УДК 513.88

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ СИММЕТРИЧНЫХ ИДЕАЛОВ И ПРОСТРАНСТВ

А.А.Меклер

В теории интерполяции линейных операторов важную роль играют симметричные пространства (с.п.) функций на $[0,1]$ [1]. Для каждого с.п. X конус X_*, состоящий из всех неотрицательных невозрастающих функций из X, полностью определяет весь состав элементов пространства X в том смысле, что если $Y_* = X_*$ для некоторого с.п. Y, то Y и X состоят из одних и тех же функций.

Пусть $\mathcal{A}$ - некоторая σ-подалгебра σ-алгебры всех измеримых по Лебегу подмножеств отрезка $[0,1]$; обозначим через $X(\mathcal{A})$ совокупность всех $\mathcal{A}$-измеримых функций из X_*. Возникает вопрос: как должны быть связаны с.п. X и σ-подалгебра $\mathcal{A}$ для того, чтобы конус $X(\mathcal{A})$, более "тощий", чем X_*, в каком-то смысле определял состав элементов с.п. X ? В этой связи представляется естественным следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathfrak{X}$ - некоторый класс с.п., $X \in \mathfrak{X}$. Будем говорить, что σ-подалгебра $\mathcal{A}$ *идентифицирует* X *в классе* $\mathfrak{X}$, если для любого с.п. $Y \in \mathfrak{X}$, не совпадающего по составу элементов с X, конус $Y(\mathcal{A})$ отличен от конуса $X(\mathcal{A})$.

Это определение дано в [2] для случая, когда σ-подалгебра $\mathcal{A}$ порождена разбиением отрезка $[0,1]$ на промежутки $[t_n, t_{n-1}], n \geq 1$, где $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ - строго убывающая к нулю последовательность, $t_0 = 1$. В [2] получено условие, необходимое и достаточное для того, чтобы такое разбиение идентифицировало пространство Марцинкевича M_ψ в классе всех пространств Марцинкевича (см. теорему М §2). В замечании 3 это условие уточняется для некоторых важных частных случаев.

Из определения видно, что идентификация есть способ топологического (а не геометрического) описания с.п., так как этот способ связан лишь с составом элементов с.п. (а не с его нормой). Исходя из этого переносим определение идентификации на случай симметричных идеалов (с.и.), т.е. на более общий случай, ибо по определению симметричного пространства оно как раз и есть симметричный идеал с заданной на нем (монотонной симметричной банаховой) нормой. Наша теорема 4 обобщает для с.и. теорему 3′ [2].

Основной результат работы - теорема 3 об одном случае идентификации в классе всех главных с.и. (главным с.и., порожденным некоторой функцией f, мы называем наименьший с.и., содержащий f). Эта теорема, как и теорема 6, вытекает из теорем I и 2, которые представляют, на наш взгляд, и самостоятельный интерес; в частности, теорема I усиливает теорему В [3].

§I. Определения и предварительные сведения

I. Всюду в дальнейшем отрезок [0,I] рассматривается с мерой Лебега λ; $S(0,1)$ и $L_1(0,1)$ - обычные пространства всех измеримых п.в. конечных (соответственно суммируемых) вещественных функций на [0,I] (с отождествлением совпадающих п.в.). Для $x\in S(0,1)$ через x^* обозначается невозрастающая на [0,I] функция, равноизмеримая с $|x|$; если $x\in L_1(0,1)$, то

$$x^{**}(t)=t^{-1}\int_0^t x^*\,d\lambda, \quad t\in(0,1].$$

Очевидно, что $0\leq x^*\leq x^{**}=(x^{**})^*$. Индикаторная функция измеримого множества A обозначается через 1_A.

