1971 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 4(21)

УДК 513.88

О ВОЗМОЖНОСТИ ОПИСАНИЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОСТРАНСТВ В ТЕРМИНАХ K -МЕТОДА ПИТРЕ

А.А.Седаев, Е.М.Семенов

В настоящей работе с помощью функционала $K(t,x)$, введенного в работах Ж.Питре, дается полная характеристика всех интерполяционных пространств относительно пары пространств функций, суммируемых с весами. Функционал $K(t,x)$ весьма естественен и играет очень важную роль во многих вопросах теории интерполяции (см., например, [8], [9] и [4]). Второй целью работы является доказательство невозможности описания в терминах функционала $K(t,x)$ всех интерполяционных пространств относительно любой пары.

I^0. Пара банаховых пространств E_0, E_1 называется интерполяционной парой, если они непрерывно вложены в отделимое топологическое пространство $\mathcal{E}$. Знак $\subset$ между пространствами будет всюду означать непрерывное вложение. Сумма пространств E_0, E_1, образующих интерполяционную пару, есть множество

$$E_0+E_1=\{x\in\mathcal{E},\ x=x_0+x_1,\ x_0\in E_0, x_1\in E_1\}$$

с нормой

$$\|x\|_{E_0+E_1}=\inf_{x=x_0+x_1}(\|x_0\|_{E_0}+\|x_1\|_{E_1}).$$

Хорошо известно [1], что сумма двух банаховых пространств есть банахово пространство.

Через $G=G(E_0,E_1)$ мы обозначим множество таких непрерывных линейных операторов, действующих в E_0+E_1, что

нормы их сужений на $E_i\ (i=0,1)$ не превосходят 1.

Пространство $E\subset E_0+E_1$ называется (строго) интерполяционным относительно пары (E_0,E_1), если для любого $A\in G$ $\|A\|_{E\to E}\leq 1$.

Пусть (E_0,E_1) и (F_0,F_1) две интерполяционные пары и $\mathcal{U}$ – оператор, изометрично отображающий E_i на $F_i\ (i=0,1)$:

$$\|x\|_{E_i}=\|\mathcal{U}x\|_{F_i}.$$

Такие пары пространств мы будем называть изометричными.

ЛЕММА I. Если F интерполяционное пространство относительно пары (F_0',F_1'), то пространство E с нормой $\|x\|_E=\|\mathcal{U}x\|_F$ является интерполяционным относительно (E_0,E_1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидным образом вытекает из определений.

Из леммы I следует, что интерполяционная теорема, доказанная для одной пары, очевидным образом переносится на любую другую изометричную ей пару.

Ж. Питре ввел в рассмотрение функционал

$$K(t,x)=K(t,x,E_0,E_1)=\inf_{x=x_0+x_1}(\|x_0\|_{E_0}+t\|x_1\|_{E_1}),$$

где $t>0$ и $x\in E_0+E_1$. Ясно, что если $\mathcal{U}$ – оператор, осуществляющий изометрию между парами (E_0,E_1), (F_0,F_1), то

$$K(t,x,E_0,E_1)=K(t,\mathcal{U}x,F_0,F_1) \qquad \text{(I)}$$

для $t>0$, $x\in E_0+E_1$. Легко видеть [I], что E_0+E_1 с нормой $K(t,x)$, есть интерполяционное пространство относительно (E_0,E_1), то есть $K(t,Ax)\leq K(t,x)$ для любого $A\in G(E_0,E_1)$ и $x\in E_0+E_1$.

ЛЕММА 2. Пусть $E\subset E_0+E_1$ обладает свойством

$$K(t,x)\leq K(t,y_0),\ t>0,\ y_0\in E\Rightarrow \|x\|_E\leq\|y_0\|_E. \qquad (2)$$

Тогда пространство E интерполяционно относительно пары (E_0,E_1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A\in G(E_0,E_1)$. Тогда $K(t,Ax)\leq$ $\leq K(t,x)$ для $x\in E$ и $t>0$. Согласно предположению, отсюда вытекает, что $\|Ax\|_E\leq\|x\|_E$. Лемма доказана.

В работах Б.С.Митягина [3] и А.П.Кадьдерона [4] было показано, что в случае $E_0=L_1$, $E_1=L_\infty$ для интерполяционности E свойство (2) также и необходимо. В настоящей работе доказывается аналогичное утверждение для интерполяционных пространств пары пространств L_1 с весами и приводится пример, показывающий, что условие (2) не всегда является необходимым для строгой интерполяционности E относительно любой пары (E_0, E_1).

2^0. Функциональным банаховым пространством называется пространство измеримых функций определённых на множестве M с σ-конечной, σ-аддитивной мерой μ, обладающее тем свойством, что из $|x(t)|\le|y(t)|$ почти всюду на M вытекает $\|x\|\le\|y\|$.

Пусть $a(t)$ – положительная почти всюду конечная функция на M. Через $L_{1,a}$ обозначим пространство измеримых на M функций с нормой

$$\|x\|_{L_{1,a}}=\int_M |x(t)|\,a(t)\,d\mu .$$

Для случая $E_0=L_{1,a^0}$, $E_1=L_{1,a^1}$ лемма 2 допускает обращение.

ТЕОРЕМА I. *Пусть функциональное банахово пространство E является интерполяционным относительно (L_{1,a^0}, L_{1,a^1}), тогда система неравенств $K(t,x,L_{1,a^0},L_{1,a^1})\le K(t,y,L_{1,a^0},L_{1,a^1})$, $t>0$ где y некоторый элемент из E, влечёт $\|x\|_E\le\|y\|_E$.*

Доказательство теоремы весьма длинно и мы предпошлем ему ряд лемм.

