УДК 517.98

ОСКОЛКИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Е.В.Колесников

Пусть X , E – архимедовы векторные решетки, причем E порядково полна. Линейный оператор $\Phi : X \to E$ называется регулярным, если он представим в виде разности двух положительных. Рассмотрим пространство $L_r = L_r(X,E)$ регулярных операторов. Известно, что L_r – K-пространство.

При исследовании структуры пространства L_r возникает вопрос о строении алгебры осколков положительного оператора. Пусть $0 \leqslant T, \Phi \in L_r$. Напомним, что T называется осколком Φ , если $T \wedge (\Phi - T) = 0$. Нетрудно показать, что совокупность $\mathcal{E}(\Phi)$ всех осколков оператора Φ образует полную булеву алгебру.

В случае, если X – K-пространство (или решетка с проекциями), элементарными осколками назовем операторы вида $\delta \circ \Phi \circ \pi$, где $\delta \in P_\sigma(E)$, $\pi \in P_\sigma(X)$ – проекторы в соответствующих пространствах. В работах [1-3] показано, что элементарные осколки порождают всю алгебру $\mathcal{E}(\Phi)$. Если же X – векторная решетка, то осколки указанного вида, вообще говоря, отсутствуют. В данной заметке рассматривается класс осколков, порожденных идеалами векторной решетки X .

Подрешетка $L \subset X$ называется идеалом, если выполнено условие нормальности, т.е. для произвольных $x \in X$ и $\ell \in L$ из неравенства $|x| \leqslant |\ell|$ следует, что $x \in L$.

Пусть L – идеал в X . Рассмотрим отображение $\pi_L \Phi : X \to E$, задаваемое формулой

$$(\pi_L \Phi)x = \sup\{\Phi(x \wedge \ell) : \ell \in L\} \quad (x \in X^+);$$

$$(\pi_L \Phi)x = (\pi_L \Phi)x^+ - (\pi_L \Phi)x^- \quad (x \in X).$$

I. Справедливо следующее соотношение: $\mathcal{K}_L\Phi \in \mathcal{E}(\Phi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Изотонность отображения $\mathcal{K}_L\Phi$ очевидна, так как для любого $x \in X^+$ имеем $(\mathcal{K}_L\Phi)x \geq 0$.

Проверим аддитивность. Для произвольных $x, y \in X^+$, $\ell \in L^+$ выполнены неравенства $(x+y)\wedge \ell \leq x\wedge \ell + y \wedge \ell$, $(x+y)\wedge 2\ell \geq$ $\geq x\wedge \ell + y\wedge \ell$.

Заметим, что $2\cdot \ell \in L$, отсюда

$$\Phi((x+y)\wedge \ell) \leq \Phi(x\wedge \ell) + \Phi(y\wedge \ell) \leq \mathcal{K}_L\Phi(x) + \mathcal{K}_L\Phi(y);$$

$$\Phi(x\wedge \ell) + \Phi(y\wedge \ell) \leq \Phi((x+y)\wedge 2\ell) \leq \mathcal{K}_L\Phi(x+y).$$

Следовательно, $\mathcal{K}_L\Phi(x+y) = \mathcal{K}_L\Phi(x) + \mathcal{K}_L\Phi(y)$.

Итак, $\mathcal{K}_L\Phi \in L_+^{\sim}$. Пусть $x \in X^+$, тогда

$$\mathcal{K}_L\Phi \wedge (\Phi - \mathcal{K}_L\Phi)x = \inf\{\mathcal{K}_L\Phi(x-y) + (\Phi - \mathcal{K}_L\Phi)x : 0 \leq y \leq x\}.$$

Следовательно, для произвольного $\ell \in L^+$

$$\mathcal{K}_L\Phi \wedge (\Phi - \mathcal{K}_L\Phi)x \leq \mathcal{K}_L\Phi(x - x\wedge \ell) + (\Phi - \mathcal{K}_L\Phi)\, x\wedge \ell =$$

$$= (\mathcal{K}_L\Phi(x) - \mathcal{K}_L\Phi(x\wedge \ell)) + (\Phi(x\wedge \ell) - \mathcal{K}_L\Phi(x\wedge \ell)) = 0.$$