Пусть $0<a\leq 1$. Оператор растяжения $\rho_a: S(0,1)\to S(0,1)$ задается формулой $(\rho_a x)(t)=x(at)$, $t\in[0,1]$. Очевидно, что

$$x^*\leq\rho_a x^* \quad ; \text{ если } x\in L_1(0,1), \text{ то } \rho_a x^{**}\leq a^{-1}x^{**}. \qquad \text{(I)}$$

2. Пусть Θ - произвольное множество, а u и v - две вещественные неотрицательные функции на Θ. Мы называем их эквивалентными (пишем $u\sim v$), если найдется такая константа $c>0$, что $c^{-1}u(\theta)\leq v(\theta)\leq cu(\theta)$, $\theta\in\Theta$. За-

фиксируем монотонную последовательность $u = \{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ положительных чисел. Будем называть ее равномерной, если $\{u_n\}_{n=0}^{\infty} \sim \{u_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$, и неравномерной – противном случае. Неравномерную последовательность $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ называют чисто неравномерной, если отношение u_n / u_{n+1} имеет предел (он необходимо равен 0 или ∞).

Если $F: R_+^1 \to R_+^1$ – положительная монотонная функция, то последовательность $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется F-равномерной, если равномерной является последовательность $\{F(u_n)\}_{n=0}^{\infty}$.

Строго убывающую к нулю последовательность $\mathcal{T}=\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$, $t_0 = 1$, называем интервальным разбиением отрезка [0,1] (и.р.) и обозначаем $\mathcal{T} = \sigma(t_n)$. Все понятия, связанные с равномерностью, переносятся на $\mathcal{T}$ как на монотонную последовательность положительных чисел.

3. Векторное многообразие X в $S(0,1)$ называется симметричным идеалом (с.и.), если выполнены следующие две аксиомы:

$i)$ $x \in X$, $y \in S(0,1)$, $|y| \leq |x|$ влечет $y \in X$;

$ii)$ $y \in S(0,1)$, $y^* \in X$ влечет $y \in X$;

Пусть $x \in S(0,1)$. Наименьший с.и., содержащий x, называем главным с.и., порожденным x, и обозначаем N_x. Нетрудно видеть, что

$$N_x = \{y \in S(0,1) : y^* \leq a^{-1} \rho_a x^* \text{ для подходящего } a = a(y) \in (0,1]\}.$$

Отметим, что отсюда вытекает включение $\rho_a N_x \subset N_x$ для любого $a \in (0,1]$.

Совокупность всех главных идеалов обозначается через $\mathcal{N}$.

4. Всюду в дальнейшем символы f и g закреплены для обозначения неотрицательных невозрастающих функций из $S(0,1)$. Функцию f будем называть слабо регулярной (обозначение $f \in (wR)$), если найдется такое число $a \in (0,1)$, что $\rho_a f \sim f$. Легко видеть, что в этом случае $\rho_b f \sim f$ для любого $b \in (0,1]$.

Таким образом, для слабо регулярных функций f, причем только для них, справедливо равенство:

$$N_f = \{y \in S(0,1) : y^* \leq cf,\ c = c(y) > 0\}.$$

Отметим важность свойства слабой регулярности: в [4] доказано, что $f \in (wR)$ тогда и только тогда, когда $\ln f \in BMO(0,1)$.

Назовем функцию $f \in L_1(0,1)$ регулярной (пишем $f \in (R)$), если $f \sim f^{**}$. По существу регулярность означает выполнение для f (A_1) -условия Макенхаута [5].

Известно, что $f \in (R)$ тогда и только тогда, когда $f^{**} \in (R)$ [6]. Там же доказано, что регулярность f равносильна выполнению условия:

$$\text{найдется такое число } a \in (0,1), \text{ что } \quad \rho_a f \le c f, \text{ где } 0 < c < a^{-1}. \tag{2}$$

Из (2) вытекает, что для любой слабо регулярной функции f найдется достаточно малое число $\rho > 0$ такое, что $f^{\rho} \in (R)$.

Из (I) следует, что свойство (R) сильнее свойства (wR).

