УДК 517.5

О КВАЗИПОЛИНОМАХ ТИПА Л.В.КАНТОРОВИЧА

Р.А.Батиян

В основополагающей работе [I] акад. Л.В.Канторовичем были введены полиномы

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} (n+1) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(x)\, dx \qquad (I)$$

и установлена их сходимость почти везде к суммируемой в промежутке (0,I) функции $f(x)$. В книге [2] установлено, что при $f(x) \in L^p(0,1)$ $(1 \le p \le +\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} \| P_n(x) - f(x) \|_p = 0 ,$$

где $\|\cdot\|_p$ – L^p -норма.

Целью данной работы является построение обобщенных квазиполиномов типа Л.В.Канторовича на $(0,\infty)$, установление их сходимости и рассмотрение применений.

I. Пусть последовательность $\{\lambda_n\}$ подчинена условиям:

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n \le \ldots , \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty, \qquad (2)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} = +\infty .$$

В статье [3] с последовательностью $\{\lambda_n\}$ ассоциирована следующая система функций:

$$\omega_{n,k}(x) = \frac{\prod_{\nu=k+1}^{n} \lambda_\nu}{2\pi i} \int_C \frac{e^{x\zeta}\, d\zeta}{\prod_{\nu=k}^{n} (\zeta + \lambda_\nu)} , \qquad (3)$$

где контур C охватывает все особенности подынтегральной функции.

Система функций $\{\omega_{n,k}(x)\}$, служащая для построения квазиполиномов типа Бернштейна - Хаусдорфа, обладает следующими свойствами:

1) $\sum\limits_{k=0}^{n} \omega_{n,k}(x) = 1$, $\omega_{n,k}(x) \geq 0$, $0 \leq k \leq n$, $n = 0,1,2,\ldots$;

2) $\int\limits_{0}^{\infty} \omega_{n+1,k+1}(x)\,dx = \frac{1}{\lambda_{k+1}}$, $k = 0,1,\ldots,n$;

3) $\omega'_{n,k}(x) = \lambda_{k+1}\,\omega_{n,k+1}(x) - \lambda_k\,\omega_{n,k}(x)$, $k = 1,2,\ldots,n-1$;

$\omega'_{n,0}(x) = \lambda_1\,\omega_{n,1}(x)$; $\omega'_{n,n}(x) = -\lambda_n\,\omega_{n,n}(x)$.

Упомянутые квазиполиномы типа Бернштейна - Хаусдорфа для функции $F(x) \in C[0,\infty]$ определяются равенствами

$$B_n[F(x)] = \sum_{k=0}^{n} F(\sigma_{n,k})\,\omega_{n,k}(x), \qquad (4)$$

$\sigma_{n,k} = \sum\limits_{j=k+1}^{n} \lambda_j^{-1}$ - узлы интерполяции, $\sigma_{n,n} = 0$ (см. [3], а также [4] и [5]).

Относительно этих квазиполиномов известны результаты.

ТЕОРЕМА А. *Если последовательность $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условиям (2), то квазиполиномы (4) являются аппроксимирующими агрегатами для непрерывной на $[0,+\infty]$ функции.*

ТЕОРЕМА Б*). *Для всякой функции $F(x)$, имеющей на $[0,+\infty]$ непрерывную производную, справедливо равенство*

---

*) В работе [6] подобная теорема доказана для отрезка [0,1] с другими узлами интерполяции. Однако после замены переменной и использования того факта, что узлы интерполяции можно заменить другим достаточно плотным множеством, из теоремы этой работы получится теорема Б.

$$\lim_{n\to\infty} B_n'[F(x)] = F'(x) .$$

II. Для построения квазиполиномов типа Канторовича нужно продифференцировать квазиполиномы типа Бернштейна – Хаусдорфа и использовать свойство 3 системы функций $\{\omega_{n,k}(x)\}$. После несложных вычислений получим

$$\frac{d}{dx} B_n[F(x)] = \sum_{k=0}^{n} F(\sigma_{n,k})\,\omega'_{n,k}(x) =$$

$$= F(\sigma_{n,0})\lambda_1\omega_{n,1}(x) - F(\sigma_{n,n})\lambda_n\omega_{n,n}(x) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1} F(\sigma_{n,k})\left[\lambda_{k+1}\omega_{n,k+1}(x) - \lambda_k\omega_{n,k}(x)\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[F(\sigma_{n,k-1}) - F(\sigma_{n,k})\right]\lambda_k\,\omega_{n,k}(x) .$$

Меняя индекс, придем к равенству

$$B'_{n+1}[F(x)] = \sum_{k=0}^{n}\left[F(\sigma_{n+1,k}) - F(\sigma_{n+1,k+1})\right]\lambda_{k+1}\,\omega_{n+1,k+1}(x). \quad (5)$$

Пусть функция $F(x)$ является неопределенным интегралом от своей производной, т.е.