Вычислим $K(t,x,L_{1,a^0},L_{1,a^1})$. Имеем

$$K(t,x,L_{1,a^0},L_{1,a^1})=\inf_{x=x_0+x_1}(\|x_0\|_{L_{1,a^0}}+\|x_1\|_{L_{1,a^1}})=$$

$$=\inf_{x=x_0+x_1}\int_M (|x_0(s)|\,a^0(s)+t\,|x_1(s)|\,a^1(s))\,d\mu .$$

Ясно, что infimum достигается на паре функций

$$x_0(s)=\begin{cases} x(s) & a^0(s)\le t a^1(s)\\ 0 & a^0(s)>t a^1(s)\end{cases},$$

$$x_1(s) = \begin{cases} 0 & a^0(s) \le t a^1(s) \\ x(s) & a^0(s) > t a^1(s). \end{cases}$$

Поэтому

$$K(t, x, L_{1,a^0}, L_{1,a^1}) = \int\limits_M |x(s)| \min(a^0(s), t a^1(s)) d\mu. \quad (3)$$

3°. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – невозрастающая последовательность положительных чисел. Через $\ell^n_{1,\lambda}$ обозначим пространство ℓ^n_1 с весом λ,

$$\|x\|_{\ell^n_{1,\lambda}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i| .$$

Пространство $\ell^n_{1,\lambda}$ в случае $\lambda = (1, 1, .., 1)$ будем обозначать через ℓ^n_1. Пусть b вектор из R^n. Обозначим через Gb множество всех x из R^n, удовлетворяющих неравенствам

$$\sum_{i=1}^{n} \min(\lambda_i, \lambda_j) \cdot |x_j| \le \sum_{i=1}^{n} \min(\lambda_i, \lambda_j) |b_j|, \; (j = 1, 2, \dots, n). (4)$$

Множество Gb выпукло и симметрично относительно координатных гиперплоскостей.

ЛЕММА 3. Для того, чтобы точка $\bar{x} \in R^n$ с ненулевыми координатами $\bar{x}_{i_1}, \bar{x}_{i_2}, \dots, \bar{x}_{i_k}$ где $1 \le k \le n$, была крайней точкой множества Gb, необходимо и достаточно, чтобы

(1) числа λ_{i_s}, $s = 1, 2, \dots, k$ были попарно различны;

(2) выполнялись соотношения

$$\sum_{j=1}^{k} \min(\lambda_{i_s}, \lambda_{i_j}) |\bar{x}_{i_j}| = \sum_{j=1}^{k} \min(\lambda_{i_s}, \lambda_j) |b_j|, \; (s = 1, 2, \dots, k) (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем прежде всего, что из условий $x_j = 0$ $j \ne i_s$, $s = 1, 2, \dots, k$ и

$$\sum_{j=1}^{k} \min(\lambda_{i_s}, \lambda_{i_j}) |x_{i_j}| \le \sum_{j=1}^{n} \min(\lambda_{i_s}, \lambda_j) |b_j|, \quad (6)$$

$$s = 1, 2, \dots, k,$$

вытекает $x \in Gb$. Для этого рассмотрим функции (где $0 < \theta < \lambda_1$)

$$\mu(\theta) = \sum_{j=1}^{k} \min(\theta, \lambda_{i_j}) \cdot |x_{i_j}|;$$
$$\nu(\theta) = \sum_{j=1}^{n} \min(\theta, \lambda_j) |b_j|.$$

Положим по определению $\lambda_{i_{k+1}} = \lambda_{n+1} = 0$. На любом из промежутков $[\lambda_{i_{j+1}}, \lambda_{i_j}]$, $j = 1,2,\ldots,k$ функция $\mu(\theta)$ линейна, а $\nu(\theta)$ вогнута. В силу (6) и определения $\lambda_{i_{k+1}}, \lambda_{n+1}$ имеем $\mu(\lambda_{i_j}) \leq \nu(\lambda_{i_j})$ ($j = 1,\ldots,k+1$), а при $\theta > \lambda_{i_1}$ $\mu(\theta) = \mu(\lambda_{i_1}) \leq \nu(\lambda_{i_1}) \leq \nu(\theta)$. Поэтому, $\mu(\theta) \leq \nu(\theta)$ для любого $0 \leq \theta \leq \lambda_1$. В частности $\mu(\lambda_j) \leq \nu(\lambda_j)$, что эквивалентно (4). Следовательно, $x \in Gb$.

Покажем теперь, что при $j \neq i_s$, $s = 1,2,\ldots,k$, либо $\mu(\lambda_j) < \nu(\lambda_j)$, либо уравнение $\mu(\lambda_j) = \nu(\lambda_j)$ линейно выражается через уравнения системы (5). При этом, очевидным образом, достаточно рассмотреть лишь случай $\lambda_j = \lambda_{i_s}$, $s = 1,2,\ldots,k$.

Если $\lambda_{i_{s+1}} < \lambda < \lambda_{i_s}$ $(s = 1,2,\ldots,k)$ и

$$\mu(\lambda_j) = \nu(\lambda_j), \tag{7}$$

то из соотношений (6), (7), линейности $\mu(\theta)$ и вогнутости $\nu(\theta)$ на $[\lambda_{i_{s+1}}, \lambda_{i_s}]$ вытекает, что

$$\begin{aligned} \mu(\lambda_{i_{s+1}}) &= \nu(\lambda_{i_{s+1}}), \\ \mu(\lambda_{i_s}) &= \nu(\lambda_{i_s}). \end{aligned} \tag{8}$$

Следовательно, уравнение $\mu(\lambda_j) = \nu(\lambda_j)$ есть линейная комбинация (8).