Для функции $f \in S(0,1)$ и и.р. $\mathcal{T} = \sigma(t_n)$ положим

$$f^{0} = \sum_{n=1}^{\infty} f(t_{n-1})\, 1_{(t_n, t_{n-1})}; \quad f^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} f(t_n)\, 1_{(t_n, t_{n-1})};$$

$$E(f|\mathcal{T}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{t_{n-1} - t_n} \int_{t_n}^{t_{n-1}} f\, d\lambda\right) 1_{(t_n, t_{n-1}]}.$$

Очевидно, что все три функции - неотрицательные, невозрастающие и при этом удовлетворяют неравенствам:

$$f^{(0)} \le f \le f^{(1)}; \quad f^{(0)} \le E(f|\mathcal{T}) \le f^{(1)}. \tag{3}$$

5. С каждой функцией $f \in L_1(0,1)$ связана непрерывная вогнутая неубывающая на $[0,1]$ функция ψ, $\psi(0) = 0$, $\psi(t) = \int_0^t f\, d\lambda$.

Функцию ψ с такими свойствами называем функцией Марцинкевича или, короче, М-функцией.

Обратно, для каждой М-функции ψ функция $f = f^{*} := \frac{\partial \psi}{\partial t} \in L_1(0,1)$.

Это взаимное соответствие $f \leftrightarrow \psi$ всюду ниже сохраняем в обозначениях.

Отметим, что $f \in (R)$ тогда и только тогда, когда [I]
$$\lim_{t \to 0+} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} > 1.$$

Каждая М-функция ψ определяет пространство Марцинкевича:

$$M_{\psi} = \left\{x \in L_1(0,1) : \|x\|_{M_{\psi}} := \sup_{0<t\le 1} \frac{\int_0^t x^{*}\, d\lambda}{\psi(t)} = \sup_{0<t\le 1} \frac{x^{**}(t)}{f^{**}(t)} < \infty\right\}.$$

Таким образом, регулярность f означает, что $M_\psi = N_f$.

Класс всех пространств Марцинкевича обозначим через $\mathcal{M}$.

6. Зафиксируем с.и. X и и.р. $\mathcal{T}=\sigma(t_n)$. Обозначим

$$X(\mathcal{T})=\{x\in X : x=x^*=\sum_{n=1}^{\infty} r_n \, 1_{(t_n,t_{n-1})}\}.$$

Предположим теперь, что $\mathscr{X}$ – некоторый класс с.и., содержащий X. Будем говорить, что и.р. $\mathcal{T}$ идентифицирует с.и. X в классе $\mathscr{X}$, если для любого $Y\in\mathscr{X}$ такого, что $Y\neq X$, справедливо $Y(\mathcal{T})\neq X(\mathcal{T})$. Пишем $\mathcal{T}\,id\,X(\mathscr{X})$.

§2. Результаты

ТЕОРЕМА I. Для любой функции f и любого и.р. $\mathcal{T}=\sigma(t_n)$ справедливы импликации $a)\Rightarrow b)\Rightarrow c)$, где $a)$ $E(f|\mathcal{T})\in(wR)$; $b)$ $\mathcal{T}$ – f-равномерное и.р.; $c)$ $E(f|\mathcal{T})\sim f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $a)\Rightarrow b)$. Допустим, что $\beta_{2^{-1}}E(f|\mathcal{T})\leq \leq CE(f|\mathcal{T})$, и пусть $t_n<2^{-1}$ при $n\geq n_0$. Тогда

$$f(t_{n+1})\leq E(f|\mathcal{T})(t_{n+1})\leq CE(f|\mathcal{T})(2t_{n+1})\leq CE(f|\mathcal{T})\cdot (t_n)\leq C^2E(f|\mathcal{T})(2t_n)\leq C^2 f(t_n),\quad n\geq n_0.$$

$b)\Rightarrow c)$. Пусть $f(t_{n+1})\leq cf(t_n), n\geq 0, c>0$. Для любого $t\in(0,1]$ выберем такое $n\geq 0$, что $t_{n+1}<t\leq t_n$. Имеем

$$E(f|\mathcal{T})(t)\leq f(t_{n+1})\leq cf(t_n)\leq cf(t)\leq cf(t_{n+1})\leq c^2 f(t_n)\leq \leq c^2E(f|\mathcal{T})(t_n)=c^2E(f|\mathcal{T})(t).$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ I. I) Из импликации $a)\Rightarrow c)$ вытекает, что из регулярности $E(f|\mathcal{T})$ следует регулярность f. Тем самым усилена теорема В из [3]. (Там показано, что регулярность f не влечет, вообще говоря, регулярности $E(f|\mathcal{G})$.)

