УДК 51.330 : 115

СТРУКТУРА АМОРТИЗАЦИОННЫХ ПЛАТЕЖЕЙ В НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЯХ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МАШИННОГО ПАРКА

В.Л. Канторович

В настоящей заметке рассматриваются модели замен оборудования с постоянной нагрузкой на машинный парк. Анализируется структура амортизационных платежей в случаях детерминированного и стохастического износа, постоянных и зависящих от возраста машины эксплуатационных расходов. В конце заметки изучается модель замен "старых" машин парка на "лучшие". Вопросы, затрагиваемые здесь, исследовались многими авторами: А.В.Жданко, Л.В.Канторович, А.Л.Лурье, В.В.Новожилов, И.В. Романовский, Л.А.Хоруший и др., Р.Беллман, С.Дрейфус, Декруссо, Дж.Терборг, Р.Ховард.

§ I. Описание простейшей модели. Свойства амортизационных платежей

Мы будем рассматривать следующую модель. Парк состоит из однотипных машин, отличающихся лишь возрастом t, $0 \le t \le T$. Эксплуатационные расходы S и производительность машины предполагаются не зависящими от её возраста. Машина возраста T не пригодна к эксплуатации и может быть мгновенно заменена новой – покупается машина возраста 0. Если машина возраста t эксплуатируется в течение времени Δ, её возраст увеличивается на $\Lambda - t + \Delta$. Все машины выполняют один вид работ, нагрузка на парк (число машин, занятых в единицу времени) предполагается постоянной. Известны цена новой машины C_0 и ликвидационная стоимость полностью изношенной (списываемой) C_T.

В рассматриваемой модели время непрерывно, предполагается, что соотношение цен не меняется во времени и затраты момента t_1 приводятся к затратам момента t_2 умножением на $e^{\rho(t_2-t_1)}$.

Обозначим через $C(t)$ цену машины возраста t, $0 \leq t \leq T$. Поскольку все машины независимо от их возраста выполняют одну работу и с одинаковыми затратами, для $C(t)$ можно записать следующее уравнение:

$$\frac{d}{dt}[C(t)-e^{-\rho\Delta}C(t+\Delta)]=0 \qquad (1)$$

– для выполнения работы в течение времени Δ можно приобрести машину любого возраста t, а затем продать её, при этом затраты не должны зависеть от возраста приобретенной машины.

Решение уравнения (1) есть

$$C(t)=\frac{C_0-C_T}{1-e^{-\rho T}}\left(1-e^{-\rho(T-t)}\right)+C_T, \qquad (2)$$

или, что тоже самое,

$$C(t)=\int_0^{T-t} q e^{-\rho x}dx+e^{-\rho(T-t)}C_T. \qquad (3)$$

Формула (3) может быть интерпретирована так: цена машины возраста t равна накопленному доходу, который будет получен за всё оставшееся время её использования плюс доход от её ликвидации. Величина q в формуле (3) есть

$$q=\frac{C_0-e^{-\rho T}C_T}{1-e^{-\rho T}}. \qquad (4)$$

Перейдем к амортизационным платежам. Для этого рассмотрим затраты z, связанные с использованием машины возраста t в течение единицы времени:

$$z=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}[C(t)-e^{-\rho\Delta}C(t+\Delta)+\int_0^{\Delta}se^{-\rho x}dx=\rho C(t)+ \\ +C'(t)+s. \qquad (5)$$

Эти затраты естественным образом распадаются на три слагаемых:

1. $\rho C(t)$ - нормальный доход от сделанных вложений $C(t)$ в машину возраста t. Эта величина не зависит от того, работает или нет машина в данную единицу времени, поэтому её будем называть <u>амортизацией за календарное время</u> - $A_{к.в.}(t)$ (ср. [I], [2]);

2. $-\dot{C}(t)$ - потеря машиной своей первоначальной цены из-за износа. Эта величина определяется рабочим использованием машины, поэтому её будем называть <u>амортизацией за рабочее время</u> - $A_{р.в.}(t)$:

$$A_{р.в.}(t) = \rho \frac{C_0 - C_T}{1 - e^{-\rho T}} e^{-\rho(T-t)}; \tag{6}$$

3. S - эксплуатационные расходы в единицу рабочего времени.

В соответствии с основным уравнением (I), затраты в единицу рабочего времени не зависят от возраста используемой машины

$$\bar{z} = A_{к.в.}(t) + A_{р.в.}(t) + S = \rho \frac{C_0 + C_T}{1 - e^{-\rho T}} + \rho C_T + S \tag{7}$$

и $z = \bar{z}$ есть минимальная плата за работу, обеспечивающая нормальную эффективность вложений в машину:

$$C(t) - e^{-\rho(T-t)} C_T = \int_0^{T-t} (\bar{z} - S) e^{-\rho x} dx. \tag{8}$$

Сформулируем некоторые свойства амортизационных платежей.

