1971 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 4(21)

УДК 512.25/26

ПРОСТЕЙШИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ С НЕСКОЛЬКИМИ УПРАВЛЯЕМЫМИ ОБЪЕКТАМИ

Л.И. Плотникова

В работе рассматриваются некоторые задачи оптимального взаимодействия нескольких управляемых объектов в борьбе с одним объектом. Формально эти задачи легко сводятся к дифференциальным играм двух обобщенных управляемых объектов в фазовом пространстве, представляющем из себя соответствующую степень исходного фазового пространства. Однако исследование указанных задач оказывается целесообразным вести в исходном фазовом пространстве. Более того, в ряде случаев при рассмотрении сложных дифференциальных игр может оказаться полезным выявление блочной структуры соответствующих задач, позволяющей сводить их к задачам борьбы двух коалиций, каждая из которых формируется из управляемых объектов достаточно простой природы.

В качестве теоретической базы проводимого исследования используется экстремальная конструкция Н.Н.Красовского (см.[1], а также монографию [2]), сводящая определение управлений в каждый момент времени к решению задач оптимального перевода объектов из их текущих точек в так называемые точки прицеливания. Хотя указанная конструкция была развита для анализа дифференциальных игр с двумя участниками, она оказывается применимой без существенных изменений к играм со многими участниками.

1. Рассмотрению основных задач мы предпошлём иллюстративный пример, представляющий из себя модификацию к интересующей нас ситуации примера Н.Н.Красовского (см.[2], стр. 134).

ПРИМЕР. Рассмотрим управляемые объекты P^0, P^1, P^2, траектории движения которых

$$y^i(t)=(y_1^i(t), y_2^i(t), y_3^i(t), y_4^i(t))$$

определяются системами дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\dot y_1^i = y_3^i, \quad \dot y_2^i = y_4^i, \\ &\dot y_3^i = u_1^i, \quad \dot y_4^i = u_2^i - g, \\ &y_j^i(0) = c_j^i, \quad i=0,1,2;\ j=1,2,3,4, \end{aligned} \tag{I}$$

где величина g и координаты c_j^i рассматриваемых объектов в начальный момент заданы.

На допустимые управления $u^i(t)=(u_1^i(t), u_2^i(t))$ накладываются ограничения

$$(u_1^i(t))^2+(u_2^i(t))^2 \le \mu_i^2, \quad i=0,1,2, \tag{2}$$

где μ_i - заданные положительные числа.

При фиксированных управлениях однозначно определяется траектория движения каждого объекта и, в частности, положение этих объектов в интересующий нас момент времени $T>0$. Объекты P^1 и P^2 заинтересованы в минимизации величины

$$J = \sum_{i=1}^{2} (y_1^0(t) - y_1^i(T))^2 + (y_2^0(T) - y_2^i(T))^2, \tag{3}$$

а объект P^0 заинтересован в максимизации этой величины. Таким образом, мы приходим к дифференциальной игре коалиции объектов P^1 и P^2 с одним объектом P^0. При этом предполагается, что при выборе своих управлений в каждый момент времени $t\in[0,T]$ рассматриваемые объекты имеют информацию о положении всех объектов в четырёхмерном пространстве (y_1, y_2, y_3, y_4).

Через $G_t^i(y_1,y_2,y_3,y_4)$ обозначим область достижимости объекта i за время t из точки $y^i=(y_1,y_2,y_3,y_4)$. Из вида функции платы (3) ясно, что при анализе поставленной задачи нас будут интересовать не сами области достижимости, а их проекции $K_t^i(y_1, y_2, y_3, y_4)$ на плоскость (y_1, y_2), координаты точек которой нам удобно будет обозначать через ξ и η. С помощью принципа максимума Л.С.Понтрягина можно показать, что указанные проекции представляют из себя круги, определяемые неравенствами

$$(\xi - a_i)^2 + (\eta - b_i)^2 \le r_i^2,$$

где
$$a_i = y_1 + y_3 t, \quad b_i = y_2 + y_4 t - g\frac{t^2}{2},$$
$$r_i = \frac{1}{2}\mu_i t^2.$$

При этом если конечному состоянию объектов отвечают точки с координатами

$$\xi_i = y_1^i(T), \quad \eta_i = y_2^i(T), \quad i = 0, 1, 2,$$

то функция платы имеет вид

$$J(N_0, N_1, N_2) = \| N_0 - N_1 \|^2 + \| N_0 - N_2 \|^2,$$

где под $\| N_0 - N_i \|$ понимается евклидова норма соответствующих векторов.