2) Импликация $c)\Rightarrow a)$, вообще говоря, неверна. В качестве примера достаточно взять любую $\mathcal{T}$-измеримую функцию

f, не являющуюся слабо регулярной.

3) Если найдется такое число $\alpha>1$, что $t_n/t_{n+1}\geq\alpha$, $n\geq 0$, то справедлива импликация $b)\Rightarrow$ c).

Докажем это. Пусть $f(t_{n+1})\leq cf(t_n)$, $n\geq 0$, $c>0$. Для любого $t\in(0,1]$ выберем такое $n\geq 0$, что $t_{n+1}<t\leq t_n$. Имеем

$$E(f|\mathcal{T})(\alpha^{-1}t)\leq E(f|\mathcal{T})(\alpha^{-1}t_{n+1})\leq E(f|\mathcal{T})(t_{n+2})\leq$$

$$\leq f(t_{n+3})\leq c^3f(t_n)\leq c^3E(f|\mathcal{T})(t_n)\leq c^3E(f|\mathcal{T})(t),$$

что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 2. Пусть чисто неравномерное и.р. $\mathcal{T}=\sigma(t_n)$ является f-равномерным. Тогда $f\in(R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме I $\mathcal{T}$ является и $E(f|\mathcal{T})$-равномерным, т.е. найдется такое натуральное число ν, что

$$E(f|\mathcal{T})(t_{n+1})\leq 2^\nu E(f|\mathcal{T})(t_n),\quad n\geq 0.$$

Зафиксируем натуральное число $\mu>2\nu$, и пусть N – первый из всех таких номеров n, для которых $t_n/t_{n+1}>2^\mu$. Положим $g=E(f|\mathcal{T})1_{(0,t_N]}+E(f|\mathcal{T})(t_N)1_{(t_N,1]}$. Так как $g(t)\leq E(f|\mathcal{T})(t_N,t)$; $E(f|\mathcal{T})(t)\leq g(t)$, $t\in(0,1]$, то $N_g=N_{E(f|\mathcal{T})}=N_f$. Поэтому достаточно доказать регулярность функции g. Возьмем любое число $t\in(0,1]$; если $t_N<t\leq 1$, то $2^{-\mu}t\geq 2^{-\mu}t_N>t_{N+1}$, откуда

$$g(2^{-\mu}t)\leq g(t_{N+1})=E(f|\mathcal{T})(t_{N+1})\leq 2^\nu E(f|\mathcal{T})(t_N)=$$

$$=2^\nu g(t_N)=2^\nu g(t)\leq 2^{\mu-1}g(t).$$

Пусть теперь $0<t\leq t_N$. Выберем такое натуральное число $n\geq N$, что $t_{n+1}<t\leq t_n$. Тогда $2^{-\mu}t\geq t_{n+2}$, откуда

$$g(2^{-\mu}t)=E(f|\mathcal{T})(2^{-\mu}t)\leq E(f|\mathcal{T})(t_{n+2})\leq$$

$$\leq 2^{2\nu}E(f|\mathcal{T})(t_n)=2^{2\nu}E(f|\mathcal{T})(t)=2^{2\nu}g(t)\leq 2^{\mu-1}g(t).$$

Итак, для любого $t\in(0,1]$ выполняется неравенство $g(2^{-\mu}t)\leq 2^{\mu-1}g(t)$. На основании (2) отсюда заключаем, что

$g \in (R)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Для любой функции $f \in (wR)$ и любого и.р. $\mathcal{T} = \sigma(t_n)$ следующие утверждения равносильны:

1) $\mathcal{T} id N_f(\mathcal{N})$; 2) $E(f|\mathcal{T}) \sim f$; 3) $\mathcal{T}$ - f-равномерное и.р.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\Rightarrow$ 2). Докажем, что $N_f = N_{f^{(0)}}$ (обозначения см. в п.4 §1). Поскольку $f^{(0)} \leq f$, то $N_{f^{(0)}} \subset N_f$, откуда $N_{f^{(0)}}(\mathcal{T}) \subset N_f(\mathcal{T})$. Докажем обратное включение. Пусть $x = x^* \in N_f(\mathcal{T})$. Для $f \in (wR)$ это означает, что $x \leq cf$, $c > 0$. Значит, $x(t_n) \leq cf(t_n)$, $n \geq 0$. Из последних неравенств и $\mathcal{T}$-измеримости функции x вытекает, что $x \leq cf^{(0)}$, откуда $x \in N_{f^{(0)}}(\mathcal{T})$.