При $\lambda_{i_1} < \lambda < \lambda_1$, рассуждая аналогично предыдущему, получаем,

$$\mu(\lambda_j) = \mu(\lambda_{i_1}) = \nu(\lambda_{i_1}) = \nu(\lambda_j).$$

<u>Необходимость</u>. Пусть $\bar{x}$ - крайняя точка множества Gb. В силу симметричности Gb точка $|\bar{x}|$ также крайняя для множества $Gb \cap R^+$, определенного $2n$ неравенствами:

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1,2,\ldots,n), \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \min(\lambda_j, \lambda_i)\, x_i \leq \sum_{i=1}^{n} \min(\lambda_j, \lambda_i) |b_i| \quad (j = 1,2,\ldots,n). \tag{10}$$

Как известно, точка x в n-мерном пространстве R^n

является крайней точкой выпуклого многогранника, определенного m линейными неравенствами тогда и только тогда, когда она превращает ровно n из них в линейно независимые равенства.

Пусть $\bar{x}_{i_1}, \ldots, \bar{x}_{i_k}$ – не равные нулю координаты крайней точки $\bar{x}$. Среди неравенств (9) лишь $n-k$ обращаются $|\bar{x}|$ в линейно независимые равенства. Согласно доказанному выше можно считать, что среди неравенств (10), обращенных $|\bar{x}|$ в равенства, линейно независимые находятся лишь среди k неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} \min(\lambda_{i_s}, \lambda_{i_j})|\bar{x}_{i_j}| \leq \sum_{j=1}^{n} \min(\lambda_{i_s}, \lambda_j)|b_j|, (s=1,\ldots,k) \quad (11)$$

По предположению $|\bar{x}|$ – крайняя точка $Gb \cap R^+$, поэтому все они обращаются в систему равенств, определитель которой

$$\det\|\min(\lambda_{i_s}, \lambda_{i_j})\| = \lambda_{i_k}\prod_{s=1}^{k-1}(\lambda_{i_s} - \lambda_{i_{s+1}})$$

отличен от нуля. Необходимость условий (1), (2) доказана.

<u>Достаточность</u>. Заметим, что условия (4), определяющие Gb можно записать следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} \pm\min(\lambda_i, \lambda_j)x_j \leq \sum_{j=1}^{n} \min(\lambda_i, \lambda_j)|b_j|_{(j=1,\ldots,n)}. \quad (12)$$

Если для точки $\bar{x}$ с ненулевыми координатами $\bar{x}_{i_1},\ldots,\bar{x}_{i_k}$ выполнены условия (1), (2), то среди неравенств (12), обращенных ею в равенства, можно выделить систему n уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \min(\lambda_{i_s}, \lambda_j)x_j = \sum_{j=1}^{n} \min(\lambda_{i_s}, \lambda_j)|b_j| \quad (s=1,2,\ldots,k),$$

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{jz}\varepsilon_j \min(\lambda_{i_s}, \lambda_j)x_j = \sum_{j=1}^{n} \min(\lambda_{i_1}, \lambda_j)|b_j| \quad (z \neq i_1,\ldots i_k),$$

где $\varepsilon_j = \operatorname{sign} x_j$, а $\delta_{jz} = 1$ (при $j \neq z$); $\delta_{jz} = -1$ (при $j = z$). Определитель этой системы равен $\lambda_{i_k}\prod_{s=1}^{k-1}(\lambda_{i_s} - \lambda_{i_{s+1}})$ и в силу (1) отличен от нуля. Следовательно, $\bar{x}$ – крайняя точка множества Gb. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $u, v \in R$. Если $v \in Gu$, то $v = Tu$, для некоторого $T \in G(\ell_{1,\lambda}^n, \ell_1^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать $u, v \geq 0$ и $\lambda \neq (1,1,\dots,1)$. Так как множества $G\ell$ и $G(\ell^n_{1,\lambda}, \ell^n_1)$ выпуклы, то лемму достаточно доказать при дополнительном предположении о том, что v есть крайняя точка множества $G\ell$.

Пусть $v_{i_1},\dots,v_{i_k}$ – ненулевые координаты крайней точки v множества Gu. В силу леммы 3

$$\sum_{j=1}^{k} \min(\lambda_{i_s}, \lambda_{i_j}) v_{i_s} = \sum_{j=1}^{n} \min(\lambda_{i_s}, \lambda_j) u_j \quad (s=1,2,\dots,k), \tag{13}$$

Построим оператор $T \in G$, для которого $v = Tu$. Положим $t_{ij}=0$, если $i \neq i_1, i_2, i_3,\dots,i_k$, а числа $t_{i_s j}$ определим следующим образом. Если $j \leq i_1$, то

$$t_{i_s j} = \begin{cases} 1, & s=1 \\ 0, & s>1 \end{cases}. \tag{14}$$

Если $i_{r-1} < j < i_r$, то $t_{i_k j}=0$ для $k<r-1$ и $k>r$, а числа $t_{i_{r-1} j}$ и $t_{i_r j}$ определяются из следующей системы уравнений

$$\begin{aligned} &t_{i_{r-1} j} + t_{i_r j} = 1, \\ &\lambda_{i_{r-1}} t_{i_{r-1} j} + \lambda_{i_r} t_{i_r j} = \lambda_j . \end{aligned} \tag{15}$$

Если $j > i_k$, то

$$t_{i_s j} = \begin{cases} 0, & s<k \\ \lambda_j/\lambda_{i_k}, & s=k \end{cases}. \tag{16}$$

Покажем, что построенный оператор T принадлежит множеству $G(\ell^n_{1,\lambda}, \ell^n_1)$. Хорошо известно, что

$$\|T\|_{\ell^n_{1,\lambda} \to \ell^n_{1,\lambda}} = \max_j \sum_{i=1}^{n} |t_{ij}| \frac{\lambda_i}{\lambda_j} . \tag{17}$$

Без труда проверяются неравенства

$$\sum_{s=1}^{k} t_{i_s j} \leq 1,$$

$$\sum_{s=1}^{k} \lambda_{i_s} t_{i_s j} \leq \lambda_j ,$$

где $j=1,\dots,n$, которые в силу (17) означают, что $T \in G$.