I. Цена машины возраста t равна накопленной сумме будущих амортизационных платежей плюс ликвидационная стоимость в момент списания:

$$C(t) = \int_0^{T-t} [A_{к.в.}(x) + A_{р.в.}(x)] e^{-\rho x} dx + e^{-\rho(T-t)} C_T. \tag{9}$$

В частности, амортизационными отчислениями полностью возвращаются вложения, сделанные при покупке новой машины.

2. Цена машины в любой момент равна цене новой машины за вычетом уже начисленной суммы амортизации за рабочее время:

$$C(t) = C_0 - \int_0^t A_{р.в.}(x) dx. \tag{10}$$

3. Амортизационный платёж за рабочее время однозначно определяется остаточной стоимостью машины $C(t)$ и её остаточным ресурсом $T-t$ (не зависит от начальной стоимости и ресурса):

$$A_{р.в.}(t)=\rho\,\frac{C(t)-C_T}{1-e^{-\rho(T-t)}}\,e^{-\rho(T-t)}. \qquad (11)$$

4. Сумма уже начисленной амортизации позволяет в любой момент восстановить парк в его первоначальной возрастной структуре (сумма остаточной стоимости парка и начисленной амортизации за рабочее время во все моменты времени постоянна).

Это свойство очевидным образом следует из свойства (2).

5. Амортизационный платёж за рабочее время увеличивается с возрастом машины, а за календарное время - уменьшается.

Это свойство следует из формулы (6).

Из свойства (5) легко может быть получено известное правило распределения заданий между машинами разного возраста при неравномерной нагрузке на парк: "новой машине - максимальную нагрузку" ж) (см. [1], [2], [3]).

Рассмотренные здесь формулы амортизационных платежей отличаются от предложенных для аналогичной схемы использования машин в известной работе А.Л.Лурье [4]. В этой работе неявно предполагалось, что амортизационные платежи (за рабочее время) не зависят от возраста машины. В недавней работе А.В.Жданко [5] предложена (с новых позиций!) известная формула амортизации:

$$A_{р.в.}(t)=\frac{C_0}{T} \qquad (C_T=0)$$

ж) Пусть n -любое число работ, которые могут выполнять машины парка (под работой можно понимать и определенное отношение времени рабочего использования машины ко времени её простоя). Машина, имевшая возраст t, будучи занята время Δ на i -ой работе, будет иметь возраст $t+\Delta\alpha_i$, α_i - нагрузка, соответствующая i -ой работе. Пусть долей парка может быть любое число из [0,1] и пусть $\Phi(t)$ задаёт распределение нагрузки (i) между машинами разного возраста (t). На любом интервале непрерывности $\Phi(t)$ для $C(t)$ может быть записано уравнение, аналогичное (1), так что могут быть определены цена машины в зависимости от возраста - $C(t)$, амортизационный платёж - $A_{р.в.}(t)$ и плата за работу z_i. Так как

$$z_i=\rho\,C(t)-\alpha_i\,C'(t)$$

из свойств (4) и (5) следует, что $\Phi(t)$ будет задавать оптимальное распределение нагрузок между машинами лишь тогда, когда более новой машине даётся большая нагрузка.

Здесь автор без обоснований распределил затраты на обновление парка равномерной возрастной структуры в равной доле на все единицы оборудования независимо от их возраста.

Сейчас в экономической литературе обсуждается вопрос о том, в каком размере следует начислять амортизацию, когда она изымается в централизованный фонд - ясно, что в этом случае нельзя пользоваться формулой А.Л.Лурье:

$$A_{p.в.}(t) = \frac{C_0}{e^{\rho T}-1} \qquad (C_T = 0) ,$$

так как предприятие не получает банковского процента с накопленной суммы амортизации. Нам удобнее обсудить этот вопрос, считая время дискретным.