Итак, $N_f(\mathcal{T}) = N_{f^{(0)}}(\mathcal{T})$. В силу 1) отсюда следует, что $N_f = N_{f^{(0)}}$. Тем самым $f^{(0)} \in (wR)$. Но $E(f^{(0)}|\mathcal{T}) = f^{(0)}$, значит, $E(f^{(0)}|\mathcal{T}) \in (wR)$, и по импликации $a) \Longrightarrow б)$ теоремы 1 и.р. $\mathcal{T}$ является $f^{(0)}$-равномерным. Но тогда $N_{f^{(0)}} = N_{f^{(0)}} = N_f$. В силу неравенств (3) получаем, что $N_f = N_{E(f|\mathcal{T})}$, т.е. $E(f|\mathcal{T}) \sim f$.

Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) прямо следует из импликации $\alpha) \Rightarrow б)$ теоремы 1 и того, что $f \in (wR)$.

3) $\Rightarrow$ 1). Из неравенств $f(t_{n+1}) \leq cf(t_n)$, $n \geq 0$, $c > 0$, сразу следует равенство $N_f = N_{f^0}$. Допустим, что $N_g(\mathcal{T}) = N_f(\mathcal{T})$. Тогда $f^{(0)} \in N_g(\mathcal{T})$, откуда $N_f = N_{f^{(0)}} \subset N_g$. Обратно, поскольку $g^{(0)} \subset N_f(\mathcal{T})$, то из слабой регулярности f вытекает: $g^{(0)} \leq kf$ для подходящего $k > 0$.

Для любого $t \in (0, 1]$ выберем такое $n \geq 0$, что $t_{n+1} < t \leq t_n$. Тогда получим

$$g(t) \leq g(t_{n+1}) = g^{(0)}(t_{n+1}) \leq kf(t_{n+1}) \leq kcf(t_n) \leq kcf(t),$$

откуда $g \in N_f$ и $N_g \subset N_f$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Обозначим через $\mathcal{N}_{wR}$ класс всех главных с.и., порожденных слабо регулярными функциями. Можно показать, что условие $\mathcal{T} id N_f(\mathcal{N}_{wR})$ существенно слабее условия $\mathcal{T} id N_f(\mathcal{N})$.

Следующий результат обобщает на случай с.и. теорему 3' [2].

ТЕОРЕМА 4. Для того чтобы и.р. $\mathcal{T}$ идентифицировало любой с.и. X в любом классе с.и. $\mathcal{X}$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{T}$ было равномерным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Возьмем любое число $a \in (0,1]$ и положим $f(t)=t^{-a}$, $t \in (0,1]$. Легко видеть, что f-равномерными будут равномерные и.р. и только они. Значит, по теореме 3, если и.р. неравномерно, то оно не идентифицирует N_f в классе $\mathcal{N}$.

Достаточность. Пусть $\mathcal{T}$ - равномерное и.р.: $t_n \le c t_{n+1}$, $n \geq 0$, $c > 1$. Зафиксируем любое $t \in [0,1]$ и выберем $n \geq 0$ так, чтобы $t_{n+1} < t \le t_n$. Для любой функции f имеем:

$$f^{(1)}(t)=f^{(0)}(t_{n+1}) \le f^{(0)}(c^{-1}t_n) \le f^{(0)}(t).$$

Отсюда и из (3) следуют равенства

$$N_{f^{(0)}} = N_f = N_{E(f|\mathcal{T})} = N_{f^{(1)}}. \tag{4}$$

Пусть теперь $\mathcal{X}$ - любой класс с.и. и пусть $X \in \mathcal{X}$. Предположим, что $Y(\mathcal{T}) = X(\mathcal{T})$ для некоторого с.и. $Y \in X$. Возьмем любой элемент $y \in Y$. Так как $N_{y^*} \subset Y$, то из (4) вытекает, что $E(y^*|\mathcal{T}) \in Y(\mathcal{T})$ и, значит, $E(y^*|\mathcal{T}) \in X(\mathcal{T})$. Вновь пользуясь (4), получим, что и $y^* \in X$, т.е. $y \in X$.

