$$

$$\Delta = \Delta_0 + \Delta_1 \cdot H + \Delta_2 \cdot P.$$

В [II] описан алгоритм решения задачи (AI) для случая $C_1 = C_2 = 0$. Алгоритм удобен для использования при решении задач нелинейного программирования с применением параметрического подхода и удовлетворяет требованиям, изложенным в §3. Этот алгоритм несложно обобщить на случай $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$. ниже описывается общая схема решения ЗДЛП с помощью этого обобщенного алгоритма. Ввиду того, что АЛДП не является принципиально новым алгоритмом, его подробное изложение в настоящей статье не приводится.

Общая схема АЛДП

I. Для некоторой точки (H^0, P^0) решается задача (I) так же, как и обычная ЗЛП. Этот план с номером u записывается в нулевую строку "таблицы планов" (рис.2). Процедура нахождения точки (H^0, P^0) несложна и здесь не описывается.

2. Пусть строка "таблицы планов" с номером u уже заполнена. Определяется критическая область d_u полученного плана, т.е. уравнения границ и координаты угловых точек. Определяются номера "сопутствующих" каждой границе переменных x_s, которые надо включить (если $S \in \omega_u$) или исключить (если $S \in \bar{\omega}_u$) из базиса, чтобы нарушилось неравенство, соответствующее этой границе. Здесь s – номер уравнения границы, ω_u – множество индексов базисных переменных, $\bar{\omega}_u$ – множество индексов небазисных переменных.

3. Находятся базисы, определяющие области d_i, смежные с областью d_u, т.е. имеющие с ней общую сторону или часть стороны. С помощью процедуры, аналогичной прямому (двойственному) симплекс-методу, определяются переменные x_k,

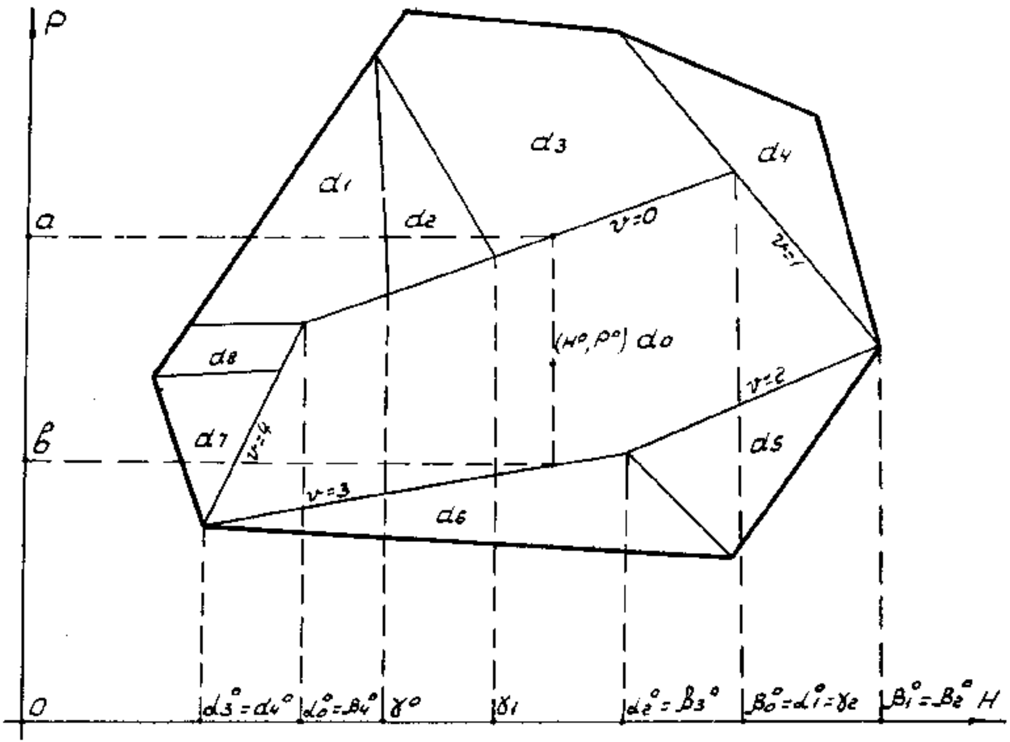

Рис.I. Множество D и его разбиение на подмножества d_u

которые исключаются/включаются из базиса при включении/выключения в/исключения из него переменных x_s. Если определить такие переменные для некоторых x_s не удается, то соответствующие границы совпадают с границей области D. Одной x_s может соответствовать несколько x_k. Заменяя в комбинации базисных переменных x_s на x_k (x_k на x_s), получим комбинации базисных переменных областей, смежных с d_u.