Остается доказать равенство $v = Tu$. Для этого достаточно установить, что

$$\sum_{j=1}^{n} t_{i_s j}\, u_j = v_{i_s} \quad (s=1,2,\dots,k)\,. \tag{18}$$

Так как $\det\|\min(\lambda_{i_s},\lambda_{i_r})\| \neq 0$, то из (13) следует, что система (18) эквивалентна системе

$$\sum_{s=1}^{k} \min(\lambda_{i_s},\lambda_{i_r}) \sum_{j=1}^{n} t_{i_s j}\, u_j = \sum_{j=1}^{n} \min(\lambda_{i_r},\lambda_j)\, u_j\,. \qquad (r=1,\dots,k) \tag{19}$$

Отсюда, меняя порядок суммирования, получаем

$$\sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{s=1}^{k} \min(\lambda_{i_s},\lambda_{i_r})\, t_{i_s j} \Big) u_j = \sum_{j=1}^{n} \min(\lambda_{i_r},\lambda_j)\, u_j\,.$$

Рассмотрим $\sum_{s=1}^{k} \min(\lambda_{i_s},\lambda_{i_r})\, t_{i_s j} = \mu_{rj}$. Если $j \le i_1$, то в силу (14)

$$\mu_{rj} = \min(\lambda_{i_1},\lambda_{i_r}) = \lambda_{i_r}\,. \tag{20}$$

Если $i_{q-1} < j \le i_q$, то

$$\mu_{rj} = \min(\lambda_{i_{q-1}},\lambda_{i_r})\, t_{i_{q-1} j} + \min(\lambda_{i_q},\lambda_{i_r})\, t_{i_q j}\,.$$

Согласно (15) при $r < q-1$

$$\mu_{rj} = \lambda_{i_{q-1}}\, t_{i_{q-1} j} + \lambda_{i_q}\, t_{i_q j} = \lambda_j\,, \tag{21}$$

а при $r \ge q$

$$\mu_{rj} = \lambda_{i_r}\, t_{i_{q-1} j} + \lambda_{i_r}\, t_{i_q j} = \lambda_{i_r}\,. \tag{22}$$

Пусть $j > i_k$, учитывая (16), получаем

$$\mu_{rj} = \min(\lambda_{i_k},\lambda_{i_r}) \frac{\lambda_j}{\lambda_{i_k}} = \lambda_j\,. \tag{23}$$

Формулы (20)-(23) можно записать единообразно:

$$\mu_{rj} = \min(\lambda_j,\lambda_{i_r})\,.$$

Этим установлено (19), а вместе с ним и равенство $Tu = v$. Лемма доказана.

В силу формулы (3), неравенство (4) эквивалентно соотношению

$$K(t, x, \ell^n_{1,\lambda}, \ell^n_1) \le K(t, b, \ell^n_{1,\lambda}, \ell^n_1)\,, \quad t > 0\,.$$

Кроме того, если ℓ^n_{1,a^0}, ℓ^n_{1,a^1} – пространства, заданные произвольными неотрицательными весами $a^0_k = (a^0_1, a^0_2, \dots, a^0_n)$,

$a^1=(a_1^1,a_2^1,\dots,a_n^1)$, то пара $(\ell^n_{1,a^0},\ell^n_{1,a^1})$ изометрична паре $(\ell^n_{1,\lambda},\ell^n_1)$, где вектор λ имеет координатами числа $\frac{a_{i_0}}{a_{i_1}}$, $i=1,2,\dots,n$, переставленные в убывающем порядке. Поэтому, учитывая формулу (I) и леммы I, 4, нетрудно получить

СЛЕДСТВИЕ I. Если $u,v\in\ell^n_{1,a^0}+\ell^n_{1,a^1}$ и

$$K(t,v,\ell^n_{1,a^0},\ell^n_{1,a^1})\le K(t,u,\ell^n_{1,a^0},\ell^n_{1,a^1}), \tag{24}$$

то существует оператор $T\in G(\ell^n_{1,a^0},\ell^n_{1,a^1})$ такой, что $v=Tu$.

4^0. Перейдем к изучению бесконечномерного аналога следствия I.