Обозначим через C_t - цену машины возраста t, A_t - амортизационный платёж за рабочее время в год t, s - годовые эксплуатационные расходы, z - годовая плата за работу машины, учтённая в себестоимости продукции. Используя дискретные аналоги формул (3) и (6) и установленные свойства амортизационных платежей легко проверить, что выполняются следующие соотношения:

$$C_t = C_0 - \sum_{\tau=1}^{t-1} A_\tau ; \qquad (12)$$

$$\rho C_t + A_t + s_t = z . \qquad (13)$$

Здесь ρC_t есть плата за фонды по остаточной их стоимости, ρC_0 - плата за фонды по балансовой стоимости, $\rho \sum_{\tau=1}^{t-1} A_\tau$ - банковский процент с накопленной суммы амортизации. Так как из (12)

$$\rho C_0 = \rho C_t + \rho \sum_{\tau=1}^{t-1} A_\tau ,$$

то в случае, если накопленная сумма амортизации остаётся в руках предприятия, плата за фонды по балансовой их стоимости частично погашается из себестоимости продукции (ρC_t , см. формула (13)), а оставшаяся часть - банковским процентом с накопленной суммы амортизации.

Если же амортизационные платежи изымаются в централизованный фонд, плата за фонды должна начисляться по остаточной их стоимости (см. формула (13)). Размер самих амортизационных платежей не зависит от того, изымаются они или нет.

§ 2. Амортизационные платежи в случае меняющихся с возрастом машины эксплуатационных расходов

В рамках модели предыдущего параграфа будем считать, что эксплуатационные расходы в единицу рабочего времени $S(t)$ зависят от возраста машины t. Тогда уравнение, аналогичное (I), приобретает вид:

$$\frac{d}{dt}\left[C(t) - e^{-\rho\Delta}C(t+\Delta) + \int_0^{\Delta} s(t+x)e^{-\rho x}dx\right] = 0 . \qquad (14)$$

Его решение есть

$$C(t) = \frac{C_0 - C_T}{1-e^{-\rho T}}\left(1-e^{-\rho(T-t)}\right) + \int_0^{T-t}[\bar{s} - s(t+x)]e^{-\rho x}dx + C_T, \qquad (15)$$

где через $\bar{S}$ обозначены средние эксплуатационные расходы за весь срок службы машины:

$$\bar{S} = \rho\,\frac{\int_0^T s(t)e^{-\rho t}dt}{1-e^{-\rho T}} . \qquad (16)$$

Если положить

$$\bar{z} = \rho\,\frac{C_0 - e^{-\rho T}C_T}{1-e^{-\rho T}} + \bar{s} , \qquad (17)$$

то

$$C(t) = \int_0^{T-t}[\bar{z} - s(t+x)]e^{-\rho x}dx + e^{-\rho(T-t)}C_T . \qquad (18)$$

Формула (18) вполне аналогична (3).

Дифференцируя $C(t)$ в виде (18), получаем, что амортизационные платежи за рабочее время

$$A_{р.в.}(t) = -C'(t) = [\bar{z} - s(T) - \rho C_T]e^{-\rho(T-t)} + \int_0^{T-t} s'(t+x)e^{-\rho x}dx \qquad (19)$$

складываются из двух частей.

Первая

$$[\bar{z} - s(T) - \rho C_T]e^{-\rho(T-t)} , \qquad (20)$$

как и в предыдущем случае, обусловлена потерей машиной единицы своего ресурса (упускается доход, который был бы получен от работы машины в последний момент её жизни).

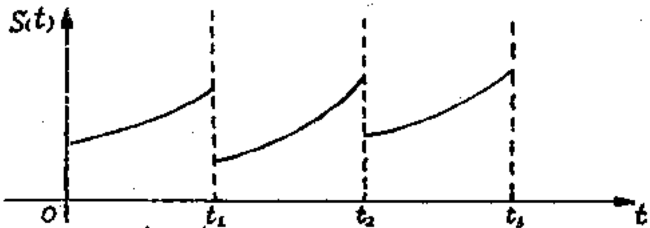
Вторая
$$\int_0^{T-t} S'(t+x)e^{-\rho x}dx \qquad (21)$$
обусловлена ухудшением машины из-за её износа в данный момент (приращение эксплуатационных расходов за всё оставшееся время использования машины, вызванное увеличением возраста машины на единицу).