Если проекция $K_T^i(c_1^i, c_2^i, c_3^i, c_4^i)$ области достижимости $G_T^i(c_1^i, c_2^i, c_3^i, c_4^i)$ преследующего объекта $i (i=1,2)$ содержит проекцию $K_T^0(c_1^0, c_2^0, c_3^0, c_4^0)$ области достижимости $G_T^0(c_1^0, c_2^0, c_3^0, c_4^0)$ преследуемого объекта, то игрок i является несущественным и исследуемая задача сводится к классической постановке с одним преследующим объектом. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что ни один из кругов $K_T^i(c_1^i, c_2^i, c_3^i, c_4^i)$ не поглощает целиком круг $K_T^0(c_1^0, c_2^0, c_3^0, c_4^0)$.

Стратегии игроков, как уже отмечалось, мы будем строить по принципу экстремального прицеливания, а именно, в каждый момент $t \in [0, T]$ рассмотрим максиминную задачу

$$\max_{N_0} \min_{N_1, N_2} J(N_0, N_1, N_2)$$

в области

$$K_{T-t}^0(y^0) \times K_{T-t}^1(y^1) \times K_{T-t}^2(y^2).$$

Нетрудно проверить, что точка $(\widetilde{N}_0, \widetilde{N}_1, \widetilde{N}_2)$ из указанной области тогда и только тогда представляет решение этой задачи, когда выполнены условия:

$$\| \widetilde{N}_1 - \widetilde{N}_0 \| = \min_{N_1 \in K_{T-t}^1(y^1)} \| N_1 - \widetilde{N}_0 \|, \tag{4}$$

$$\| \widetilde{N}_2 - \widetilde{N}_0 \| = \min_{N_2 \in K_{T-t}^2(y^2)} \| N_2 - \widetilde{N}_0 \|, \tag{5}$$

$$\|\tilde N_0 - \frac{\tilde N_1+\tilde N_2}{2}\| = \max_{N_0\in K^0_{T-t}(y^0)} \|N_0 - \frac{\tilde N_1+\tilde N_2}{2}\|. \qquad (6)$$

Из приведенных условий ясно, что за исключением случая, когда центры O_i кругов $K^i_{T-t}(y^i)$ лежат на одной прямой, причем $O_0\in[O_1,O_2]$, максминная точка $(\tilde N_0,\tilde N_1,\tilde N_2)$ определяется однозначно. Принимая точки $\tilde N_0$, $\tilde N_1$, $\tilde N_2$ за точки прицеливания для соответствующих объектов, мы находим отвечающие им управления. С помощью очевидной модификации рассуждений Красовского проверяется, что построенные указанным образом стратегия $\alpha=(\alpha^1,\alpha^2)$ коалиции преследующих объектов и стратегия $\beta=\alpha^0$ преследуемого объекта, как и в случае двух игроков, образует седловую пару стратегий. При этом если игроки будут придерживаться оптимальных стратегий, то максминная точка $(\tilde N_0, \tilde N_1, \tilde N_2)$ с течением времени не меняется.

Это означает, что решение рассматриваемой дифференциальной игры сводится к следующим двум задачам:

1°. Определение на плоскости (ξ, η) точек $\tilde N_i(\xi_i,\eta_i)$, $i = 0,1,2$, принадлежащих соответствующим кругам $K^i_T(c^i)$ и удовлетворяющих приведенным выше условиям (4–6).

2°. Определение для каждого объекта $i = 0,1,2$ допустимых управлений u^i, при которых решения систем (1) в момент времени T удовлетворяют условиям $y^i_1(T)=\xi_i$, $y^i_2(T)=\eta_i$.