4. Из полученных в п.3 базисов отбрасываем те, которые уже встречались ранее, т.е. имеются в "таблице планов", а остальные записываем последовательно в эту таблицу (рис.2).

5. Используя информацию "таблицы планов", одним шагом симплексных преобразований получаем план с номером $u+1$, базис которого записан в $(u+1)$ -й строке этой таблицы, и возвращаемся к п.2, подставляя вместо u номер $u+1$. Вычисления заканчиваются, если в "таблице планов" уже нет неисследованных базисов.

"Таблица планов" необходима для записи найденных базисов во избежание повторения итераций. Строка этой таблицы содержит номер плана u, комбинацию его базисных переменных, номер "предшествующего" плана, из которого может быть получен план u одним шагом симплексных преобразований и индексы ключевого элемента при переходе от "предшествующего" плана к плану (рис.2).

<u>Геометрическая интерпретация АЛДП</u>. Определение области начинается с нахождения одного многоугольника d_0 (нулевая итерация), отыскиваются смежные с ним многоугольники (первая итерация), затем смежные с этими многоугольниками (вторая итерация) и так далее до тех пор, пока вся область D не будет определена (рис.3).

ЗАМЕЧАНИЕ I. Для нахождения границ области d_u (п.2) из симплексной таблицы плана u определяют векторы p, q, g и систему неравенств (А2). Если $u=0$, то границу с номером $v=0$ определяют, подставляя $H=H_0$ в систему (А2) и решая получившуюся систему неравенств с одной переменной. При этом получают отрезок $[b, a]$ (рис.1), $(-\infty, a]$ или $[b, +\infty)$. Пусть в точке (H_0^0, a) обратилось в равенство неравенство с номером

$$p_s H + q_s P + g_s = 0. \qquad \text{(А3)}$$

Номер плана	I	2	3	4	5	Номера		
						предшествующего плана	ключевой строки	ключевого столбца
0	x_7	x_8	x_9	x_6	x_4	–	–	–
I	x_7	x_8	x_9	x_6	x_1	0	4	I
2	x_1	x_8	x_9	x_7	x_4	0	5	I
3	x_7	x_8	x_9	x_1	x_2	I	4	2

Рис.2. "Таблица планов" (пример заполнения)