ЛЕММА 5. Пусть $u,v\in\ell^\infty_{1,a^0}+\ell^\infty_{1,a_1}$. Если

$$K(t,v,\ell^\infty_{1,a^0},\ell^\infty_{1,a^1})\le K(t,u,\ell^\infty_{1,a^0},\ell^\infty_{1,a^1})$$

при всех $t>0$, то существует оператор $T\in G$, для которого $v=Tu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x\in\ell^\infty_{1,a^0}+\ell^\infty_{1,a^1}$, то через $x^{(N)}$ будем обозначать вектор, у которого первые N координат совпадают с соответствующими координатами x , а остальные равны 0 . Так как $x^{(N)}$ сходится к x в $\ell^\infty_{1,a^0}+\ell^\infty_{1,a^1}$, то при каждом $t>0$

$$K(t,x)=\lim_{N\to\infty}K(t,x^{(N)}). \tag{25}$$

Для любого натурального n и любого $\varepsilon>0$ найдется такое m , что

$$K(t,v^{(n)})\le(1+\varepsilon)\,K(t,u^{(m)}) . \tag{26}$$

Действительно, согласно (3), $K(t,v^{(n)})=\sum_{i=1}^{n}\min(a_i^0,ta_i^1)|v_i|$. Поэтому при $t\ge\beta_1=\max\limits_{1\le i\le n}\frac{a_{i_0}}{a_{i_1}}$

$$K(t,v^{(n)})\equiv\sum_{i=1}^{n}a_i^0|v_i| , \tag{27}$$

а при $t\le\beta_0=\min\limits_{1\le i\le n}\frac{a_{i_0}}{a_{i_1}}$

$$K(t,v^{(n)})\equiv t\sum_{i=1}^{n}a_i^1|v_i|$$

В силу (25) на промежутке $[\beta_0,\beta_1]$ функции $K(t,u^{(m)})$

равномерно сходятся к $K(t,u)$. Поэтому для любого $\varepsilon>0$ и $t\in[\beta_0,\beta_1]$ найдется такой номер n, что

$$(1+\varepsilon)K(t,u^{(m)})\geqslant K(t,u)\geqslant K(t,v)\geqslant K(t,v^{(n)}). \qquad (28)$$

На промежутке $[0,\beta_0]$ функция $K(t,v^{(n)})$ линейна, $K(t,u^{(m)})$ вогнута и $K(0,v^{(n)})=K(0,u^{(m)})=0$. Поэтому в силу (28) неравенство (26) справедливо от 0 до β_1. Если же $t\geqslant\beta_1$ то (26) справедливо ввиду (27) неравенства (28) и неубывания $K(t,u^{(m)})$ по t.

Пусть T_1 - оператор из G, отображающий u в $u^{(m)}$. Применяя следствие I, имеем оператор $T_2\in G$, переводящий $u^{(m)}$ в $\frac{1}{1+\varepsilon}v^{(n)}$. Следовательно, оператор $T_{n,\varepsilon}=T_2T_1\in G$ и

$$T_{n,\varepsilon}u=\frac{1}{1+\varepsilon}v^{(n)}. \qquad (29)$$

Обозначим через Γ множество финитных последовательностей. На множестве L операторов, действующих в $\ell^\infty_{1,a^0}+\ell^\infty_{1,a^1}$ введем Γ-топологию, определяемую системой окрестностей

$$W_{x_i,f_i}=\{T: f_j(Tx_i)<1\},$$

где $x_i\in\ell^\infty_{1,a^0}+\ell^\infty_{1,a^1}$, $f_j\in\Gamma$, $i=1,\dots,p$, $j=1,2,\dots,q$.

Так как $(c^\infty_{0,1/a^i})^*=\ell^\infty_{1,a^i}$, $i=0,1$, то единичные шары пространств ℓ^∞_{1,a^0}, ℓ^∞_{1,a^1} компактны, а, следовательно, и замкнуты в $\ell^\infty_{1,a^0}+\ell^\infty_{1,a^1}$ в топологии $\sigma(\ell^\infty_{1,a^0}+\ell^\infty_{1,a^1},\Gamma)$. Поэтому (см. [5] теорема I) множество $G=G(\ell^\infty_{1,a^0},\ell^\infty_{1,a^1})$ замкнуто в L в Γ-топологии.

Пространство ℓ^∞_{1,a^0} плотно в $\ell^\infty_{1,a^0}+\ell^\infty_{1,a^1}$, и его единичный шар компактен в топологии $\sigma(\ell^\infty_{1,a^0}+\ell^\infty_{1,a^1},\Gamma)$, поэтому в силу теоремы 2' из [5] множество G компактно в Γ - топологии.

Рассмотрим последовательность операторов $T_{n,\frac{1}{n}}=S_n$ из G. Благодаря Γ-компактности множества G, существует предельный элемент T последовательности S_n, лежащий в G. Ввиду (29) $Tu=\lim\limits_{n\to\infty}S_nu=v$. Лемма доказана.

Всякое разбиение $\{e\}$ множества M, наделенного вполне σ-конечной мерой, на счетное множество попарно непересека-

ющихся множеств e_i конечной меры, порождает проектор

$$(P_{\{e\}}x)(t) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\mu e_i}\int x(s)\,d\mu\, æ_{e_i}(t)\,, \tag{30}$$

определенный для функций, суммируемых на каждом e_i.

ЛЕММА 6. Пусть $x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)$ – неотрицательные функции на M и $\varepsilon>0$. Существует такое разбиение $\{e\}$, что

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\,x_j(t) \le (P_{\{e\}}x_j)(t) \le (1+\varepsilon)\,x_j(t) \tag{31}$$

для всех $1\le j\le k$ и почти всех $t\in M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всякой функции $x_j(t)$, $(1\le j\le k)$ рассмотрим множества

$$e_i^j=\{t : t\in M, (1+\varepsilon)^i \le x_j(t) < (1+\varepsilon)^{i+1}\} \quad (-\infty<i<\infty) \tag{32}$$

и $e^j_{-\infty}=\{t : t\in M,\ x_j(t)=0\}$. Согласно σ-конечности меры μ найдутся такие измеримые множества M_k, что $M=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}M_k$ где $\mu M_k<\infty$ и $M_j\cap M_i=\emptyset$, $i\ne j$. Тогда всевозможные пересечения $e^1_{i_1}\cap e^2_{i_2}\cap\dots\cap e^k_{i_k}\cap M_j$, где $-\infty\le i_z<\infty$, $z=1,2,\dots,k$, $1\le j<\infty$, образуют разбиение $\{e\}$, удовлетворяющее условию (31). Лемма доказана.