Решение второй из этих задач легко найти. В качестве искомых могут быть приняты постоянные (без переключений) управления

$$u^i_1(t) = \frac{2(\xi_i-a_i)}{T^2}, \quad u^i_2(t) = \frac{2(\eta_i-b_i)}{T^2},$$
$$t\in[0,T], \qquad i=0,1,2.$$

Это проверяется с помощью принципа максимума Л.С.Понтрягина, применённого к следующим вспомогательным задачам. Для каждого объекта i среди управлений u^i, удовлетворяющих условию

$$(u^i_1(t))^2+(u^i_2(t))^2 \le \frac{4\|\tilde N_i - O_i\|^2}{T^4}, \quad t\in[0,T],$$

определить такое, при котором решение системы (1) в момент времени T доставляет максимум величине $(\xi_i-a_i)y^i_1(T)+(\eta_i-b_i)y^i_2(T)$.

Таким образом, все сводится к решению геометрической задачи I°. Последнее может быть найдено с помощью очевидного итеративного процесса.

2. Будем рассматривать дифференциальные игры преследования с игроками $P^0, P^1, \dots, P^m$, движения которых в фазовом пространстве E^n описываются следующими системами дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^i, u^i), \quad x^i(0) = c^i, \quad i = 0, 1, \dots, m. \tag{7}$$

Значения управляющих вектор-функций u^i формируются игроками в процессе игры при наличии информации о положении всех объектов в данный момент. Относительно управлений u^i и вектор-функций f^i предполагаются выполненными условия, обеспечивающие применимость принципа максимума. Кроме того, мы будем предполагать, что области достижимости $G_t^i(x)$ для всех объектов при любом $t > 0$ являются ограниченными, замкнутыми и строго выпуклыми множествами с гладкой границей.

ЗАДАЧА I. Игроки $P^1, P^2, \dots, P^m$ образуют коалицию, преследующую игрока P^0. В качестве расстояния между преследующими и преследуемым в каждый момент времени t принимается величина

$$d(t) = \min_i \| x^i(t) - x^0(t) \|,$$

обращение которой в нуль означает поимку преследуемого объекта. Преследующая коалиция заинтересована в минимизации времени поимки, а преследуемый игрок заинтересован в максимизации этого времени.

Для исследования поставленной задачи введем в рассмотрение функции

$$\mathcal{D}_t(x^0, x^1, \dots, x^m) = \min_{i=1,2,\dots,m} \| x^i - x^0 \|, \quad t > 0,$$

определенные на

$$G_t = G_t^0(c^0) \times G_t^1(c^1) \times \dots \times G_t^m(c^m).$$

Нетрудно видеть, что

$$\max_{x^0 \in G_t^0(c^0)} \min_{x^i \in G_t^i(c^i)} \mathcal{D}_t(x^0, x^1, \dots, x^m) = 0 \tag{8}$$

тогда и только тогда, когда

$$G_t^0(c^0) \subset \bigcup_{i=1}^{m} G_t^i(c^i).$$

Через T обозначим минимальное значение $t \in [0,+\infty)$, при котором имеют место равенства (8). При этом мы будем предполагать, что при $t=T$ максимум в (8) достигается в единственной точке $x^0 = \tilde{x}^0$, расположенной на границе множества $G_T^0(c^0)$, и эта точка прицеливания при движении по оптимальным траекториям с течением времени не меняется. Другими словами, если в качестве начальных состояний принять $\hat{c}^i = x^i(t)$, то для соответствующей функции $\tilde{\mathcal{D}}_{T-t}$

$$\max_{x^0 \in G_{T-t}^0(\hat{c}^0)} \min_{x^i \in G_{T-t}^i(\hat{c}^i)} \tilde{\mathcal{D}}_{T-t}(x^0, x^1, \ldots, x^m) = 0,$$

причем максимум достигается в той же точке $x^0 = \tilde{x}^0$.

Далее, не уменьшая общности, можно считать, что все объекты, входящие в коалицию, являются существенными, то есть исключение из рассмотрения любого из этих объектов увеличивает время T. В максминной точке $(\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^m)$ функции $\mathcal{D}_T$ компоненты $\tilde{x}^i$, соответствующие объектам i, осуществляющих поимку преследуемого, совпадают. Не уменьшая общности, можно считать, что $\tilde{x}^0 = \tilde{x}^1 = \ldots = \tilde{x}^k$, $k \le m$. При сделанных предположениях решение рассматриваемой игры сводится к разысканию точки $\tilde{x}^0$ и решению $k+1$ задачи оптимального управления, состоящих в приведении каждого объекта i из начального состояния c^i в точку $x^i(T) \in G_T^i(c^i)$, доставляющую максимум скалярному произведению (ℓ^i, x^i), где ℓ^i – внешняя нормаль к $G_T^i(c^i)$ в точке $\tilde{x}^0$. При этом, как нетрудно проверить, точки $x^i(T)$ будут совпадать с точкой прицеливания $\tilde{x}^0$.

