УДК 513.88

КВАЗИВЫПУКЛОСТЬ ЗНАЧЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ, ПОРОЖДЕННЫХ САМОСОПРЯЖЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Ю.Ш.Абрамов

В [I] исследовался класс самосопряженных операторных пучков волноводного типа

$$L(k,\theta)=k^2A+kB+C-\theta D, \qquad (I)$$

квадратичных по спектральному (волновому) параметру $k\in C$ и линейных по (частотному) параметру $\theta>0$, где A,B,C и D - ограниченные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве H. С пучком (I) связаны разнообразные нелинейные экстремальные задачи (см. [I-2]). Здесь мы рассмотрим один класс задач с множеством допустимых векторов, зависящим от параметра θ, и покажем, что значения этих задач представляют собой квазивогнутые (квазивыпуклые) функции. Эти функции играют важную роль при классификации пучков (I). Ниже, не оговаривая особо, используются обозначения и терминология работы [I].

Допустим, что операторы $A, D>0$, и рассмотрим в пространстве H функционал

$$\Phi(x)=\frac{4(Ax,x)(Cx,x)-(Bx,x)^2}{4(Ax,x)(Dx,x)}, \quad x\neq 0,$$

который обладает следующим основным свойством:

$$\Phi(\alpha x)>0, \ \alpha\neq 0 - \text{скаляр}, \quad x\in H\setminus\{0\}. \qquad (2)$$

Этим же свойством обладает и функционал

$$\tau(x) = -\frac{(Bx, x)}{2(Ax, x)} \quad .$$

В [I], в частности, изучались следующие две экстремальные задачи:

$$\tau(x) \longrightarrow \sup \ , \quad \Phi(x) = \theta \ ; \tag{3}$$

$$\tau(x) \longrightarrow \inf \ , \quad \Phi(x) = \theta \ ; \tag{4}$$

где $\theta > \theta_* \geqslant 0$.

Обозначим через $\hat{\delta}_+(\theta)$ и $\hat{\delta}_-(\theta)$ значения задач (3) и (4) соответственно:

$$\hat{\delta}_+(\theta) = \sup_{\Phi(x)=\theta} \tau(x) \ , \quad \hat{\delta}_-(\theta) = \inf_{\Phi(x)=\theta} \tau(x) \ .$$

Наша основная цель – доказать следующий результат.

ТЕОРЕМА. Функция $\hat{\delta}_+$ является квазивогнутой на (θ_*, ∞), а функция $\hat{\delta}_-$ – квазивыпуклой.

Напомним определение квазивыпуклости и квазивогнутости. Если x и y – элементы некоторого линейного пространства, то через $[x, y]$ будем обозначать отрезок в этом пространстве, соединяющий x с y. Если x и y – линейно-независимы, то через $]x, y[$ будем обозначать соответствующий интервал. Вещественную функцию f, заданную на выпуклом множестве F линейного пространства, называют квазивыпуклой на F [3], если для любых $x_1, x_2 \in F$

$$f(x) \leqslant \max\{f(x_1), f(x_2)\} \ , \quad x \in [x_1, x_2],$$

и квазивогнутой, если

$$f(x) \geqslant \min\{f(x_1), f(x_2)\} \ , \quad x \in [x_1, x_2] \ .$$

Лемма I. Допустим, что A_0, A – ограниченные самосопряженные операторы, $A > 0$, и векторы $u_1, u_2 \neq 0$ такие, что

$$\frac{(A_0 u_1, u_1)}{(A u_1, u_1)} \neq \frac{(A_0 u_2, u_2)}{(A u_2, u_2)} \quad . \tag{5}$$

Тогда для $\varepsilon = 1$ или -1 и для любого u из интервала $]u_1, \varepsilon u_2[$

$$\frac{(A_0 u, u)}{(Au, u)} > \min\left\{\frac{(A_0 u_1, u_1)}{(Au_1, u_1)}, \frac{(A_0 u_2, u_2)}{(Au_2, u_2)}\right\}. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что из (5) следует линейная независимость u_1 и u_2. Обозначим через γ правую часть (6) и рассмотрим оператор $C = A_0 - \gamma A$. Для $i = 1, 2$ имеем

$$(Cu_i, u_i) = (Au_i, u_i)\left(\frac{(A_0 u_i, u_i)}{(Au_i, u_i)} - \gamma\right) \geqslant 0,$$

причем здесь есть хотя бы одно строгое неравенство. Выберем ε равным I или -I таким, что действительная часть (Cu_1, u_2) неотрицательна. Возьмем $u = \alpha u_1 + (1-\alpha)\varepsilon u_2$, где $\alpha \in (0, 1)$, тогда

$$(Cu, u) = \alpha^2 (Cu_1, u_1) + 2\alpha(1-\alpha)\varepsilon \operatorname{Re}(Cu_1, u_2) +$$

$$+ (1-\alpha)^2 (Cu_2, u_2) \geqslant \alpha^2 (Cu_1, u_1) + (1-\alpha)^2 (Cu_2, u_2).$$

Отсюда уже следует (6).