Кроме того, как видно, $\mathcal{K}_L\Phi, \Phi - \mathcal{K}_L\Phi \geq 0$, поэтому $\mathcal{K}_L\Phi \wedge (\Phi - \mathcal{K}_L\Phi) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Осколок $\mathcal{K}_L\Phi$ оператора Φ можно определить для любого подмножества $L \subset X$ такого, что для произвольного $n \in N$ если $\ell \in L$, то $n\ell \in L$. Но очевидно, что $\mathcal{K}_L = \mathcal{K}_{i(L)}$, где $i(L)$ – наименьший идеал, содержащий L (т.е. $i(L) = \bigcup\{[-\ell, \ell] : \ell \in L\}$.

2. Отметим несколько очевидных свойств оператора $\mathcal{K}_L\Phi$:

а) $\mathcal{K}_L\Phi(\ell) = \Phi(\ell)$ для любого $\ell \in L$;

б) если $\Phi|_L \equiv 0$, то $\Phi|_{L^{dd}} \equiv 0$, где L^{dd} – компонента, порожденная L;

в) если оператор Φ порядково непрерывен ($\Phi \in L_n$), то $\mathcal{K}_L\Phi(x) = \Phi(x)$ для любого $x \in L^{dd}$;

г) если для некоторого идеала M имеем $M \cap L = 0$, то $\mathcal{K}_L\Phi \wedge \mathcal{K}_M\Phi = 0$;

д) если L – компонента в X и существует проектор δ_L на L, то $\mathcal{K}_L\Phi = \Phi \circ \delta_L$.

Обозначим символом $J = J(X)$ множество всех идеалов в решетке X , упорядоченное по включению. Известно, что J – полная решетка [4]. Кроме того, для любых $L, M \in J$

$$(L \wedge M)^+ = \{ \ell \wedge m : \ell \in L^+, m \in M^+ \};$$

$$(L \vee M)^+ = \{ \ell \vee m : \ell \in L^+, m \in M^+ \}.$$

Пусть $P_\sigma(L_\tau)$ – булева алгебра проекторов в K – пространстве L_τ . Рассмотрим отображение $\mathfrak{K} : J \to P_\sigma(L_\tau)$

$$\mathfrak{K} : L \to \mathfrak{K}_L \quad (L \in J);$$

$$\mathfrak{K}_L : \varphi \to \mathfrak{K}_L \varphi \quad (\varphi \in L_\tau^+).$$

3. Отображение $\mathfrak{K}$ является решеточным гомоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L, M \in J$, $\varphi \in L_\tau^+$ и $x \in X^+$. Заметим, что $\mathfrak{K}_L \varphi \wedge \mathfrak{K}_M \varphi = \mathfrak{K}_L(\mathfrak{K}_M \varphi)$, поэтому

$$\mathfrak{K}_{L \wedge M} \varphi(x) = \sup \{ \varphi(x \wedge \ell \wedge m) : \ell \in L, m \in M \} =$$

$$= \sup \{ \mathfrak{K}_L \varphi(x \wedge m) : m \in M \} = \mathfrak{K}_M(\mathfrak{K}_L \varphi) x .$$

Следовательно,

$$\mathfrak{K}_{L \wedge M} = \mathfrak{K}_L \wedge \mathfrak{K}_M. \qquad (\mathrm{I})$$

