

УДК 512.25/26

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Л.И. Плотникова

Айзекс [1] в качестве упрощенной модели движения автомобиля на плоскости рассматривает управляемый объект в трехмерном фазовом пространстве, движение которого описывается системой дифференциальных уравнений :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= w \sin \theta, & \frac{dy}{dt} &= w \cos \theta, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{w}{R} \varphi, \end{aligned} \quad (1)$$

где w и R - заданные положительные величины, а φ - управление, представляющее из себя кусочно-непрерывную функцию, подчиненную условию

$$|\varphi(t)| \leq 1. \quad (2)$$

При этом если управляемый объект расположен в точке (x, y, θ) , то считается, что моделируемый автомобиль в плоскости xOy находится в точке (x, y) , причем направление его движения составляет с осью Oy угол θ (рис.1). Величины w и R интерпретируются, соответственно, как линейная скорость "автомобиля" и минимальный радиус разворота.

В цитированной работе Айзекса рассмотрены задачи оптимального по быстрдействию (или, что то же, по затратам горючего) приведения управляемого объекта (1,2) из начальной точки (x_0, y_0, θ_0) на прямые $\Pi_1 = \{(x_k, y_k, \theta_1)\}$ и $\Pi_2 = \{(x_k, y, \theta_k)\}$, точки которых имеют две фиксированные координаты.

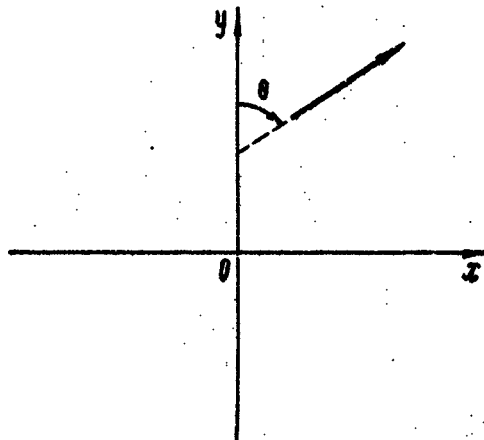


Рис. I

В настоящей заметке изучается задача оптимального перехода управляемого объекта (1.2) из заданной начальной точки уже не на прямую, а в другую фиксированную точку фазового пространства. Оптимальные траектории в этой задаче оказываются качественно отличными от полученных Айзенком для изученных им задач.

ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА. Определить кусочно-непрерывное управление φ , удовлетворяющее условию (2), обеспечивающее переход управляемого объекта (1) из начальной точки (x_0, y_0, θ_0) в заданную точку (x_k, y_k, θ_k) за минимальное время. Другими словами, требуется определить минимальное значение T , при котором существует такое управление φ указанного типа, что соответствующее решение системы (1) с начальным условием

$$(x(0), y(0), \theta(0)) = (x_0, y_0, \theta_0)$$

в момент времени T удовлетворяет условию:

$$(x(T), y(T), \theta(T)) = (x_k, y_k, \theta_k).$$

Мы покажем, что искомой оптимальной траектории движения управляемого объекта (1.2) на плоскости xOy отвечает один из четырех*) типов траекторий движения "автомобиля",

*) Точнее, имеется восемь типов траекторий, так как по каждой из траекторий рис.2 возможны два направления движения. Кроме того, возможны вырожденные траектории, которые получаются из указанных исключением одного или двух участков.