Пусть $\{e\}$ – некоторое разбиение M, построенное для набора функций $x_1(t),\dots,x_k(t)$ и $\varepsilon>0$ как указано в лемме 6, и пусть функции $a^0(t)$, $a^1(t)$ находятся в этом наборе. Тогда оператор $P_{\{e\}}$ отображает L_{1,a^i} в $\ell^{\infty}_{1,\bar a^i}$, где вектор $\bar a^i=\{\bar a^i_1, \bar a^i_2,\dots,\bar a^i_n,\dots\}$ имеет координаты $\bar a^i_s=\int_{e_s} a^i(s)\,d\mu$, $i=0,1$. Легко видеть, что, кроме того, существует каноническое изометричное вложение $\ell^{\infty}_{1,\bar a^i}$ в L_{1,a^i}, $i=0,1$.

ЛЕММА 7. Выполняются соотношения:

(1) $$\|P_{\{e\}}\|_{L_{1,a^i}\to \ell^{\infty}_{1,\bar a^i}} \le 1+\varepsilon \quad (i=0,1), \tag{33}$$

(2) если $x\in \ell^{\infty}_{1,\bar a^0}+\ell^{\infty}_{1,\bar a^1}$, то

$$K(t,x,L_{1,a^0},L_{1,a^1})\le K(t,x,\ell^{\infty}_{1,\bar a^0},\ell^{\infty}_{1,\bar a^1})\le(1+\varepsilon)K(t,x,L_{1,a^0},L_{1,a^1}) \tag{34}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (31) $(P_{\{e\}}a^0)(t)\le(1+\varepsilon)a^0(t)$, поэтому при $x\in L_{1,a^0}$

$$\|P_{\{e\}}x\|_{\ell^\infty_{1,\bar a^0}}\le\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\mu e_i}\int_{e_i}|x(s)|d\mu=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{e_i}|x(s)|d\mu\frac{1}{\mu e_i}\int_{e_i}a^0(t)d\mu=$$

$$=\int_M|x(s)|P_{\{e\}}a^0(s)d\mu\le(1+\varepsilon)\|x\|_{L_{1,a^0}}.$$

Аналогичное неравенство верно и для $x\in L_{1,a^1}$, откуда следует (33). Пусть $x\in\ell^\infty_{1,\bar a^0}+\ell^\infty_{1,\bar a^1}$. Левая часть неравенства (34) очевидна. Докажем правое неравенство:

$$K(t,x,\ell^\infty_{1,a^0},\ell^\infty_{1,a^1})=\inf_{\substack{x=x_0+x_1\\ x_i\in\ell^\infty_{1,\bar a^i}}}(\|x_0\|_{\ell^\infty_{1,\bar a^0}}+t\|x_1\|_{\ell^\infty_{1,\bar a^1}})=$$

$$=\inf_{\substack{x=x_0+x_1\\ x_i\in L_{1,a^i}}}(\|Px_0\|_{L_{1,a^0}}+t\|Px_1\|_{L_{1,a^1}})\le(1+\varepsilon)K(t,x,L_{1,a^0},L_{1,a^1}).$$

Лемма доказана.

5^0. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы I. Пусть

$$K(t,v,L_{1,a^0},L_{1,a^1})\le K(t,u,L_{1,a^0},L_{1,a^1}) \tag{35}$$

для всех $t>0$. Применяя лемму 6 к заданным функциям $x_1(t)=u(t)$; $x_2(t)=v(t)$, $x_3(t)=a^0(t)$, $x_4(t)=a^1(t)$ и числу $\varepsilon>0$, получаем оператор $P_{\{e\}}$ для которого

$$\frac{1}{1+\varepsilon}v(t)\le(P_{\{e\}}v)(t)\le(1+\varepsilon)v(t) \tag{36}$$

и $\|P_{\{e\}}\|_{L_{1,a^i}\to\ell^\infty_{1,\bar a^i}}\le1+\varepsilon$, $i=0,1$. Согласно лемме 7, неравенству (36) и предположению (35)

$$K(t,P_{\{e\}}v,\ell^\infty_{1,\bar a^0},\ell^\infty_{1,\bar a^1})\le(1+\varepsilon)K(t,P_{\{e\}}v,L_{1,a^0},L_{1,a^1})\le$$

$$\le(1+\varepsilon)^2K(t,v,L_{1,a^0},L_{1,a^1})\le(1+\varepsilon)^2K(t,u,L_{1,a^0},L_{1,a^1})\le$$

$$\le(1+\varepsilon)^3K(t,P_{\{e\}}u,L_{1,a^0},L_{1,a^1})\le(1+\varepsilon)^3K(t,P_{\{e\}}u,\ell^\infty_{1,\bar a^0},\ell^\infty_{1,\bar a^1}).$$

Учитывая лемму 5, имеем оператор T из $G(\ell^\infty_{1,\bar a^0},\ell^\infty_{1,\bar a^1})$, переводящий $P_{\{e\}}u$ в $(1+\varepsilon)^{-3}P_{\{e\}}v$.