Пусть теперь срок службы машины T не задан, а определяется ростом эксплуатационных расходов $S(t)$. Естественно определять его таким образом, чтобы минимизировать затраты в единицу рабочего времени
$$z(T) = \rho\,\frac{C_0 - C_T + \int_0^T s(t)e^{-\rho t}dt}{1 - e^{-\rho T}}\,. \qquad (22)$$

Если $s(t)$ возрастает, то оптимальный срок службы $\hat{T}$, минимизирующий $z(T)$, определяется из условия:
$$s(\hat{T}) + \rho C_T = z(\hat{T}) \qquad ^{ж)}$$
– машина используется до тех пор, пока она рентабельна при минимальной плате за работу $z(\hat{T})$.

Если срок службы машины определен оптимально, то амортизационные платежи определяются только вторым слагаемым, то есть ухудшением машины, вызванным её износом.

Часто эксплуатационные расходы имеют такой вид:



В моменты $t_1, t_2, \ldots$ производятся ремонты машины, требующие, соответственно, затрат $P_1, P_2, \ldots$; в каждом интервале (t_i, t_{i+1}) функция $S(t)$ возрастает.

Обозначим через $C(t_k^-)$ цену машины возраста t_k ещё не

ж) Несмотря на очевидность этого условия, в некоторых недавних работах предлагается совершенно иное определение оптимального срока службы (см. [5], [6]).

ремонтировавшуюся, $C(t_\kappa^+)$ - цену отремонтированной машины:

$$C(t_\kappa^+) = C(t_\kappa^-) + P_\kappa .$$

Пусть $s(t_\kappa^+)$ и $s(t_\kappa^-)$ - эксплуатационные расходы отремонтированной и нет машины возраста t_κ .

Легко устанавливается, что амортизационные платежи за рабочее время в рассматриваемом случае складываются из следующих величин:

I. Амортизация самой машины, связанная с износом единицы её ресурса в периоде $[t_\kappa, t_{\kappa+1}]$:

$$A_{маш}(t) = [\bar{z} - s(t_\kappa^-) - \rho C(t_{\kappa+1}^-)] e^{-\rho(t_{\kappa+1}^- - t)} . \tag{23}$$

2. Амортизация суммы, затраченной на непосредственно предшествовавший капитальный ремонт:

$$A_{рем}(t) = \rho \frac{P_\kappa e^{-\rho(t_{\kappa+1} - t)}}{1 - e^{-\rho(t_{\kappa+1} - t)}} . \tag{24}$$

3. Часть платежа, обусловленная ухудшением машины (ростом эксплуатационных расходов) за все оставшееся время её использования в периоде $[t_\kappa, t_{\kappa+1}]$:

$$\int_0^{t_{\kappa+1} - t} s'(t+x) e^{-\rho x} dx . \tag{25}$$

§ 3. Стохастический износ

Пусть теперь износ случайным образом определяется по времени рабочего использования машины, например, так будет, когда износ машины определяется числом поломок, имевших место за время её жизни.

Рассмотрим следующую модель:

Машина может находиться в одном из $n+1$ состояний. Состояние 0 соответствует новой машине, состояние n - полностью изношенной, списываемой. Время дискретно (хотя все результаты без труда переносятся на случай непрерывного времени). Заданы вероятности p_{ij} перехода машины из состояния i в состояние j за единицу времени, так что износ описывается марковским процессом. Предполагается, что эксплуатационные характеристики не зависят от состояния машины.

Тогда затраты на выполнение работы в течение единицы времени:

$$C_i - e^{-\rho} \sum_j p_{ij} C_j \tag{26}$$

не зависят от состояния используемой машины (через C_i обозначена цена машины в состоянии i). Таким образом, если задана цена новой машины C , а цена списываемой равна нулю, цены машины в зависимости от состояния определяются из системы:

$$\begin{gathered} e^{\rho} C_i - \sum_j p_{ij} C_j = e^{\rho} C_0 - \sum_j p_{0j} C_j \ , \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ C_0 = C \ ; \ C_n = 0 \ . \end{gathered} \tag{27}$$

Если любое состояние достижимо из нулевого и с вероятностью I машина за конечное время будет списана, а $C > 0$, то система (27) имеет единственное неотрицательное решение.