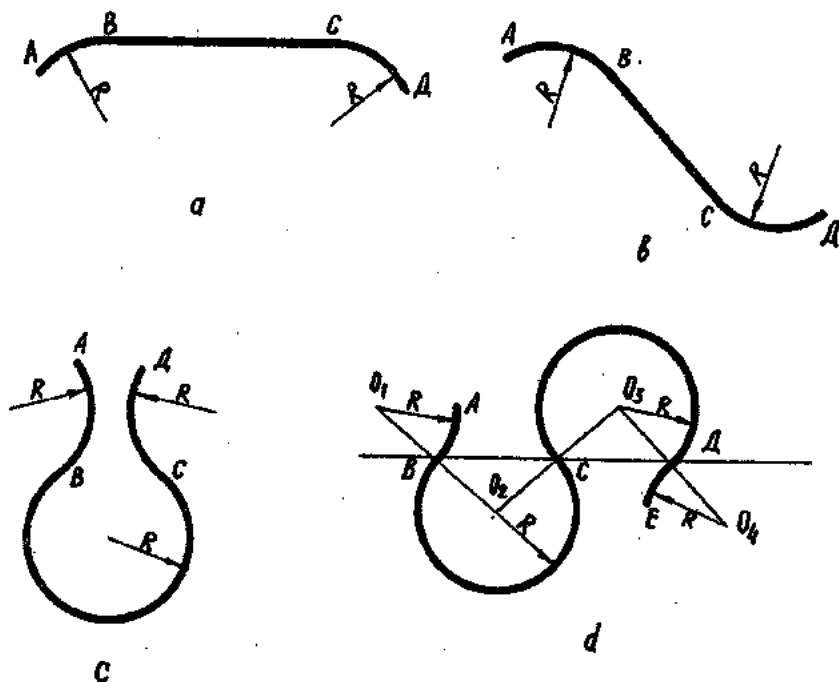


Рис. 2

представленных на рис. 2. Это означает, что оптимальные управления φ являются кусочно-постоянными со значениями из множества $\{-1, 0, 1\}$. При этом управления φ , отвечающие изображенным невырожденным траекториям имеют две (для траекторий типа a , b , c) или три (для траекторий типа d) точки переключения. В последнем случае точки B , C и D , в которых происходит переключение управления φ , лежат на одной прямой. Отметим еще, что в случае траекторий c и d радианная мера α средних дуг лежит в интервале $(\pi, 2\pi)$, а крайние дуги в случае c не имеют общей внешней касательной, а в случае d - общей внутренней касательной.

Перейдем к исследованию поставленной задачи. Следуя принципу максимума Л.С.Понтрягина, перейдем к рассмотрению функции Гамильтона

$$H = w(\varphi_1 \sin \theta + \varphi_2 \cos \theta) + \frac{w}{R} \varphi \varphi_3, \quad (3)$$

где $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ - вспомогательная вектор-функция. Дифференцируя H по фазовым координатам x, y и θ , получаем систему дифференциальных уравнений для ψ , из которой находим:

$$\begin{aligned}\psi_1(t) &= \psi_{10}, \\ \psi_2(t) &= \psi_{20}, \\ \psi_3(t) &= \psi_{30} + \omega \int_0^t (\psi_{20} \sin \theta(\sigma) - \psi_{10} \cos \theta(\sigma)) d\sigma,\end{aligned}\quad (4)$$

где $\psi_{10}, \psi_{20}, \psi_{30}$ - постоянные интегрирования.

Из (1) и (4) следует, что на плоскости xOy точки $(x(t), y(t))$, отвечающие моментам $t \in [0, T]$, при которых $\psi_3(t)$ принимает одно и то же значение, расположены на одной прямой

$$\psi_3(t) = \psi_{30} + \psi_{10}(x(t) - x_0) - \psi_{20}(y(t) - y_0),$$

оставляющей с осью Oy угол, тангенс которого равен $\frac{\psi_{10}}{\psi_{20}}$.

В частности, при $\psi_3(t) = 0$ соответствующие точки $(x(t), y(t))$ расположены на прямой

$$\psi_{20} x(t) - \psi_{10} y(t) + (\psi_{30} - \psi_{20} x_0 + \psi_{10} y_0) = 0. \quad (5)$$

Оптимальное управление φ , как известно, в каждый момент $t \in [0, T]$ должно доставлять максимум функции H . Отсюда, учитывая вид функции H и ограничение (2), следует, что при фиксированном ψ_3 управление φ на открытом множестве

$$G = \{t : \psi_3(t) \neq 0\} \quad \text{определяется однозначно, а именно:}$$

$$\varphi(t) = \text{sign } \psi_3(t).$$

Ввиду предположения о кусочной непрерывности функции $\varphi(t)$, мы можем доопределить ее в предельных точках множества G . При этом это доопределение однозначно за исключением, быть может, конечного числа точек разрыва функции $\varphi(t)$. Таким образом, если отвлечься от конечного числа точек разрыва, управление φ однозначно определяется на замкнутом F множестве G . Остается определить управление на дополнении G_1 множества F . Каждая точка $t_* \in G_1$ принадлежит некоторому открытому интервалу $I \subset G_1$, и при этом $\psi_3(t) = 0, t \in I$. Соответствующие точки $(x(t), y(t))$, как отмечалось, расположены на одной и той же прямой (5). Следовательно, функция θ в интервале I является постоянной и потому в силу (1)

управление φ на этом интервале тождественно равно нулю. Ввиду произвольности точки $t_0 \in G_1$ имеем: $\varphi(t) = 0$, $t \in G_1$.

