УДК 519.86

АСИМПТОТИКА ЯДЕР В МОДЕЛЯХ ЛИНДАЛОВСКОГО ТИПА

В.А.Васильев

Работа посвящена изложению условий, обеспечивающих справедливость гипотезы Эджворта для экономических моделей, учитывающих наличие общественных благ. Получены аналоги теоремы Дебре – Скарфа для линдаловских равновесий как в терминах нечеткого блокирования, так и в асимптотической форме.

Следует отметить, что линдаловские равновесия представляют собой частный случай так называемых информационных равновесий в обобщенных моделях обмена [1, 2]. Поэтому приводимые далее результаты можно трактовать как конкретизацию соответствующих утверждений работы [2] применительно к выделенному типу моделей с внешними влияниями. В частности, понятия реплики модели Линдала и отношения блокирования в репликах лишь уточняют соответствующие определения из [2]. В то же время эти понятия принципиально отличаются от предлагавшихся в других работах (см., например, [3,4]). Главное отличие состоит в способе моделирования "пренебрежимой малости" участника "большой" реплики, в надлежащем учете изменений в статусе экономического агента в зависимости от структуры содержащей его блокирующей коалиции.

В работе используется терминология и обозначения соответствующего раздела из [5], где аналогичные вопросы изучаются для моделей с функциями полезности.

1. Рассматриваемая модель экономики с общественными благами (модель Линдала) имеет вид

$$\mathcal{E} = \langle N, L, Q, \{X_i, Y_i, w_L^i, \alpha_i\}_N, w_Q \rangle , \qquad (1.1)$$

где $N=\{1,\dots,n\}$ - множество участников, $L=\{1,\dots,\ell\}$ - номенклатура продуктов частного пользования, $Q=\{\ell+1,\dots,\ell+q\}$ - номенклатура общественных благ, $X_i, Y_i \subseteq \mathbb{R}^{\ell+q}$ - потребительское и производственное множество участника $i\in N$, $\succ_i$ и $w_L^i \in \mathbb{R}^L$ - его отношение предпочтения на $X_i \times Y_i$ и начальный запас продуктов частного пользования, $w_Q \in \mathbb{R}^Q$ - начальный запас общественных благ.

Не вдаваясь в содержательную интерпретацию моделей типа (I.I), имеющуюся, например, в [3,6], отметим, что общественные блага - это продукты или услуги, предназначенные для коллективного использования: транспортные и информационные сети, радио, телевидение, охрана окружающей среды и т.п. В отличие от частных благ, использование которых строго индивидуально и уменьшает на соответствующую величину суммарное потребление остальных участников, общественными благами в равной мере и на равных правах коллективной собственности располагает каждый из потребителей. Разумеется, представления последних о том или ином уровне потребления общественных благ сугубо индивидуальны, однако окончательный выбор должен быть единым для всех участников.

Переходя к формализации соответствующих понятий индивидуального и коллективного выбора в моделях типа (I.I), положим $Z_i = X_i \times Y_i$, $Z=\prod_N Z_i$ и для каждого элемента $z^i = (x^i, y^i)\in Z_i$ через x_L^i, x_Q^i (y_L^i, y_Q^i) будем обозначать проекции $x^i (y^i)$ на $\mathbb{R}^L$ и $\mathbb{R}^Q$ соответственно. Аналогично, через X_{Li}, X_{Qi} (Y_{Li}, Y_{Qi}) обозначаются проекции множества X_i (Y_i) на $\mathbb{R}^L$ и $\mathbb{R}^Q$.

Всюду в дальнейшем, как обычно, предполагается, что $X_i = X_{Li} \times X_{Qi}$ для всех $i\in N$.

Выделим состояния, удовлетворяющие в рассматриваемой ситуации условию материального баланса. Распределение $z=(x^i,y^i)_N \in Z$ будем называть сбалансированным, если выполняются условия

$$\sum_N x_L^i = \sum_N w_L^i + \sum_N y_L^i ,$$

$$x_Q^i = w_Q + \sum y_Q^j , \quad i\in N .$$

Совокупность всех сбалансированных распределений $\mathcal{E}$ обозначим через $Z_{\mathcal{E}}(N) = Z(N)$.