Укажем его. Обозначим через $q_{i\ell}$ вероятность того, что машина, находящаяся в нулевой момент в состоянии i, будет списана в точности в момент ℓ , а через q_i математическое ожидание $e^{-\rho \tau_i}$, где τ_i – случайное время списания машины, находившейся в нулевой момент в состоянии i :

$$q_i = \sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-\rho \ell} q_{i\ell} \ . \tag{28}$$

Легко проверить, что для q_i выполняется следующее равенство :

$$e^{\rho} q_i = \sum_j p_{ij} q_j \ . \tag{29}$$

Используя (29), получаем, что решение системы (27) есть

$$C_i = C \, \frac{1 - q_i}{1 - q_0} \ . \tag{30}$$

Если же переход машины из состояния i в j связан с определенными эксплуатационными или ремонтными затратами d_{ij} , зависимость цены машины от её состояния определяется из системы :

$$\begin{gathered} e^{\rho} C_i - \sum_j C_j p_{ij} + \sum_j p_{ij} d_{ij} = e^{\rho} C_0 - \sum_j p_{0j} C_j + \sum_j p_{0j} d_{0j} ; \\ (i = 1, 2, \ldots, n-1) \\ C_0 = C ; \ C_n = 0 \ . \end{gathered} \tag{31}$$

Решением (31) является :

$$C_i = (C + D_0) \, \frac{1 - q_i}{1 - q_0} - D_i \ . \tag{32}$$

Здесь через D_i обозначено математическое ожидание приведенных эксплуатационных или ремонтных затрат для машины, находящейся в состоянии i, за всё оставшееся время до её списания:

$$D_i = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_j e^{-\rho \ell} \Delta_j \, u_{ij}(\ell) , \tag{33}$$

где $u_{ij}(\ell)$ - вероятность того, что машина, находившаяся в состоянии i, будет через время ℓ в состоянии j, а

$$\Delta_j = \sum_k p_{jk} d_{jk} .$$

Амортизационные платежи за рабочее время определяются в этой модели по формуле:

$$A_{р.в.}(i) = \sum_j p_{ij} (C_j - C_i) \tag{34}$$

и будут

$$A_{р.в.}(i) = (e^{\rho} - 1) \left[\frac{(C + D_0) q_i}{1 - q_0} + D_i \right] - \Delta_i . \tag{35}$$

В последней модели разумно поставить вопрос об оптимальном времени использования машины.

Обозначим через M множество всех состояний машины, через M' множество тех состояний, в которых $C_i \geq 0$. Если $M \setminus M'$ не пусто, определим новый процесс, который отличается от исходного тем, что в состояниях из $M \setminus M'$ машина списывается. Определим для него новые C_i' и M'' - множество состояний, в которых $C_i' \geq 0$ и т.д. до тех пор, пока всюду на $M^{(k)}$ новая $C_i^{(k-1)}$ не окажется неотрицательной. Очевидно, что указанный процесс сходится и минимальным затратам соответствует использование машины в состояниях из $M^{(k)}$ и списание, как только её состояние попадает в $M \setminus M^{(k)}$.

§ 4. Модель замен оборудования

В этом параграфе исследуется ситуация, когда, начиная с некоторого момента, появляется возможность заменять имеющиеся в парке машины "лучшими". Целью исследования является анализ политики замен и выбор объёма выпуска "лучших" машин. Исходя из этой политики и предполагая, что капиталовложения, необходимые для производства "лучших" машин, определяются максимально возможным объёмом их выпуска, мы установим, каким образом эти капиталовложения включаются в цену "лучшей" машины.

Пусть парк машин состоит из некоторых машин типа "0". Размер парка предполагается равным единице, то есть число машин измеряется в долях парка. Цена новой машины "0" – $C^{(0)}$, эксплуатационные расходы – $S^{0}(t)$ – возрастают, производительность постоянна. $\hat{T}^{(0)}$ – оптимальный срок использования машины "0", то есть

$$\min_T z(T) = \min_T \frac{C^{(0)} + \int_0^T S^{(0)}(t)\, e^{-\rho t} dt}{1 - e^{-\rho T}} = z(\hat{T}^{(0)}) \qquad (36)$$

(ср. формулу (22) § 2).