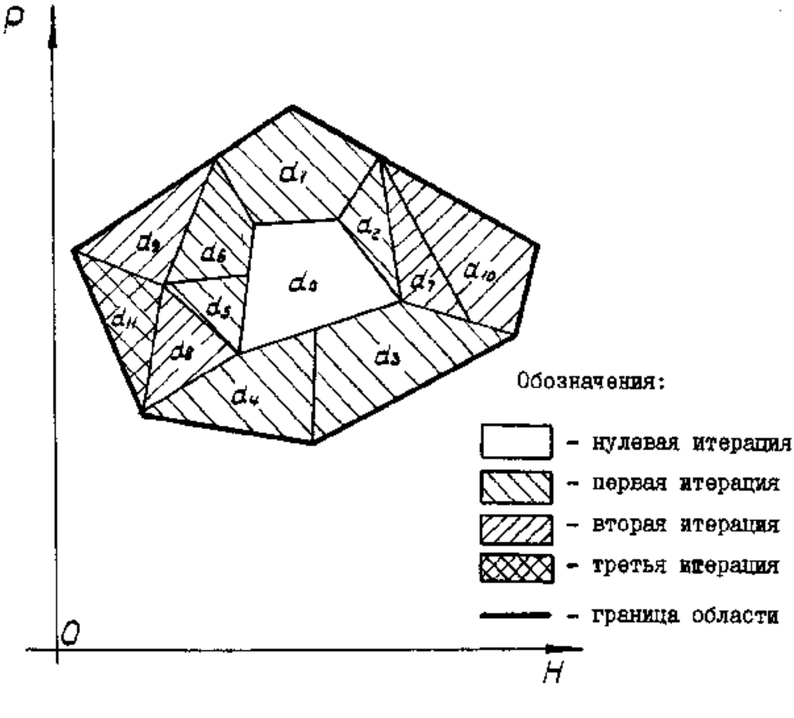

Рис.3. Геометрическая интерпретация АЛДП

Оно и определяет сторону с номером $v=0$. Если $u \neq 0$, то номер $v=0$ получает сторона, уравнение которой было нарушено при переходе к плану u от предшествующего плана. В этом случае уже известен интервал $H \in [\alpha_v^u, \beta_v^u]$ значений параметра H, в котором уравнение (А3) задает сторону v. Если $u=0$, то этот интервал определяется решением системы (А2) с учетом подстановки в нее выражения параметра P через H из уравнения (А3). Пусть t – номер неравенства, обратившегося в равенство $H=\alpha_v^u$ ($H=\beta_v^u$). Выражаем из него P как функцию от μ и подставим в систему (А2), решив которую, получим интервал $H \in [\beta_v^u, \beta_{v+1}^u]$ (либо $H \in [\alpha_{v+1}^u, \alpha_v^u]$), определяющий сторону $v+1$, имеющую со стороной v одну общую точку. При этом переменная x_t будет "сопутствовать" стороне v. Находим неравенство, обратившееся в равенство при $H=\beta_{v+1}^u$ ($H=\alpha_{v+1}^u$), и переходим к определению стороны $v+2$ и так далее, пока не дойдем снова до точки β_0^u (α_0^u), и неравенство с номером S снова не обратится в равенство. При выходе на бесконечный интервал возвращаются к точке $H=\beta_0^u$ ($H=\alpha_0^u$) и повторяют всю процедуру сначала, пока не будет опять получен бесконечный интервал.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При определении индексов ключевого элемента для перехода к новому базису в п.3 из уравнения стороны v области d_u выражают P как функцию от H, или наоборот, и подставляют в выражения для значений базисных переменных (оценочных коэффициентов). Выражения делятся на соответствующие положительные элементы столбца "сопутствующей" переменной x_s (на отрицательные элементы строки, в которую входит эта переменная x_s). Полученные выражения обозначим через $\beta_k(H)$. Пусть $k \in K$ – множество номеров положительных элементов столбца x_s (отрицательных элементов строки, в которую входит x_s). Для определения номера ключевой строки (столбца) решают несложную задачу

$$R(H) = \min_{\substack{k \in K \\ H \in [\alpha_v^u, \beta_v^u]}} \beta_k(H). \qquad (A4)$$

Решением будет последовательность отрезков $[\alpha_v^u, \gamma_0], [\gamma_0, \gamma_1], [\gamma_1, \gamma_2] \dots [\gamma_{T-1}, \gamma_T]$, где $\gamma_T = \beta_v^u$, и номеров $\{k_t\}$, определяющих функцию $R(H)$ на этих отрезках соответственно, $t=\overline{0,T}$ (рис.1).

При $H \in [\gamma_t, \gamma_{t+1}]$ введение в базис переменной x_s (x_{k_t}) в уравнение с номером k_t (вместо x_s) не приводит к нарушению допустимости (оптимальности) базиса. Поэтому столбец (строка) с номером k_t будет ключевой (ключевым).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При вычислениях по АЛДП можно выражать параметр H через P, а можно выражать P через H, так как оба параметра совершенно равноправны. То, какой из этих вариантов предпочесть, определяется из соображений удобства вычислений.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если в результате решения задачи (А4) имеется для некоторого t несколько совпадающих выражений β_t, то в силу неоднозначности выбора k_t разбиение области D на многоугольные множества d_u будет неоднозначным. Тогда в качестве k_t берется номер любого из совпадающих выражений β_k. Как показано в [II, теорема I.5], разбиение области D на подобласти d_u, в которых выражение для $\hat{z}(H,P)$ одно и то же, будет однозначным.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. АЛДП обеспечивает нахождение всей области D (доказательство этого полностью совпадает с доказательством теоремы I.6 в работе [II]).

ЗАМЕЧАНИЕ 6. АЛДП легко модифицировать для решения следующей задачи дробно-линейного программирования с двумя параметрами:

$$z(X) = \frac{C_1 X + d}{C_0 X + h} \to \max_X,$$

$$X \in G \equiv \{X \mid AX = B_0 + B_1 \cdot H + B_2 \cdot P,\ X \geq 0\}, \qquad \text{(А5)}$$

где H и P – параметры, $C_0 X + h \neq 0$ при $X \in G$ и $(H,P) \in D \equiv$
$\equiv \{(H,P) \mid G \neq \emptyset \wedge \exists \hat{z}\}$.