Таким образом, искомое управление φ является кусочно-постоянной функцией со значениями из множества $\{-1, 0, 1\}$. При этом для точек $(x(t), y(t))$, в которых происходит переключение управления φ , имеем $\psi_3(t) = 0$, и, следовательно, указанные точки расположены на прямой (5).

Теперь мы можем показать, что приведенные на рис. 2 типы траекторий движения моделируемого автомобиля исчерпывают все возможности.

Предположим вначале, что оптимальная траектория имеет прямолинейный участок. Этот участок, как отмечалось, расположен на прямой (5). На этой же прямой должны лежать все точки, в которых происходит переключение управления φ . Так как оптимальная траектория, очевидно, не содержит полных окружностей, то примыкающие к прямолинейному участку дуги могут являться только начальной и конечной частью траекторий. Таким образом, при наличии прямолинейного участка искомая оптимальная траектория имеет тип α или β , где радианные меры дуг AB и CD принимают значения из полуоткрытого интервала $[0, 2\pi)$.

Остается рассмотреть случай, когда оптимальная траектория не имеет прямолинейного участка. Прежде всего, заметим, что каждая дуга оптимальной траектории, расположенная между двумя соседними точками переключения управления φ , имеет радианную меру $\alpha \in (\pi, 2\pi)$. Действительно, если указанная радианная мера $\alpha \in (0, \pi]$, то общая длина траектории может быть очевидным образом уменьшена (см. рис. 3, а). Далее, так как все точки траектории, в которых происходит переключение управления φ , лежат на одной прямой (5), то все дуги, соединяющие соседние точки переключения, имеют одну и ту же радианную меру $\alpha \in (\pi, 2\pi)$. Таких дуг не может быть более двух, так как в противном случае траектория опять-таки допускала бы очевидное сокращение (см. рис. 3, в). Таким образом, при отсутствии прямолинейных участков оптимальная траектория имеет тип ϵ или d , причем крайние дуги в случае ϵ , очевидно, не имеют общей внешней касательной, а в случае d — общей внутренней касательной.

Приведенные факты позволяют предложить метод построения на плоскости xOy траектории, отвечающей оптимальному переходу

управляемого объекта (1,2) из фиксированной начальной точки (x_0, y_0, θ_0) в заданную конечную точку (x_k, y_k, θ_k) .

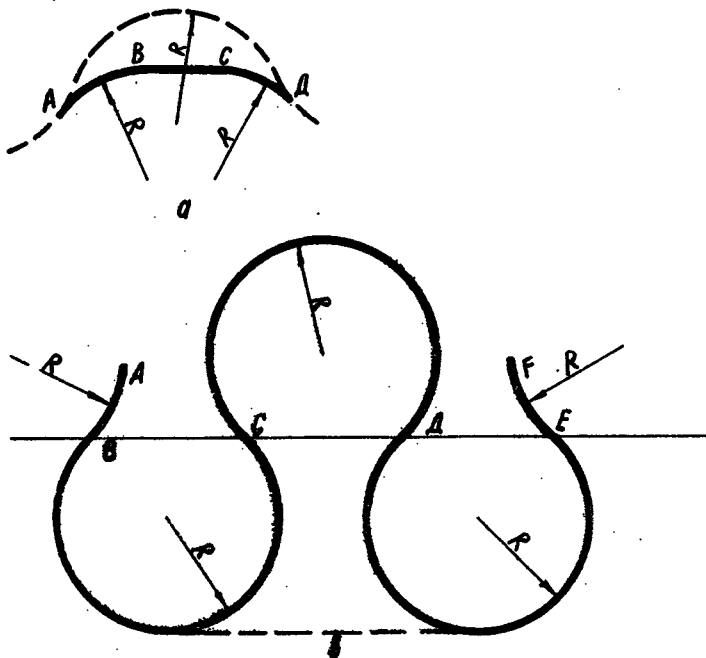


Рис. 3

Через точки $N(x_0, y_0)$ и $K(x_k, y_k)$ проведем окружности N^+, N^- и K^+, K^- , касающиеся соответствующих направлений (см. рис.4), и рассмотрим четыре пары указанных окружностей: (N^+, K^-) , (N^-, K^+) , (N^+, K^+) , (N^-, K^-) .