Будем предполагать, что в начальный момент парк имеет равномерную возрастную структуру и в этот момент появляется возможность заменять машины "0" машинами типа "I". $C^{(1)}$ – цена новой машины "I", $S^{1}(t)$ – её эксплуатационные расходы, $T^{(1)}$ – срок её службы и

$$z^{(1)} = \frac{C^{(1)} - \int_0^{T^{(1)}} S^{(1)}(t)\, e^{-\rho t} dt}{1 - e^{-\rho T^{(1)}}} < \bar{z}^{(0)}.$$

Для простоты предположим, что производительность машины "I" не зависит от её возраста и равна производительности машины "0".

Если $\hat{t}$ таково, что $S^{0}(\hat{t}) = z^{(1)}$, то в начальный момент целесообразно заменить все машины "0" парка, возраст которых превосходит $\hat{t}$, на новые машины "I". Однако интересно рассмотреть случай, когда размер замен ограничен – в единицу времени может быть приобретено не более v машин "I".

Если $v < \frac{1}{T^{(1)}}$, машинами "I" парк не может быть полностью укомплектован, поэтому оценка работы определяется во все моменты времени по затратам машины "0" и цена машины "I" есть

$$\hat{C}^{(1)} = \int_0^{T^{(1)}} [\bar{z}^{(0)} - z^{(1)}]\, e^{-\rho t} dt .$$

Если $v \geq \frac{1}{T^{(1)}}$, то через некоторое время парк будет состоять только из машин "I". Рассмотрим следующие случаи:

а) $v = \frac{1}{\hat{T}^{(0)}}$. Тогда приобретаются только машины "I", причём в том же количестве, в каком раньше приобретались машины "0": выбывающие машины "0" возраста $\hat{T}^{(0)}$ заменяются новыми машинами "I". Минимальная плата за работу составляет $\bar{z}^{(0)}$ для $0 < t < \hat{T}^{(0)}$ и $z^{(1)}$ для $t > \hat{T}^{(0)}$. Цена новой машины $\hat{C}^{(1)}$ равна $C^{(1)}$ для $t \geq \hat{T}^{(0)}$, а для $0 \leq t \leq \hat{T}^{(0)}$:

$$\hat{C}^{(1)}(t) = C^{(1)}(t,v) = \int\limits_0^{\hat{T}^{(0)}-t} [\bar{z}^{(0)} - z^{(1)}] e^{-\rho t} dt + C^{(1)} . \qquad (37)$$

б) $v > \frac{1}{\hat{T}^{(0)}}$. В этом случае имеется возможность заменять не только физически состарившиеся машины "0". Поскольку $S^{(0)}(t)$ возрастает, целесообразно заменять наиболее старые машины "0", и при объёме замен v возраст заменяемых машин "0" в момент t не меньше

$$\hat{T}^{(0)}(1 - t(v - \frac{1}{\hat{T}^{(0)}})) .$$

Однако так как машины "0" возраста, меньшего $\hat{t}$, заменять нецелесообразно;

при $t < \hat{t}$, $S^0(t) < z^{(1)}$,

возраст заменяемых машин $T^0(t)$ в момент t, $0 \leq t \leq \theta$, есть

$$T(t) = max\{\hat{t}, \hat{T}^{(0)}[1 - t(v - \frac{1}{\hat{T}^{(0)}})]\},$$

где θ - момент, когда списывается последняя машина типа "0":

$$\theta = min\{\hat{T}^{(0)}, max\{\frac{\hat{T}^{(0)} - \hat{t}}{\hat{T}^{(0)}} \cdot \frac{1}{\hat{T}^{(0)}v - 1}, \hat{t}\}\}.$$

Минимальная плата за работу составляет $S^{(0)}(T(t))$ для $0 \leq t \leq \theta$ и $z^{(1)}$ для $t > \theta$. Цена новой машины "I" для $t < \theta$ есть

$$\hat{C}^{(1)}(t) = C^{(1)}(t,v) = \int\limits_0^{\theta - t} [S^0(T(t+x)) - z^{(1)}] e^{-\rho x} dx + C^{(1)}. \qquad (38)$$