Обозначим через $\mathcal{J}$ непрерывный оператор, который действует из $\ell^{\infty}_{1,\bar a^0}+\ell^{\infty}_{1,\bar a^1}$ в $L_{1,a^0}+L_{1,a^1}$ и порожден изометричными вложениями $\ell^{\infty}_{1,\bar a^i}$ в L_{1,a^i}, $i=0,1$. Согласно (36) в $G(L_{1,a^0},L_{1,a^1})$ существует оператор T_1, $T_1 P_{\{e\}} v=\frac{1}{1+\varepsilon}v$. Следовательно, оператор

$$T_3=\frac{1}{1+\varepsilon}T_1\mathcal{J}TP_{\{e\}}$$

принадлежит $G(L_{1,a^0},L_{1,a^1})$ и $T_3 u=\frac{1}{(1+\varepsilon)^5}v$.

По предположению пространство E интерполяционно относительно $(L_{1,a^0},\ L_{1,a^1})$. Следовательно, $\|T_3\|_{E\to E}\le 1$, и $\|v\|_E\le(1+\varepsilon)^5\|u\|_E$. В силу произвольности ε имеем $\|v\|_E\le$ $\le\|u\|_E$. Теорема доказана.

6^0. Теорема I говорит о том, что всякое интерполяционное относительно L_{1,a^0} и L_{1,a^1} пространство может быть охарактеризовано в терминах функционалов $K(t,x)$, $t>0$. Покажем, что для произвольных банаховых пространств E_0, E_1 из $K(t,x,E_0,E_1)\equiv K(t,y,E_0,E_1)$ не вытекает $\|x\|_E=\|y\|_E$ для любого интерполяционного относительно (E_0,E_1) пространства E. Этот же факт установлен Ж.Питре, однако его пример нам неизвестен.

Пусть $x\in R^3$. Через x^* будем обозначать вектор, координаты которого x_1^*, x_2^*, x_3^* получаются из чисел $|x_1|$, $|x_2|$, $|x_3|$ перестановкой их в убывающем порядке. Рассмотрим пространства E_0, E_1 с нормами:

$$\|x\|_{E_0}=x_1^*+x_2^* \quad ; \quad \|x\|_{E_1}=x_1^* .$$

Нетрудно видеть, что

$$K(t,x,E_0,E_1)=\begin{cases} t x_1^*, & t\le 1,\\ x_1^*+(t-1)x_2^*, & 1<t\le 2,\\ x_1^*+x_2^*, & t>2,\end{cases}$$

и, следовательно, не зависит от x_3^*.

ТЕОРЕМА 2. Существуют интерполяционное пространство E пары (E_0,E_1) и векторы a, $b\in R^3$ такие, что $K(t,a,E_0,E_1)\equiv K(t,b,E_0,E_1)$, однако $\|a\|_E>\|b\|_E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $a=(3,2,2)$, $b=(3,2,1)$.

тогда $K(t,a,E_0,E_1)=K(t,b,E_0,E_1)$, однако, для любого оператора $T\in G(E_0,E_1)$

$$a\neq Tb. \tag{37}$$

Для доказательства предположим противное, то есть, что для некоторого оператора

$$T=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13}\\ t_{21} & t_{22} & t_{23}\\ t_{31} & t_{32} & t_{33}\end{pmatrix},$$

принадлежащего $G(E_0,E_1)$, справедливо равенство $a=Tb$. Это означает, что

$$3=3t_{11}+2t_{12}+t_{13}, \tag{38}$$

$$2=3t_{21}+2t_{22}+t_{23}, \tag{39}$$

$$2=3t_{31}+2t_{32}+t_{33}. \tag{40}$$

Хорошо известно, что

$$\|T\|_{E_1\to E_1}=\max_{1\le i\le 3}\sum_{j=1}^{3}|t_{ij}|.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{3}|t_{ij}|\le 1,\quad i=1,2,3. \tag{41}$$

Из (38) и (41) непосредственно следует, что $t_{11}=1$, $t_{12}=t_{13}=0$. Так как по предположению $\|T\|_{E_0\to E_0}\le 1$, то $\|Te_1\|_{E_0}=\|(1,t_{21},t_{31})\|_{E_0}\le\|e_1\|_{E_0}=1$. Отсюда $t_{21}=t_{31}=1$. Рассуждая аналогично, получаем далее, что $t_{22}=1$, $t_{23}=t_{32}=0$. Тогда из (39) вытекает $t_{33}=2$, откуда $\|Te_3\|_{E_0}=2$. Следовательно, $T\notin G(E_0,E_1)$, что противоречит предположению.

В качестве единичного шара пространства E возьмем множество $\mathcal{U}=\{x: x=Tb,\ T\in G(E_0,E_1)\}$. Очевидно, E есть интерполяционное пространство относительно E_0, E_1 и согласно (37) $\|b\|_E=1<\|a\|_E$. Теорема доказана.

7°. С теоремой 2 тесно связана одна задача о структуре множества шаров интерполяционных пространств. Для того, чтобы сформулировать ее, мы изучим различные операции во множестве выпуклых центрально-симметричных тел пространства R^n.

Пусть $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1$, - выпуклые центрально-симметричные тела в R^n. Рассмотрим следующие семь операций над множествами

I. $\alpha\,\mathcal{U}_i = \{x : x = \alpha y,\ y \in \mathcal{U}_i\}$, $i = 0, 1$, $\alpha > 0$;

2. $conv(\mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1) = \{x : x = \alpha y_0 + (1-\alpha) y_1,\ y_i \in \mathcal{U}_i,\ 0 \le \alpha \le 1\}$;

3. $\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1$;

4. $\mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 = \{x : x = y_0 + y_1,\ y_i \in \mathcal{U}_i,\ i = 0, 1\}$;

5. $\mathcal{U}_0 \oplus \mathcal{U}_1$ определяется как единичный шар пространства с нормой $\|x\|_{E_0} + \|x\|_{E_1}$, где E_i - пространство с единичным шаром $\mathcal{U}_i$, $i = 0, 1$;

6. $[W, \mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1] = \{x : x = \alpha y_0 + \beta y_1,\ y_i \in \mathcal{U}_i,\ (\alpha, \beta) \in W\}$, где W - выпуклое замкнутое центрально-симметричное множество в R^2;

7. $\mathcal{J}t\, \mathcal{U}_n$ - топологический предел множеств $\mathcal{U}_n$ [6].