Один из механизмов децентрализованного выбора распределений из $Z(N)$ базируется на использовании индивидуальных отчислений на общественные блага и реализует, по существу, тот же тип устойчивости, что и информационное равновесие (см.[2,3], а также п.3 настоящей статьи).

Для фиксированной системы цен $p_L \in \mathbb{R}^L$, $p_Q \in \mathbb{R}^Q$ и индивидуальных оценок общественных благ $p_Q^1, \ldots, p_Q^n \in \mathbb{R}^Q$ через $B_i(p)$ обозначим бюджетное множество участника $i \in N$, определяемое следующим образом:

$$B_i(p) = \left\{ z^i \in Z_i \mid p_L \cdot x_L^i + p_Q^i \cdot x_Q^i \leq d_i(p, y^i) \right\}, \quad (\text{I}.2)$$

где

$$d_i(p, y^i) = p_L \cdot w_L^i + p_L \cdot y_L^i + p_Q^i \cdot w_Q + p_Q \cdot y_Q^i .$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Состояние $\bar{z} \in Z(N)$ называется линдаловским равновесием модели (I.I), если существуют цены $\bar{p}_L \in \mathbb{R}_+^L$, $\bar{p}_Q \in \mathbb{R}_+^Q$ и индивидуальные оценки $p_Q^1, \ldots, p_Q^n \in \mathbb{R}_+^Q$ такие, что

(i) $\bar{p}_Q = \sum_N \bar{p}_Q^i$;

(ii) $B_i(\bar{p}) \cap \mathcal{P}_i(\bar{z}) = \emptyset$, $i \in N$ ж).

Цены и оценки $\bar{p} = (\bar{p}_L, \bar{p}_Q^1, \ldots \bar{p}_Q^n)$, фигурирующие в определении линдаловского равновесия $\bar{z}$, для краткости будем называть равновесными ценами (отвечающими $\bar{z}$).

Множество всех линдаловских равновесий $\mathcal{E}$ обозначим через $\mathcal{Z}(\mathcal{E})$.

Являясь прямым обобщением вальрасовского (см., например, [3,6]), равновесие Линдала обеспечивает каждому из участников независимый оптимальный выбор в рамках бюджетных множеств $B_i(\bar{p})$. При этом единственными параметрами управления являются цены $\bar{p}_L$, $\bar{p}_Q$ и оценки $\bar{p}_Q^1, \ldots, \bar{p}_Q^n$, выбираемые в результате некоторой процедуры согласования индивидуальных интересов (не предполагающей никакой кооперации между участниками $\mathcal{E}$).

Принципиально иной (кооперативный) принцип выбора распределений из $Z(N)$ базируется на понятии блокирования.

ж) Как обычно, $\mathcal{P}_i(\bar{z}) = \{ z \in Z_i \mid (\bar{z}, z) \in \mathcal{L}_i, (z, \bar{z}) \notin \mathcal{L}_i \}$ - множество элементов, лучших (в смысле $\mathcal{L}_i$) чем $\bar{z}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что распределение $z \in Z(N)$ блокируется коалицией $S \subseteq N$, если найдутся $(\tilde{x}^i_L, \tilde{y}^i) \in X_{Li} \times Y_i$ такие, что

$$\tilde{z}^{iS} \in \mathcal{P}_i(z^i), \quad i \in S,$$

$$\sum_S \tilde{x}^i_L = \sum_S w^i_L + \sum_S \tilde{y}^i_L,$$

где

$$\tilde{x}^{iS}_L = \tilde{x}^i_L, \quad \tilde{y}^{iS} = \tilde{y}^i, \quad \tilde{x}^{iS}_Q = w_Q + \sum_{j \in S} \tilde{y}^j_Q.$$

Множество всех распределений $z \in Z(N)$, не блокируемых никакой коалицией $S \subseteq N$, будем обозначать через $C(\mathcal{E})$ и называть ядром модели $\mathcal{E}$.