Мы доказали включение $Y \subset X$. Обратное включение доказывается аналогично. Теорема доказана.

Переходим к задаче идентификации в классе $\mathcal{M}$ всех пространств Марцинкевича. Пусть ψ - любая М-функция (как всегда, $f=\frac{d\psi}{dt}$) и $\mathcal{T}$ - любое и.р. Положим

$$\varphi(t) = \int_0^t E(f|\mathcal{T})\,d\lambda, \quad t \in [0,1].$$

Очевидно, что для любых $n \geq 0$ и $t \in (t_{n+1}, t_n]$ справедливо

$$\varphi(t) = \frac{t-t_{n+1}}{t_n-t_{n+1}}\,\psi(t_n) + \frac{t_n-t}{t_n-t_{n+1}}\,\psi(t_{n+1}). \tag{5}$$

Кроме того, справедливо равенство

$$M_\psi(\mathcal{T}) = M_\varphi(\mathcal{T}), \tag{6}$$

в котором проще всего убедиться на графике. Из него вытекает импликация

$$\mathcal{T}\ id\ M_\psi(\mathcal{M}) \text{ влечет } M_\psi = M_\varphi. \tag{7}$$

Приведем теорему Маламида [2] об идентификации в классе $\mathcal{M}$.

ТЕОРЕМА М. $\mathcal{T}\,id\,M_\psi(\mathcal{M})$ тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\sup_{n\ge 0}\left\{\min\left[\frac{f^{**}(t_{n+1})}{f^{**}(t_n)},\ \frac{\psi(t_n)}{\psi(t_{n+1})}\right]\right\}<\infty . \qquad (A)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если и.р. $\mathcal{T}$ является f^{**}-равномерным или если оно является ψ-равномерным, то условие (А), очевидно, выполняется. Покажем, что для проверки соотношения $\mathcal{T}\,id\,M_\psi(\mathcal{M})$ общее условие (А) нужно применять лишь в случае, когда функция ψ не удовлетворяет ни одному из неравенств

$$\text{I)}\ \underline{\lim}_{t\to 0+}\frac{\psi(2t)}{\psi(t)}>1 ; \qquad \text{II)}\ \overline{\lim}_{t\to 0+}\frac{\psi(2t)}{\psi(t)}<2 .$$

В остальных случаях, т.е. когда выполнено неравенство I) или неравенство II), условие (А) равносильно f^{**}-равномерности или ψ-равномерности и.р. $\mathcal{T}$ соответственно. Примечательно, что "хорошее" пространство Марцинкевича M_ψ, для которого неравенства I) и II) выполняются одновременно, может быть идентифицировано в $\mathcal{M}$ только равномерным (с учетом теоремы 4 - "тривиальным") и.р. $\mathcal{T}$.

Докажем это. В силу теоремы М и теоремы 4 все три равносильности здесь нужно проверять лишь в одну сторону: можно считать, что $\mathcal{T}\,id\,M_\psi(\mathcal{M})$. Тогда из (7) вытекает равенство $i)$ $M_\psi = M_\varphi$, которое можно записать в виде $i')$ $f^{**}\sim(E(f/\mathcal{T}))^{**}$.

Пусть выполнено I), т.е. (см. п.5 §I) $f\in(R)$. Тогда (см. п.4 §I) $f^{**}\in(R)$. Отсюда и из i') получаем $(E(f/\mathcal{T}))^{**}\in(R)$. Значит (снова п.4 § I), $E(f/\mathcal{T})\in(R)$. Тем более $E(f/\mathcal{T})\in(wR)$.

Из теоремы I отсюда следует f-равномерность $\mathcal{T}$, равносильная (по определению свойства регулярности) f^{**}-равномерности $\mathcal{T}$.