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \;, \quad F'(x) = f(x) .$$

Тогда

$$F(\sigma_{n+1,k}) = \int_0^{\sigma_{n+1,k}} f(t)\,dt \;, \quad F(\sigma_{n+1,k+1}) = \int_0^{\sigma_{n+1,k+1}} f(t)\,dt \;,$$

$$0 < \sigma_{n+1,k+1} < \sigma_{n+1,k} \;, \; (k=0,1,\dots,n);\; \sigma_{n+1,n+1} = 0.$$

$$\sigma_{n+1,k} - \sigma_{n+1,k+1} = \frac{1}{\lambda_{k+1}} \quad .$$

Принимая во внимание эти равенства, запишем $B'_{n+1}[F(x)]$ в виде

$$B'_{n+1}[F(x)] = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{k+1} \omega_{n+1,k+1}(x) \int_{\sigma_{n+1,k+1}}^{\sigma_{n+1,k}} f(t)\,dt \stackrel{def}{\equiv} \mathcal{K}_n(f), \quad (6)$$

где $\{\omega_{n+1,k+1}(x)\}$ определяются формулами (3).

Квазиполиномы $\mathcal{K}_n(f)$ будем называть квазиполиномами типа Л.В.Канторовича для функции $f(x) \in L^p(0,\infty)$, $p \geq 1$. После надлежащих преобразований из квазиполиномов (5)-(6) можно получить классические полиномы Л.В.Канторовича (I). Действительно, для этого нужно сделать замену переменной $x = -\ln t$, $t \in [0,1]$, положить $\lambda_k = k$ и учесть, что

$$\omega_{n+1,k+1}(-\ln t) = C_{n+1}^{k+1}\, t^{k+1}(1-t)^{n-k},$$

а из формулы, определяющей постоянную Эйлера

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} - \ln n\right) = C,$$

преобразовать $\sigma_{n+1,k}$ и $\sigma_{n+1,k+1}$.

Для установления сходимости квазиполиномов (6) рассматриваются два случая.

а) Пусть в каждой точке $x \in (0,\infty)$ функция $f(x)$ является производной своего **неопределенного** интеграла, тогда почти везде

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{K}_n(f) = f(x).$$

Действительно, в этом случае на основании теоремы Б справедливо

$$\mathcal{K}_n(f) = B'_{n+1}[F(x)] \to F'(x) = f(x) \quad (n\to\infty).$$

б) Пусть $f(x) \in L^p(0,\infty)$. В этом случае квазиполиномы Канторовича записываются в виде сингулярного интеграла и сходимость осуществляется с помощью теоремы Орлича [2].

Ш. В качестве приложений квазиполиномов типа Канторовича отметим следующие.

а) Квазиполиномы типа Канторовича $\mathcal{K}_n(f)$ отображают L^p само на себя и

$$\| \mathcal{K}_n(f) \| \le M \| f \|_p .$$

б) Для того чтобы интегрируемая функция $f(x)$ принадлежала классу $L^p(0,\infty)$ ($p > 1$), необходимо и достаточно, чтобы нормы $\mathcal{K}_n(f)$ образовывали ограниченное множество в $L^p(0,\infty)$.

в) Ограниченное множество $\Gamma = \{f\} \subset L^p$ будет компактом тогда и только тогда, если для всех $f \in \Gamma$

$$\| f - \mathcal{K}_n(f) \|_p \to 0 , \quad n \to \infty .$$

В заключение отметим, что квазиполиномы типа Канторовича находят эффективное применение при решении обобщенной проблемы Ф.Хаусдорфа в классах L^p и L^∞ :

$$\mu_n = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_n x} \varphi(x)\, dx , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\varphi(x) \in L^p(0, +\infty) , \quad 1 \le p \le +\infty . \qquad (7)$$

Если $\lambda_n = n$, после замены $e^{-x} = t$ придем к классической проблеме моментов Ф.Хаусдорфа [7].

Проблема моментов (7) рассматривалась в работе [8] без использования приближающих агрегатов $\mathcal{K}_n(f)$. Отметим, что решение проблемы моментов (7) с помощью квазиполиномов типа Канторовича осуществляется точно так же, как и решение подобной проблемы в классе ограниченной вариации, с привлечением квазиполиномов Бернштейна - Хаусдорфа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л.В. О некоторых разложениях по полиномам в форме С.Н.Бернштейна, I // Докл. АН СССР. Сер.А. - 1930.- № 21. - С.562-568.
2. Lorentz G. Bernstein polynomials. - Toronto, 1953.
3. Багиян Р.А. Квазиполиномы типа Бернштейна - Хаусдорфа, ассоциированные с функциями типа Миттаг-Леффлера и $\langle \rho, \mu \rangle$ - проблема моментов // Докл. АН АрмССР. - 1975. - Т.61, № 5. - С.129-136.
4. Гельфонд А.О. Об обобщенных полиномах С.Н.Бернштейна // Изв. АН СССР. Сер. мат. - 1950. - Т.14, № 5. - С.413-420.

5. Hirschman J.J., Wilder D.V. Generalized Bernstein polynomials // Duke Math. J. - 1949. - V.16, N 3. - P.433-437.
6. Баладян Г.В. О производной квазиполинома Бернштейна // Изв. АН АрмССР. Сер. мат. - 1961. - Т.14, № 1. - С.5-16.
7. Hausdorf F. Momentprobleme für ein ende. // Math. Z.- 1923. - V.16. - P.220-248.
8. Баладян Г.В. Обобщение хаусдорфовского метода суммирования рядов // Изв. АН АрмССР. Сер. мат. - 1959. - Т.12, № 6.- С.3-35.

Поступила в ред.-изд. отдел
10.11.1985 г.