Наряду с введенным блокированием, фундаментальную роль в исследовании линдаловских равновесий играет обобщение этого понятия на случай нечетких коалиций. Напомним [7], что последние определяются как ненулевые векторы $t \in [0,1]^N$, компоненты которых характеризуют степень участия соответствующих экономических агентов в коалиции

$$\operatorname{supp} t = \{ i \in N \,/\, t_i > 0 \}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что распределение $z \in Z(N)$ блокируется нечеткой коалицией $t = (t_1, \ldots, t_n)$, если существуют $(\tilde{x}^i_L, \tilde{y}^i) \in X_{Li} \times Y_i$ такие, что

$$\tilde{z}^{it} \in \mathcal{P}_i(z^i), \quad i \in \operatorname{supp} t, \tag{I.3}$$

$$\sum_N t_i \tilde{x}^i_L = \sum_N t_i w^i_L + \sum_N t_i \tilde{y}^i_L, \tag{I.4}$$

где

$$\tilde{x}^{it}_L = \tilde{x}^i_L, \quad \tilde{y}^{it} = \tilde{y}^i, \quad \tilde{x}^{it}_Q = w_Q + \frac{1}{t_i} \sum_{j \in N} t_j \tilde{y}^j_Q.$$

Множество распределений $z \in Z(N)$, не блокируемых никакой нечеткой коалицией, обозначим через $C_F(\mathcal{E})$ и будем называть нечетким ядром $\mathcal{E}$.

Как видно из определения, распределения из $C_F(\mathcal{E})$ коллективно устойчивы в том смысле, что их реализация устраняет все стимулы для фактического образования (выделения) какой-либо коалиции участников $\mathcal{E}$.

Оказывается, что при достаточно общих условиях множество линдаловских равновесий допускает исчерпывающую внутреннюю характеризацию в терминах упомянутой коллективной устойчивости.

Приступая к формулировке этого результата, введем необходимую терминологию. Будем говорить, что бинарное отношение непрерывно, если для любого z^i из области его задания Z_i множество $\mathcal{P}_i(z^i)$ открыто в Z_i. Далее, под строгой выпуклостью $\mathcal{L}_i$ понимается выпуклость $\mathcal{P}_i(z^i)$ и справедливость включений $(z^i, \tilde{z}^i] \subseteq \mathcal{P}_i(z^i)$ при всех $z^i \in Z_i$, $\tilde{z}^i \in \mathcal{P}_i(z^i)$. Здесь $(z^i, \tilde{z}^i] = \{\lambda z^i + (1-\lambda)\tilde{z}^i \mid \lambda \in [0,1)\}$. Наконец, используя стандартное обозначение

$$\tilde{x}_L > x_L \iff \tilde{x}_L \geqslant x_L \ \& \ \tilde{x}_L \neq x_L ,$$

будем говорить, что $\mathcal{L}_i$ строго монотонно по x_L, если для любых $x^i, \tilde{x}^i \in X_i$ и $y^i \in Y_i$ таких, что $\tilde{x}^i \geqslant x^i$, справедлива импликация

$$\tilde{x}^i_L > x^i_L \Longrightarrow (\tilde{x}^i, y^i) \in \mathcal{P}_i(x^i, y^i) .$$

Обозначим через $Z_X(N)$ проекцию $Z(N)$ на множество $X = \prod_N X_i$ и положим

$$X_\Sigma(N) = \{(\sum_N x^i_L, x_Q) \mid (x^i_L, x_Q)_N \in Z_X(N)\} .$$

Условия, выделяющие нужный нам класс моделей Линдала, имеют следующий вид.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ I. Множества X_i, Y_i выпуклые и замкнутые, причем $X_{Qi}, Y_{Qi} \subseteq R^Q_+$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. Множество $Z_X(N)$ содержится в X вместе с некоторой окрестностью из $(R^{l+q}_+)^N$, причем $X_\Sigma(N) \subseteq int\, R^{l+q}_+$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3. Для всех $i \in N$ начальные запасы w^i_L ненулевые и $(w^i_L, w_Q, 0) \in Z_i$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 4. Бинарные отношения $\mathcal{L}_i$ строго монотонны по x_L, непрерывны и строго выпуклы.

Приведенные условия обеспечивают эквивалентность равновесного и кооперативного выбора из $Z(N)$.