В ряде случаев разыскание точки прицеливания $\tilde{x}^0$ может быть сведено к решению некоторой задачи нелинейного программирования. Предположим, что области достижимости с течением времени существенно расширяются, то есть при $t' < t''$ и любом $x \in E^n$

$$G_{t'}^i(x) \subset \operatorname{int} G_{t''}^i(x), \quad i = 0, 1, \ldots, m, \tag{9}$$

и, кроме того, догоняющие объекты имеют большие возможности, чем убегающий объект, что выражается требованием

$$G_t^0(x) \subset \operatorname{int} G_t^i(x)\ ,\ i = 1,2,\dots,m\ , \qquad (10)$$

при любых $t>0$, $x \in E^n$.

При этих условиях оптимальные траектории, очевидно, являются траекториями оптимального быстродействия, а искомые точка $x = \tilde{x}^0$ и величина T могут быть найдены путем решения следующей задачи нелинейного программирования.

Максимизировать величину

$$T = T_0(x) \qquad (11)$$

при ограничениях

$$T_0(x) - T_i(x) \le 0\ ,\ i = 1,2,\dots,m\ , \qquad (12)$$

где T_i – функции Беллмана, указывающие минимальное время, необходимое для перевода каждого объекта i из его начального состояния C^i в точку $x \in E^n$.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим игру преследования с объектами P^0, P^1 и P^2, движения которых описываются системами

$$\frac{dx_1^i}{dt} = v_i \cos\alpha_i + S\ , \quad \frac{dx_2^i}{dt} = v_i \sin\alpha_i\ ,$$

$$(x_1^i(0),\ x_2^i(0)) = (C_1^i, C_2^i),\quad i = 0,1,2,$$

где $S = S_0 + S_2 x_2$ – скорость течения, зависящая линейно только от второй координаты, v_i – постоянная скорость объекта i, α_i – его курсовой угол.

Будем предполагать, что $|S| < v_0 < v_i$, $i = 1,2$. Тогда, очевидно, справедливы предположения (9–10) и для определения точки прицеливания $\tilde{x}^0 = (\tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0)$ и величины T можно воспользоваться решением задачи нелинейного программирования (11–12). При этом для вычисления значений функции Беллмана $T_i(x)$ нужно каждый раз решать задачу оптимального по быстродействию перевода объекта i из начальной точки C^i в точку x.

Для задачи со следующими исходными данными $S_0 = 0,1$; $S_2 = 0,01$; $C^0 = (0,0)$; $C^1 = (2,0)$; $C^2 = (-1,-1)$, $v_0 = 1$, $v_1 = 1,5$, $v_2 = 1,3$ решение было проведено на ЭВМ. Точка прицеливания $\tilde{x}^0 = (-0,78;\ 2,32)$ и время поимки $T = 2,55$.

Отметим, в частности, что если $S_0 = S_2 = 0$, то данная задача совпадает с задачей, рассмотренной Зембой ([3], стр.189).

Тогда, как нетрудно проверить,

$$T_i(x) = \frac{\|x-c^i\|}{v_i}, \qquad i=0,1,2,$$

и решение задачи (11-12) сводится к разысканию в области, ограниченной двумя окружностями Апполония, точки, наиболее удалённой от начальной точки C^0.

3. Теперь мы рассмотрим случай, когда один объект преследует коалицию убегающих объектов.

ЗАДАЧА 2. Пусть, как и выше, движение объектов $P^0, P^1, \ldots, P^m$ в фазовом пространстве E^n описывается системой дифференциальных уравнений (7). Целью объекта P^0 является последовательное уничтожение объектов $P^1, P^2, \ldots, P^m$. Игра считается оконченной в момент T, если при некоторых $0 \le T_1 \le \le T_2 \le \ldots \le T_m = T$, $x^0(T_i) = x^i(T_i)$, $i=1,2,\ldots,m$. Игрок P^0 заинтересован в минимизации времени игры T, а коалиция игроков $P^1, P^2, \ldots, P^m$ заинтересована в максимизации этой величины.