Доказательство следующей леммы аналогично, но учитывается то, что среди чисел (Cu_i, u_i) могут быть все нули и допускаются $\alpha = 1$ и $\alpha = 0$.

ЛЕММА 2. Допустим, что A_0, A – ограниченные самосопряженные операторы, $A > 0$ и векторы u_1, u_2 линейно-независимы. Тогда для $\varepsilon = 1$ или -1 выполняется неравенство (6).

ЛЕММА 3. Допустим, что для ненулевых векторов u_1, u_2 значения функционала Φ различны: $\Phi(u_1) \neq \Phi(u_2)$. Если и

$$\frac{(Bu_1, u_1)}{(Au_1, u_1)} \neq \frac{(Bu_2, u_2)}{(Au_2, u_2)}, \quad (7)$$

то для любого θ, находящегося строго между $\Phi(u_1)$ и $\Phi(u_2)$, справедливы неравенства

$$\hat{\delta}_+(\theta) > \min\{r(u_1), r(u_2)\},$$
$$\hat{\delta}_-(\theta) < \max\{r(u_1), r(u_2)\}. \qquad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $A_\circ = -\frac{1}{t}B$ и согласно лемме I найдем $\varepsilon = \pm 1$ такое, что

$$r(u) > \min\{r(u_1), r(u_2)\}, \ u \in]u_1, \varepsilon u_2[. \quad (9)$$

Заметим, что из (7) следует линейная независимость векторов u_1 и u_2. Положим $z_\alpha = \alpha u_1 + (1-\alpha)\varepsilon u_2$ и рассмотрим функцию $f(\alpha) = \Phi(z_\alpha) - \theta$, непрерывную на $[0, 1]$. Поскольку θ находится строго между $\Phi(u_1)$ и $\Phi(u_2)$, то $f(0) = \Phi(u_2) - \theta$ и $f(1) = \Phi(u_1) - \theta$ имеют разные знаки, поэтому для некоторого $\alpha_\circ \in (0, 1)$ значение $\Phi(z_{\alpha_\circ}) = \theta$. Но тогда $u_\circ = z_{\alpha_\circ}$ принадлежит $]u_1, \varepsilon u_2[$. Теперь из (9) и определения $\hat{\delta}_+(\theta)$ имеем

$$\hat{\delta}_+(\theta) \geq r(u_\circ) > \min\{r(u_1), r(u_2)\}.$$

Второе неравенство в (8) доказывается аналогично.

Используя лемму 2 и предыдущие рассуждения, получим следующий результат.

ЛЕММА 4. Допустим, что векторы u_1 и u_2 линейно-независимы. Тогда для любого θ, находящегося (может быть, и нестрого) между $\Phi(u_1)$ и $\Phi(u_2)$, справедливы неравенства

$$\hat{\delta}_+(\theta) \geq \min\{r(u_1), r(u_2)\},$$
$$\hat{\delta}_-(\theta) \leq \max\{r(u_1), r(u_2)\}.$$

Докажем теперь теорему. Покажем, например, что функция $\hat{\delta}_+$ квазивогнута. Допустим, что $\theta_1 < \theta_2$, и найдем векторы $u_i^{(n)}$ такие, что

$$\hat{\delta}_+(\theta_i) = \lim r(u_i^{(n)}), \ \Phi(u_i^{(n)}) = \theta_i, \ i = 1, 2; \ n = 1, 2, \ldots$$

Поскольку $\theta_1 \neq \theta_2$ и Φ удовлетворяет условию (2), то элементы $u_1^{(n)}$ и $u_2^{(n)}$ линейно-независимы для любого n. Согласно лемме 4 для любого $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ справедливо неравенство

$$\hat{\delta}_+(\theta) \geq \min \{ \tau(u_1^{(n)}), \tau(u_2^{(n)}) \} \quad \forall n .$$

Осталось перейти здесь к пределу при $n \to \infty$.

На самом деле, как видно из приведенных доказательств, теорема справедлива при значительно более общих предположениях. А именно, в задачах (3)-(4) Φ может быть любым непрерывным на $H \setminus \{0\}$ функционалом, удовлетворяющим условию (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамов Ю.Ш. Двухпараметрические операторные пучки волноводного типа // Докл. АН СССР. - 1986. - Т.286, № 4. - С. 777-781.
2. Абрамов Ю.Ш. Вариационные методы в теории операторных пучков. Спектральная оптимизация. - Л.: Изд-во ЛГУ, 1983.
3. Зангвилл У.И. Нелинейное программирование. - М.: Советское радио, 1973.

Поступила в ред.-изд. отдел
4.01.1987 г.