ТЕОРЕМА I. Если для модели Линдала выполняются условия предположений I-4, то

$$\mathcal{L}(\mathcal{E}) = C_F(\mathcal{E}) . \quad (I.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего установим включение

$$\mathcal{X}(\mathcal{E}) \subseteq C_F(\mathcal{E}), \qquad (I.6)$$

справедливое без каких бы то ни было предположений относительно $\mathcal{E}$, **кроме требования неотрицательности элементов** из $Y_{Qi} = Pr_Q Y_i$. Допустим, что существует $z \in \mathcal{X}(\mathcal{E}) \setminus C_F(\mathcal{E})$. Тогда найдется нечеткая коалиция $t = (t_1, \ldots, t_n)$ и элементы $\tilde{z}^i \in X_{Li} \times Y_i$, для которых выполняются условия (I.3), (I.4). Учитывая, что $z \in \mathcal{X}(\mathcal{E})$, из (I.3) имеем

$$p_L \cdot \Delta \tilde{z}_L^i + \frac{1}{t_i} p_Q^i \left(\sum_{j \in N} t_j \tilde{y}_Q^j \right) > p_Q \cdot \tilde{y}_Q^i, \quad i \in supp\, t,$$

где

$$\Delta \tilde{z}_L^i = \tilde{x}_L^i - w_L^i - \tilde{y}_L^i,$$

$$p_Q = \sum_N p_Q^i,$$

а $p_L, p_Q^1, \ldots, p_Q^n$ – равновесные цены, отвечающие z. Умножая каждое из выписанных неравенств на соответствующую степень участия $i \in supp\, t$ и суммируя получающиеся в обеих частях выражения, приходим к соотношению

$$p_L \left(\sum_N t_i \Delta \tilde{z}_L^i \right) > \left(\sum_{i \in N \setminus supp\, t} p_Q^i \right) \cdot \sum_{j \in N} t_j \tilde{y}_Q^j,$$

противоречащему, ввиду $Y_{Qj} \subseteq \mathbb{R}_+^Q$, условию (I.4). Полученное противоречие и доказывает включение (I.6).

Приступая к доказательству противоположного включения, положим

$$\mathcal{D} = \prod_{k=0}^{n} \mathcal{D}_k,$$

где $\mathcal{D}_0 = \mathbb{R}^L$, $\mathcal{D}_k = \mathbb{R}^Q$, $k \in N$. Далее, для каждого $i \in N$ определим линейные операторы $\gamma_i^X, \gamma_i^Y : \mathbb{R}^{\ell+q} \to \mathcal{D}$, действующие по формулам:

$$\gamma_i^X (x_L, x_Q)^k = \begin{cases} x_L, & k = 0, \\ x_Q, & k = i, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$\gamma_i^Y(y_L, y_Q)^k = \begin{cases} y_L, & k=0, \\ y_Q, & k=1,\dots,n. \end{cases}$$

Наконец, зафиксируем некоторый элемент $\bar{z} \in C_F(\mathcal{E})$ и для каждого $i \in N$ введем в рассмотрение следующие множества:

$$\mathcal{M}_i(\bar{z}) = \{\gamma_i^X(x^i) - \gamma_i^Y(y^i) \mid (x^i, y^i) \in \mathcal{P}_i(\bar{z}^i)\} - \{\bar{w}^i\},$$

где $\bar{w}^i = \gamma_i^X(w_L^i, w_Q)$. Нетрудно заметить, что нулевой вектор не принадлежит множеству

$$\mathcal{M}(\bar{z}) = co \bigcup_N \mathcal{M}_i(\bar{z}),$$

где, как обычно, через $co\,\mathfrak{X}$ обозначается выпуклая оболочка $\mathfrak{X}$. Действительно, в противном случае в силу выпуклости множеств $\mathcal{M}_i(\bar{z})$ (вытекающей из линейности операторов γ_i^X, γ_i^Y и выпуклости $\mathcal{P}_i(\bar{z}^i)$), имеем

$$\sum_N \lambda_i(\gamma_i^X(x^i) - \gamma_i^Y(y^i)) = \sum_N \lambda_i \bar{w}^i \qquad (I.7)$$