Теперь покажем, что $\mathfrak{K}_{L \vee M} = \mathfrak{K}_L \vee \mathfrak{K}_M$. Сначала заметим, что справедливы несложные равенства

$$(\mathfrak{K}_L \vee \mathfrak{K}_M)\varphi + (\mathfrak{K}_L \wedge \mathfrak{K}_M)\varphi = \mathfrak{K}_L \varphi + \mathfrak{K}_M \varphi,$$

$$\mathfrak{K}_{L \vee M} \varphi(x) = \sup \{ \varphi(x \wedge (\ell \vee m)) \}, \qquad (2)$$

$$\mathfrak{K}_{L \wedge M} \varphi(x) = \sup \{ \varphi(x \wedge (\ell \wedge m)) \}.$$

Кроме того,

$$(x \wedge \ell) \wedge (x \wedge m) + (x \wedge \ell) \vee (x \wedge m) = (x \wedge \ell) + (x \wedge m).$$

Следовательно,

$$\mathfrak{K}_{L \vee M} \varphi(x) + \mathfrak{K}_{L \wedge M} \varphi(x) = \mathfrak{K}_L \varphi(x) + \mathfrak{K}_M \varphi(x),$$

поэтому из (I) и (2) получаем $\mathfrak{K}_{L \vee M} = \mathfrak{K}_L \vee \mathfrak{K}_M$.
Утверждение доказано.

Пусть $(L_\alpha) \subset J$. Так как J – полная решетка, то существует $L = \sup L_\alpha$. Рассмотрим множество $(L_\beta) \subset J$, полученное из (L_α) присоединением точных верхних границ конечных множеств. Как нетрудно показать, $L = \sup L_\beta = \cup L_\beta$.

4. Отображение $\mathcal{K}$ сохраняет точные верхние границы: $\mathcal{K}_{\sup L_\alpha} = \sup \mathcal{K}_{L_\alpha}$.

Действительно, для любых $\Phi \in L_n^+$, $x \in X^+$

$$\sup \mathcal{K}_{L_\alpha} \Phi(x) = \sup \mathcal{K}_{L_\beta} \Phi(x) =$$

$$= \sup(\sup\{\Phi(x \wedge \ell_\beta) : \ell_\beta \in L_\beta\}) =$$

$$= \sup\{\Phi(x \wedge \ell) : \ell \in \cup L_\beta = L\} = \mathcal{K}_L \Phi(x) .$$

Заметим, что аналогичное утверждение для нижних граней, вообще говоря, не верно.

Напомним, что оператор $T \in L_n^+$ называется анормальным, если для некоторого идеала $L \in J$ такого, что $L^{dd} = X$, имеем $T|_L \equiv 0$. Совокупность всех анормальных операторов обозначим через $L_a = L_a(X, E)$. Известно [5], что $L_a = L_n$. Таким образом, существует проектор $\mathcal{K}_n \in P_\sigma(L_n)$ на компоненту L_n порядково непрерывных операторов, и для каждого оператора $\Phi \in L_n^+$ имеем $\Phi_n = \mathcal{K}_n \Phi \in L_n$.

Пусть $J_c = \{L \in J : L^{dd} = X\}$ – множество фундаментов векторной решетки X.

5. Справедливо следующее равенство:

$$\mathcal{K}_n = \inf\{\mathcal{K}_L : L \in J_c\} .$$

Положим $\mathcal{K} = \inf\{\mathcal{K}_L : L \in J_c\}$. Нужно показать, что $\mathcal{K} = \mathcal{K}_n$. Пусть $T \in L_a^+$, тогда для некоторого идеала $L \in J_c$ имеем $T|_L \equiv 0$ и, следовательно (см. 2б), $\mathcal{K}_L T = 0$, поэтому $\mathcal{K} T = 0$. Ясно, что $\mathcal{K} T$ – нулевой оператор для любого $T \in L_a$. Отсюда получаем, что $\mathcal{K} \leq \mathcal{K}_n$.