в) $v < \frac{1}{\hat{T}^{(0)}}$. Пусть $kv < \frac{1}{\hat{T}^{(0)}} \leq (k+1)v$. Тогда до момента $k\hat{T}^{(0)}$ некоторую долю парка составляют машины "0", а после момента $k\hat{T}^{(0)}$ парк состоит целиком из машин "I". В случае $v = \frac{1}{(k+1)\hat{T}^{(0)}}$ положение аналогично п. а), однако если $v < \frac{1}{(k+1)\hat{T}^{(0)}}$ и парк не может быть больше единицы, картина более сложная: возможно как досрочное списание машин "0" (возраста меньшего $\hat{T}^{(0)}$), так и использование их сверх оптимального срока службы.

Пусть теперь объём выпуска машин "I" v не задан, а выбирается таким образом, чтобы минимизировать затраты, связанные с производством и использованием машин "0" и "I" и необходимые для выполнения требуемой нагрузки на парк для всех

$t>0$. Будем предполагать, что капиталовложения $K(v)$, требуемые для производства машин "I", определяются максимальным объёмом их выпуска v, причём уже осуществлённые вложения могут использоваться только для производства машин "I".

Минимуму затрат соответствует такой выпуск машин v, что

$$-\frac{dK}{dv}+\int_0^{\infty}[c^{(1)}(t,v)-C^{(1)}]e^{-\rho t}dt=0\,, \tag{39}$$

где $C^{(1)}$ - текущие затраты, пропорциональные выпуску одной машины "I".

Обозначим через $T^{(1)}(x)$ оптимальный срок службы машины "I", если её цена есть $C^{(1)}+x$ (см. (22), § 2). $T^{(1)}(x)$ определяется для $x>0$ и таких, что $z^{(1)}(x,T^{(1)}(x))<\bar{z}^{(0)}$. Определим x^* из условия :

$$T^{(1)}(x^*)=\frac{1}{v}$$

(если $T^{(1)}(0)<\frac{1}{v}$, то $x^*=0$).

Если капиталовложения $K(v)$ пропорциональны максимальному объёму выпуска "лучших" машин, т.е. $K(v)=\kappa v$, из (39) следует:

$$\begin{aligned}\kappa=\frac{dK}{dv}&=\int_0^{\infty}[c^{1}(t,v)-c^{(1)}]e^{-\rho t}dt=\\&=\int_0^{\theta}[c^{1}(t,v)-(c^{(1)}+x^*)]e^{-\rho t}dt+\frac{x^*}{\rho}\end{aligned} \tag{40}$$

(θ - момент, когда списывается последняя машина "0").

Таким образом оказывается, что капиталовложения κ, необходимые для производства лучшей машины, либо частично, либо полностью компенсируются повышенной ценой "лучшей" машины в течение переходного процесса (пока в парке есть ещё машины "0"), а оставшаяся их часть компенсируется стационарной ценой $C^{(1)}+x^*$. При этом стационарная цена "лучшей" машины находится, исходя из соответствия оптимального срока службы машины, определяемого пользователем, объёму выпуска этих машин (с тем, чтобы выпуск новых машин и потребность в них были обалансированы).

Литература

I. Канторович Л.В., Романовский И.В., Амортизационные платежи при оптимальном использовании оборудования, ДАН СССР, 1965, т.162, № 5, 1015-1018.

2. Канторович Л.В., Романовский И.В., Структура амортизационных отчислений при стационарной нагрузке машинного парка, ДАН СССР, 1966, т.166, № 2, 309-312.

3. Abracham C., Thomas A., Microeconomic, Decision optimal, Dunod, 1966.

4. Лурье А.Л., Методы сопоставления эксплуатационных расходов и капиталовложений при экономической оценке технических мероприятий, сб."Вопросы экономики железнодорожного транспорта", 1948.

5. Жданко А.В., Стохастическая модель движения и амортизации основных фондов, Э и ММ, т.5, № 5, 689, 1969.

6. Новожилов В.В., Проблемы измерения затрат и результатов при оптимальном планировании, "Экономика", 1967.

7. Коростёлкин Г.М., К вопросу об оптимальном сроке службы оборудования, ЭКО, № 3, 1970.

Поступила в редакцию
1.IX. 1971 г.