для некоторых $z^i = (x^i, y^i) \in \mathcal{P}_i(\bar{z}^i)$ и $\lambda_i \geqslant 0$ таких, что $\sum_N \lambda_i = 1$. Расписывая покомпонентно соотношение (3.7), получаем

$$\sum_N \lambda_i x_L^i = \sum_N \lambda_i w_L^i + \sum_N \lambda_i y_L^i,$$

$$x_Q^i = w_Q + \frac{1}{\lambda_i} \sum_{j \in N} \lambda_j y_Q^j, \quad i \in supp\,\lambda.$$

Эти равенства, с учетом включений $(x^i, y^i) \in \mathcal{P}_i(\bar{z}^i)$ $(i \in supp\,\lambda)$, означают, по определению, что нечеткая коалиция $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ блокирует состояние $\bar{z}$. Но, по условию, $\bar{z} \in C_F(\mathcal{E})$.

Установленное противоречие подтверждает справедливость соотношения $0 \notin \mathcal{M}(\bar{z})$. По теореме отделимости существует ненулевой функционал $\bar{p} = (\bar{p}_L, \bar{p}_Q^1, \dots, \bar{p}_Q^n)$, удовлетворяющий неравенствам

$$\bar{p} \cdot \tilde{z} \geqslant 0, \quad \tilde{z} \in \mathcal{M}(\bar{z}).$$

В частности, ввиду $\mathcal{M}_i(\bar{z}^i) \subseteq \mathcal{M}(\bar{z})$, для всех $(\tilde{x}^i, \tilde{y}^i) \in \mathcal{P}_i(\bar{z}^i)$ справедливы соотношения

$$\bar{p}_L \cdot \Delta \tilde{z}_L^i + \bar{p}_Q^i(\tilde{x}_Q^i - w_Q) - \bar{p}_Q \cdot \tilde{y}_Q^i \geqslant 0, \quad i \in N, \qquad (I.8)$$

где, как и ранее, $\Delta \tilde{z}^i_L = \tilde{x}^i_L - w^i_L - \tilde{y}^i_L$, $\bar{p}_Q = \sum_N \bar{p}^i_Q$.
Учитывая строгую монотонность α_i по x_L и предположение 2, предельным переходом устанавливается справедливость неравенств (I.8) и для компонент состояния $\bar{z} = (\bar{z}^i)_N$. Суммируя левые части соотношений (I.8) при $\tilde{z} = \bar{z}$ и учитывая, что $\bar{z} \in Z(N)$, убеждаемся, что $\bar{z}^i \in B^\circ_i(\bar{p})$ $(i \in N)$, где

$$B^\circ_i(\bar{p}) = \left\{ (x^i, y^i) \in Z_i \,\middle|\, \bar{p}_L \cdot x^i_L + \bar{p}^i_Q \cdot x^i_Q = \alpha_i(\bar{p}, y^i) \right\}.$$

Следовательно, для каждого $i \in N$ элемент $\bar{z}^i$ принадлежит бюджетному множеству $B_i(\bar{p})$, определенному в соответствии с формулой (I.2).

Покажем теперь, что $B_i(\bar{p}) \cap \mathcal{P}_i(\bar{z}^i) = \emptyset$ для всех $i \in N$. Используя предположение 2 и строгую монотонность α_i по x_L , нетрудно проверить, что $\bar{p}_L \geqslant 0$ и $\bar{p}^i_Q \geqslant 0$ для всех $i \in N$. Убедимся, что на самом деле компоненты $\bar{p}_L$ строго положительны. Докажем сначала, что $\bar{p}_L \neq 0$. Действительно, в противном случае, ввиду $\bar{p} \geqslant 0$ и $\bar{p} \neq 0$, найдутся $i \in N$ и $k \in Q$ такие, что $\bar{p}^i_{Qk} > 0$. Поскольку $X_\Sigma(N) \subseteq int\, \mathbb{R}^{\ell+q}_+$, а $Z_X(N)$ содержится в $\prod_N X_i$ вместе с некоторой окрестностью из $(\mathbb{R}^{\ell+q}_+)^N$, элемент $\bar{x}^i_Q$ является внутренней точкой множества X_{Qi} . Следовательно, найдутся достаточно малые $\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что $z^{i,\delta} \in \mathcal{P}_i(\bar{z}^i)$, где $x^{i,\delta}_L = \bar{x}^i_L + \delta_1 \cdot e^i_L$, $x^{i,\delta}_Q = \bar{x}^i_Q - \delta_2 e^k_Q$, $y^{i,\delta} = \bar{y}^i$, а e^i_L , e^k_Q – соответствующие орты из $\mathbb{R}^L$ и $\mathbb{R}^Q$. Ясно, что $z^{i,\delta} \in B'_i(\bar{p})$, где