Экстремальная конструкция Н.Н.Красовского позволяет свести поставленную задачу к определению в каждый момент времени точек прицеливания $\tilde{N}_0(t)$, $\tilde{N}_1(t), \ldots, \tilde{N}_m(t)$, определяющих максминные стратегии. Мы будем предполагать, что для каждого из убегающих объектов i точка прицеливания на промежутке времени его существования $[0, T_i]$ не меняется, а точка прицеливания преследующего $\tilde{N}_0(t)$ объекта P^0 на промежутках $[0, T_1]$, $[T_1, T_2], \ldots$, $[T_{m-1}, T_m]$ совпадает соответственно с фиксированными точками прицеливания $\tilde{N}_1$, $\tilde{N}_2, \ldots, \tilde{N}_m$. Кроме того, на множества достижимости объектов накладываются ограничения

$$G^i_{t'}(x) \subset \operatorname{int} G^i_{t''}(x) \quad \text{при} \quad t' < t'', \ i=0,1,\ldots,m,$$
$$G^i_t(x) \subset \operatorname{int} G^0_t(x), \ i=1,2,\ldots,m,$$

обеспечивающие совпадение оптимальных траекторий с траекториями оптимального быстродействия. Сделанные предположения позволяют свести разыскание точек прицеливания $\tilde{N}_1, N_2, \ldots, \tilde{N}_m$ к решению следующей задачи нелинейного программирования.

Максимизировать величину

$$T = T_m(c^m, N_m) \tag{13}$$

при ограничениях:

$$T_0(c^0, N_1) = T_1(c^1, N_1),$$
$$T_0(c^0, N_1) + T_0(N_1, N_2) = T_2(c^2, N_2), \tag{14}$$
$$T_0(c^0, N_1) + T_0(N_1, N_2) + \ldots + T_0(N_{m-1}, N_m) = T_m(c^m, N_m).$$

ПРИМЕР 3. Рассмотрим игру преследования с объектами P^0, P^1 и P^2, обладающими на плоскости (x_1, x_2) простыми движениями $\dot{x}^i = u^i$, $x^i(0) = c^i$, $i = 0,1,2$. На допустимые управления $u^i(t) = (u_1^i(t), u_2^i(t))$ накладываются ограничения $(u_1^i(t))^2 + (u_2^i(t))^2 \leq v_i^2$, $i = 0, 1, 2$, причём $v_0 > v_i$, $i = 1,2$. Для определения точек прицеливания N_1, N_2 и величины T можно воспользоваться, очевидно, решением задачи нелинейного программирования (13-14). Поскольку для данной задачи

$$T_i(y, z) = \frac{\|y - z\|}{v_i}, \quad i = 0, 1, 2,$$

то требуется максимизировать величину

$$T = \frac{\|c^2 - N_2\|}{v_2}$$

при ограничениях

$$\frac{\|c^0 - N_1\|}{v_0} - \frac{\|c^1 - N_1\|}{v_1} = 0,$$

$$\frac{\|c^0 - N_1\|}{v_0} + \frac{\|N_1 - N_2\|}{v_0} - \frac{\|c^2 - N_2\|}{v_2} = 0.$$

При следующих исходных данных $c^0 = (0,0)$; $c^1 = (1,1)$; $c^2 = (1,0)$; $v_0 = 1$; $v_1 = 0,7$; $v_2 = 0,3$ решение задачи было проведено на ЭВМ. Соответственно точки прицеливания $\tilde{N}_1 = (3,10; 3,53)$, $\tilde{N}_2 = (-0,93, -3,26)$ и время поимки $T = 12,58$, причем $T_1 = 4,69$, $T_2 = 12,58$. Заметим, что если бы игрок P^0 осуществлял поимку только игрока P^1, то время поимки его $T_1 = 4,71$.

Литература

I. Красовский Н.Н., Об одной задаче преследования. Прикладная математика и механика, 1963, 27, № 2.

2. Красовский Н.Н., Игровые задачи о встрече движений, М., "Наука", 1970.

3. Айзекс Р., Дифференциальные игры, М., "Мир", 1967.

Поступила в редакцию
23.VIII. 1971 г.