Пусть выполнено II). Из i) вытекает (см.[I]), что неравенство II) выполнено и для φ, т.е.

$$\overline{\lim}_{t\to 0+}\frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)}<2 . \qquad (8)$$

Допустим, что и.р. $\mathcal{T}=\sigma(t_n)$ не является ψ-равномерным. Тогда для некоторой подпоследовательности $\{t_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ имеем $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\psi(t_{n_k})}{\psi(t_{n_k+1})}=\infty$, откуда $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{t_{n_k}}{t_{n_k+1}}=\infty$, ибо $\dfrac{t_{n_k}}{t_{n_k+1}}\geqslant\dfrac{\psi(t_{n_k})}{\psi(t_{n_k+1})}$, $k\geqslant 1$.

Пользуясь (5), получим

$$\frac{\varphi(t_{n_k})}{\varphi\left(\frac{t_{n_k}}{2}\right)}\geqslant\frac{\psi(t_{n_k})}{\dfrac{\frac{t_{n_k}}{2}-t_{n_k+1}}{t_{n_k}-t_{n_k+1}}\psi(t_{n_k})+\dfrac{\frac{t_{n_k}}{2}\psi(t_{n_k+1})}{t_{n_k}-t_{n_k+1}}}=$$

$$=2:\left[1-1:\left(\frac{t_{n_k}}{t_{n_k+1}}-1\right)+\frac{\psi(t_{n_k+1})}{\psi(t_{n_k})}:\left(1-\frac{t_{n_k+1}}{t_{n_k}}\right)\right]\xrightarrow[k\to\infty]{}2,$$

вопреки (8).

Последнее утверждение замечания 3 вытекает из следующего простого наблюдения.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $f\in L_1(0,1)$, $\psi(t)=\int\limits_0^t f\,d\lambda$, и пусть и.р. $\mathcal{T}=\sigma(t_n)$ одновременно f^{**}- и ψ-равномерно. Тогда $\mathcal{T}$ - равномерное и.р.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию найдутся такие константы $c,k\geqslant 1$, что $f^{**}(t_{n+1})\leqslant cf^{**}(t_n)$; $\psi(t_n)\leqslant K\psi(t_{n+1})$, $n\geqslant 0$. Поэтому $\dfrac{t_n}{t_{n+1}}=\dfrac{\psi(t_n)}{f^{**}(t_n)}\cdot\dfrac{f^{**}(t_{n+1})}{\psi(t_{n+1})}\leqslant cK$, $n\geqslant 0$, и теорема доказана.

Из теоремы 2 и замечания 3 вытекает

ТЕОРЕМА 6. Пусть чисто неравномерное и.р. является f-равномерным. Тогда

1) $f\in L_1(0,1)$; 2) $\mathcal{T}\,id\,M_\psi(\mathcal{M})$; 3) $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\psi(2t)}{\psi(t)}>1$; $\overline{\lim\limits_{t\to 0+}}\dfrac{\psi(2t)}{\psi(t)}=2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. - М.: Наука, 1978.
2. Маламуд В.М. О конусах, порождающих симметричные пространства// Исследования по теории функций многих вещественных переменных. - Ярославль, 1981. - С.45-54.
3. Меклер А.А. Оператор усреднения по счетному разбиению на минимальном симметричном идеале пространства $L_1(0,1)$// Исследования по линейным операторам и теории функций. Вып. 10: Зап. науч. семинаров ЛОМИ. - 1982. - Т.107. - С.136-149.
4. Меклер А.А. О невозрастающих функциях ограниченной средней осцилляции // 8-й Симпозиум по проблеме избыточности в информационных системах. Т.1. - Л., 1983. - С.20-22.
5. Muckenhoupt B. Weighted norm inequalities for Hardy maximal functions// Trans. Amer. Math. Soc.-1972.-V.165.-P.207.
6. Меклер А.А., Соколовская Н.Ф. О некоторых свойствах функций, порождающих пространства Марцинкевича // Упорядоченные пространтсва и операторные уравнения. - Пермь - Сыктывкар, 1982. - С.136-143.

Поступила в ред.-изд. отдел
10.10.1985 г.