1. Если окружности N^+ и K^- имеют более одной общей точки, то пара (N^+, K^-) из рассмотрения исключается. В противном случае строим траекторию типа β (рис.2). Если расстояние ρ между центрами окружностей N^+ и K^- удовлетворяет соотношению $2R \leq \rho < 6R$, то строим еще траекторию типа α , используя легко проверяемые соотношения:

$$O_1 O_2 = O_3 O_4 = 2R, \quad O_2 O_4 = O_1 O_3 = \sqrt{\frac{\rho^2 - 4R^2}{2}}.$$

2. Аналогично поступаем с парой окружностей (N^-, K^+) .

3. Используя окружности N^+ и K^+ , строим траекторию типа α (рис.2). Если расстояние ρ между центрами этих окружностей удовлетворяет соотношению

$$\rho < 4R, \quad (6)$$

то строим еще траекторию типа σ .

4. Аналогично поступаем с парой окружностей (N^-, K^-) .

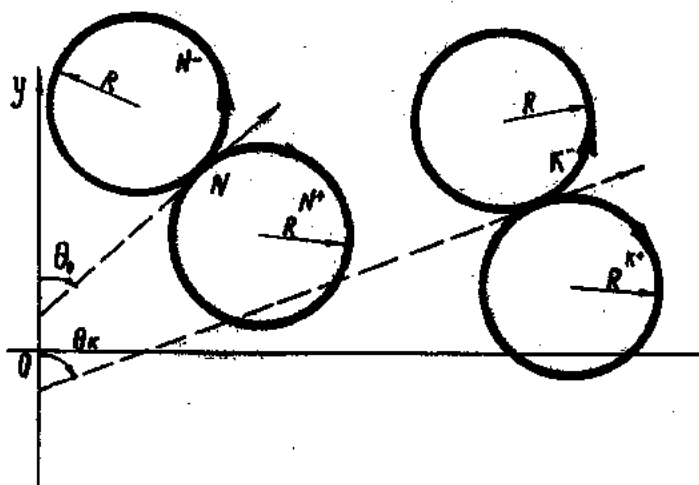


Рис. 4

В результате выполнения указанных четырех пунктов будет построено не более восьми траекторий, одна из которых является оптимальной. Последняя может быть определена путем непосредственного подсчета длин построенных траекторий. Одновременно определяется оптимальное управление φ и точки его переключения.

Заметим, что некоторые из построенных траекторий можно отбросить без вычисления соответствующих длин. Например, если для траектории типа σ крайние дуги имеют общую внешнюю касательную, то эта траектория заведомо не может быть оптимальной. Аналогично, как уже отмечалось, не может быть оптимальной траектории типа α , если крайние дуги имеют общую внутреннюю касательную. Кроме того, из двух траекторий, получаемых в пункте 3 (или в пункте 4) при выполнении неравен-

отва (6), всегда может быть оставлена для последующего анализа лишь одна. Непосредственным подсчетом длин траекторий типа α и типа C (см. рис.5) устанавливается, что если точки N и K расположены, соответственно, вне пятиугольника $ABCDE$, то более короткой является траектория типа α . Наоборот, если указанные точки N и K расположены внутри пятиугольника $ABCDE$, то более короткой является траектория типа C .

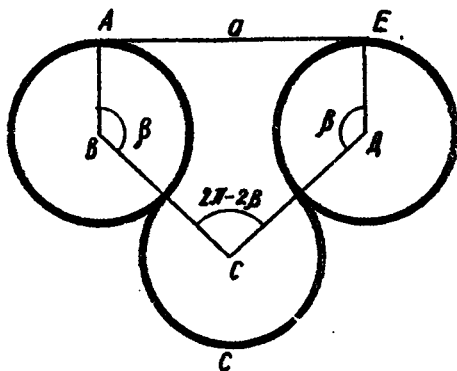


Рис. 5

Наконец, если одна из рассматриваемых точек расположена внутри пятиугольника $ABCDE$, а другая вне его, то траектория типа C является более короткой при $\beta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \delta)$, где δ - решение трансцендентного уравнения $\delta = \cos \delta$.

Если же $\beta \in (\frac{\pi}{2} + \delta, \pi)$, то более короткой является траектория типа α .

Таким образом, для определения оптимальной траектории достаточно сопоставить длины не более шести траекторий.

Изученная задача может быть использована при решении более сложной задачи, состоящей в определении точки (x_k, y_k, θ_k) , для которой достигается минимума суммарные затраты, связанные с переводом в эту точку нескольких объектов типа рассмотренного, находящихся в начальный момент в фиксированных точках.

Л и т е р а т у р а

И. Айзекс Р., Дифференциальные игры, М., "Мир", 1967.

Поступила в редакцию
23.VIII. 1971 г.