Пусть $\mathcal{U}_0$, $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}$ - единичные шары пространства E_0, E_1, E, соответственно. Без труда проверяется, что операции I - 7 монотонны относительно включения. Поэтому, если $\mathcal{U}$ получается из $\mathcal{U}_0$ и $\mathcal{U}_1$ при помощи указанных выше 7 операций, то E есть интерполяционное пространство относительно E_0, E_1.

Б.С.Митягиным в 1964 году была поставлена задача о выяснении структуры множества шаров интерполяционных пространств. В частности, можно ли единичный шар всякого интерполяционного относительно E_0, E_1 пространства получить из $\mathcal{U}_0$, $\mathcal{U}_1$ с помощью 7 операций? Мы покажем, что тройка пространств, построенная в теореме 2, дает отрицательный ответ на поставленный выше вопрос. Для этого нам понадобится одно утверждение, верное для симметричных пространств.

Банахово пространство E размерности n называется симметричным, если (I) из $|x_i| \le |y_i|$, $i = 1, 2, \dots, n$ вытекает $\|x\|_E \le \|y\|_E$; (2) норма вектора не зависит от порядка координат. Отсюда непосредственно вытекает, что $\|\cdot\|_E$ зависит лишь от $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$.

Будем говорить, что пространство E, или его единичный шар, обладает свойством R, если $\|x\|_E$ не зависит от x_n^*.

ЛЕММА 3. Пусть единичный шар $\mathcal{U}$ пространства E построен с помощью 7 операций из единичных шаров

$\mathcal{U}_0$, $\mathcal{U}_1$ симметричных пространств E_0, E_1 обладающих свойством R. Тогда E также обладает свойством R.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Операции I – 7 зависимы. Например, операции 2, 4 являются частными случаями операции 6 при $W = \{(\alpha,\beta): |\alpha|+|\beta| = 1\}$ и $W = \{(\alpha,\beta): \max(|\alpha|,|\beta|) \le 1\}$, соответственно. При этом свойство R, очевидно, является инвариантным относительно операций I, 3, 5, 7. Поэтому нам достаточно показать, что применение операции 6 ко множествам $\mathcal{U}_0$, $\mathcal{U}_1$ сохраняет свойство R.

Из определения операции 6 легко следует, что если $\mathcal{U}_0$, $\mathcal{U}_1$ являются шарами симметричных пространств, то $[W, \mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1]$ тоже шар симметричного пространства. Пусть $x_1 > x_2 > 0$ и $x = (x_1, x_2, x_2)$, $y = (x_1, x_2, 0)$. Очевидно,

$$\|x\|_{[W, \mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1]} \ge \|y\|_{[W, \mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1]}. \qquad (42)$$

Если $\|y\|_{[W, \mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1]} \le 1$, то $y = \alpha u + \beta v$, где $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathcal{U}_0$, $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{U}_1$, $(\alpha, \beta) \in W$. Без ограничения общности, $v_3 = u_3 = 0$. В силу предложения 2 из работы Г.Г. Лоренца и Т. Шимогаки [7] можно предполагать выполненными условия $u_1 \ge u_2$, $v_1 \ge v_2$. Тогда $u = (u_1, u_2, u_2) \in \mathcal{U}_0$, $v = (v_1, v_2, v_2) \in \mathcal{U}_1$. Поэтому $x = \alpha u + \beta v$ и

$$\|x\|_{[W, \mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1]} \le \|y\|_{[W, \mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1]}. \qquad (43)$$

Таким образом, из (42), (43) и симметричности $[W, \mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1]$ вытекает, что $[W, \mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1]$ обладает свойством R. Лемма доказана.

Пространства E_0, E_1 и E, рассмотренные нами в теореме 2, таковы, что E_0, E_1 обладают свойством R, но E, хотя и интерполяционно, свойством R не обладает. Следовательно, его единичный шар не может быть получен из единичных шаров пространств E_0, E_1 с помощью операций I – 7, что дает отрицательный ответ на вопрос Б.С. Митягина.

Литература

1. Кальдерон А.П., Промежуточные пространства и интерполяция, комплексный метод. Математика, 9:3 (1965), 56-129.
2. Peetre J., A theory of interpolation of normed spqces, Notas de math., 39(1969).
3. Митягин Б.С., Интерполяционная теорема для модулярных пространств. Мат. сборник, 66:4 (1965), 473-482.
4. Calderon A., Spaces between and and the theorem of Marcinkiewiz, Studia Math., 26(1966), 273-299.
5. Седаев А.А., Об операторах, действующих в интерполяционной паре банаховых пространств. Труды научно-исследовательского института математики ВГУ. Вып. 3, 1971.
6. Хаусдорф Ф., Теория множеств, ГИФМЛ, М.-Л., 1934.
7. Lorentz J., Shimogaki T., Interpolation theorems for operators tors in function spaces, J. Funct. Anal., 2(1968), 31-51.
8. Butzer P., Berens H., Semigroups of operators and approximation, Springer, B.-H.-N.Y., 1967.
9. Bergh J., On the interpolation of normed linear spaces - a necessary condition, Univ. Lung, 6(1971), preprint.

Поступила в редакцию
30. XI 1971 г.