Пусть теперь $\Phi_n = \mathcal{K}_n \Phi$. Так как Φ_n – порядково непрерывный оператор, то $\mathcal{K}_L \Phi_n = \Phi_n$ для любого $L \subset J_c$ (см. 2в). Следовательно, $\mathcal{K} \Phi_n = \inf \mathcal{K}_L \Phi = \Phi_n$. Стало быть, $\mathcal{K} \mathcal{K}_n = \mathcal{K}_n$ и $\mathcal{K} \geq \mathcal{K}_n$. Равенство доказано.

СЛЕДСТВИЕ (ср.[6]).

$$\Phi_n x = \inf_L \sup_l \{\Phi(x \wedge l) : l \in L \in J_c\} \quad (x \in X^+).$$

Пусть $x \in X^+$, $i(x) = \{y \in X : \exists n \in N \ |y| \leq nx\}$ – идеал, порожденный элементом x. Ясно, что

$$\mathfrak{N}_{i(x)} \Phi(z) = \sup\{\Phi(nx \wedge z) : n \in N\} \quad (z \in X^+).$$

Рассмотрим множество $\mathcal{N} \subset P_\sigma(L_\tau)$ проекторов вида $\bigvee_{k=1}^{n} \delta_k \circ \mathfrak{N}_{i(x_k)}$, где $(\delta_k) \subset P_\sigma(E), (x_k) \subset X^+, n \in N$. Обозначим символом $\mathcal{N}^\downarrow$ множество проекторов вида $\mathfrak{N} = \inf \mathfrak{N}_\alpha$, где $(\mathfrak{N}_\alpha) \subset \mathcal{N}$. Соответственно $\mathcal{N}^{\downarrow\uparrow} = (\mathcal{N}^\downarrow)^\uparrow = \{\mathfrak{N} = \sup \mathfrak{N}_\alpha : (\mathfrak{N}_\alpha) \subset \mathcal{N}^\downarrow\}$.

6. Можно показать, что справедливо следующее равенство:

$$P_\sigma(L_\tau) = \mathcal{N}^{\downarrow\uparrow}.$$

Пусть X – K-пространство, $\mathfrak{N}_{[x]} \in P_\sigma(L_\tau)$ – элементарный проектор вида $\mathfrak{N}_{[x]} \Phi = \Phi \circ \rho_x$, где $\rho_x \in P_\sigma(X)$ – проектор на компоненту $\{x\}^{dd}$.

Нетрудно показать, что

$$\mathfrak{N}_{i(x)} = \inf_t \{\sup_n \mathfrak{N}_{[(nx-t)^+]} : t \in \{x\}^{dd}\}. \tag{3}$$

Обозначим символом $\mathcal{K}$ множество проекторов вида $\delta \circ \mathfrak{N}_{[x]}$, где $\delta \in P_\sigma(E)$, $x \in X^+$. Из (3) видно, что $\mathcal{N} \subset \mathcal{K}^{\uparrow\downarrow}$. Следовательно, $\mathcal{N}^{\downarrow\uparrow} \subset \mathcal{K}^{\uparrow\downarrow\uparrow}$, поэтому верно равенство

$$P_\sigma(L_\tau) = \mathcal{K}^{\uparrow\downarrow\uparrow}.$$

(ср. [I–3]).

ЛИТЕРАТУРА

I. Pagter R. The components of a positive operator // Ingad. Math. – I983. – V.45, N 2. – P.229–24I.

2. Aliprantis C.D., Burkinschaw O. The components of a positive operator // Math. Z. – I983. – V.I84, N 2. – P. 245–257.

3. Кусраев А.Г., Стрижевский В.З. Решеточно нормированные пространства и мажорированные операторы // Исследования по геометрии и анализу. - Новосибирск: Наука, 1986. - С. 56-102.
4. Акилов Г.П., Кутателадзе С.С. Упорядоченные векторные пространства. - Новосибирск: Наука, 1978.
5. Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств.- М.: Физматгиз, 1961.
6. Aliprantis C.D., Burkinschaw O. On positive order continuous operators // Indag. Math. - 1983. - V.45, N1. - P.1-6.

Поступила в ред.-изд. отдел
2.03.1987 г.