Свойства решения задачи (А5) доказаны в [I2] для случая $B_2 = 0$. Если $B_2 \neq 0$, то задача обладает, по существу, теми же свойствами, только вместо одного будет два параметра, а область D и критические области d_u будут не отрезками, а многоугольными множествами. Доказательства этих свойств почти совпадают с доказательствами в работах [I2, 9] и здесь не приводятся.

Свойства решения задач в виде (АI) и (А5) практически полностью совпадают. Различие лишь в виде функции $\hat{z}(H,P) = \max_x z(X)$

В задаче (А5) она кусочна-дробно-линейная. Поэтому алгоритм решения этой задачи будет отличаться от АЛДП лишь правилом расчета оценочных коэффициентов, подобно тому, как алгоритм решения задачи дробно-линейного программирования отличается от симплекс-метода. В силу этих особенностей не только правые части ограничений, но и оценочные коэффициенты будут зависеть от H и P. Аналогично легко модифицировать АЛДП для решения задачи дробно-линейного программирования с двумя параметрами в числителе и в знаменателе целевой функции.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Применение АЛПД для решения первой подзадачи при использовании параметрического подхода имеет следующие особенности.

I. На значения параметров H и P априори известны ограничения $H_{min} \leq H \leq H_{max}$, $P_{min} \leq P \leq P_{max}$, поскольку параметры отражают вполне определенные экономические показатели. Эти ограничения сужают область D. При решении их добавляют в систему (А3), считая, что к ним не относится никакая сопуствующая переменная.

2. Не обязательно исследовать всю область D; с целью уменьшения времени решения задачи на ЭВМ полезно разработать алгоритмы направленного движения по параметрам H и P в сторону увеличения целевой функции $R(H,P)$. В данной статье такие алгоритмы не рассматриваются.

ЛИТЕРАТУРА

I. БАГРИНОВСКИЙ К.А., ЛОТОВ А.В. Об основных направлениях имитационного моделирования механизма стимулирования производства на уровне предприятия. – Экономика и мат.методы, 1983, т.19, вып.3, с.505-515.

2. БЕРЕЗА Т.Н., ДУБСОН М.С., ТАТЕВОСЯН Г.М., ЭТИНГОФ М.Е. Машинный эксперимент с системами экономического механизма на основе модели "Согласование интересов". – М.: изд. ЦЭМИ АН СССР, 1982.

3. БЕЛКИН М.И., ВОЛКОНСКИЙ В.А., ПОМАНСКИЙ А.Б., ШАПИРО А.Д. Моделирование воздействия хозяйственного механизма на показатели эффективности работы предприятия. – Экономика и мат. методы, 1980, т.16, вып.5, с.880-892.

4. Основные положения об образовании и расходовании фонда

материального поощрения и фонда социально-культурных мероприятий и жилищного строительства (фондов поощрения) в I98I-I985 годах в промышленности. – В кн.: Совершенствование хозяйственного механизма. Сборник документов. – М.: Правда, I982.

5. КАРМАНОВ В.Г. Математическое программирование. – М.: Наука, I980.

6. БЛИНОВ О.Е. Метод решения одного класса задач дробно-квадратичного программирования. – Электротехническая промышленность. Общеотраслевые вопросы, I979, вып.I2, с.6–8.

7. KAUSMANN U., LOMMATZCH K., NOZICKA F. Lineare parametrische optimierung. – Berlin: Academic Verlag, I976.

8. ВИЛЬЯМС Н.Н. Параметрическое программирование в экономике.– М.: Статистика, I976.

9. ЧЕРНОВ Ю.П., ЛАНГЕ Э.Г. Задачи нелинейного программирования с удельными экономическими показателями. – Фрунзе: Илим, I978.

I0. ЕГОРОВА Е.Н. О моделях для исследования экономического механизма научно-технического прогресса. – В кн.: Методология оценки эффективности общественного производства. – М.: изд. ЦЭМИ АН СССР, I984, с.64–74.

II. NYKOWSKY I. Dwuparametriczny problem liniowy. – Przegląd statisticzny, I965, N 3, s.203–2I7; N 4, s.3II–323.

I2. МАНКИРОВ Д.М. Исследование задачи дробно-линейного программирования при варьировании некоторых параметров. – Изв. АН АзССР. Сер. физико-техн. и эконом. наук, I968, № 4, с.89–95.

Поступила в ред.-изд. отдел
I3.02. I986 г.