$$B'_i(\bar{p}) = B_i(\bar{p}) \setminus B^\circ_i(\bar{p}) .$$

Но включение $z^{i,\delta} \in B'_i(\bar{p}) \cap \mathcal{P}_i(\bar{z}^i)$ очевидным образом противоречит соотношению (I.8).

Таким образом, $\bar{p}_{Ls} > 0$ для некоторого $s \in L$. Допустим, что $\bar{p}_{Lr} = 0$ для какого-либо $r \neq s$. Ввиду того, что $\sum_N \bar{x}^i_L \in int\, \mathbb{R}^\ell_+$, найдется $i_0 \in N$, для которого $x^{i_0}_{Ls} > 0$. На основании предположения 2, строгой монотонности и непрерывности α_{i_0} по x_L , найдутся $\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что $\tilde{z}^{i_0} \in \mathcal{P}_{i_0}(\bar{z}^{i_0})$, где $\tilde{x}^{i_0}_Q = \bar{x}^{i_0}_Q$, $\tilde{y}^{i_0} = \bar{y}^{i_0}$, а $\tilde{x}^{i_0}_L = \bar{x}^{i_0}_L + \delta_1 e^r_L - \delta_2 e^s_L$. Но в силу допущений, сделанных относительно $\bar{p}_{Lr}$, $\bar{p}_{Ls}$, справедливо включение $\tilde{z}^{i_0} \in B'_{i_0}(\bar{p})$, противоречащее условию (I.8).

Итак, вектор $\bar{p}_L$ строго положителен. Используя этот факт, убедимся, что для любого $i \in N$ и $z^i \in \mathcal{P}_i(\bar{z}^i)$ справедливо соотношение $z^i \notin B_i^\circ(\bar{p})$. Действительно, на основании (I.8) элемент z^i не принадлежит множеству $B_i'(\bar{p})$. Допустим, что $z^i \in B_i^\circ(\bar{p})$. Тогда, учитывая, что $(w_L^i, w_Q, 0) \in B_i^\circ(\bar{p})$, в силу непрерывности α_i и условия $w_{Ls}^i \neq 0$ можно, не уменьшая общности, считать, что $x_{Ls}^i > 0$ для некоторого $s \in L$. Далее, ввиду предположения 2, найдется $\lambda \in (0,1)$ такое, что $\tilde{x}^i = \bar{x}^i + \lambda(x^i - \bar{x}^i)$ содержится в X_i вместе с некоторой окрестностью из $\mathbb{R}_+^{l+q}$. На основании включений $\bar{z}^i, z^i \in B_i^\circ(\bar{p})$ и строгой выпуклости α_i элемент $\tilde{z}^i = \bar{z}^i + \lambda(z - \bar{z}^i)$ также содержится в пересечении $\mathcal{P}_i(\bar{z}^i) \cap B_i^\circ(\bar{p})$. Ясно, что для $\tilde{z}^i = (\tilde{x}^i, \tilde{y}^i)$ справедливо неравенство $\tilde{x}_{Ls}^i > 0$, вытекающее из условия $x_{Ls}^i > 0$ и неотрицательности компонент $\bar{x}^i$. Но тогда, учитывая, что $\tilde{x}_L^i$ содержится в X_{Li} вместе с некоторой окрестностью из $\mathbb{R}_+^l$ и используя непрерывность α_i, можно найти достаточно малое $\delta > 0$, при котором $\tilde{z}^{i,\delta} = (\tilde{x}_L^i - \delta e_L^s, \tilde{x}_Q^i, \tilde{y}^i)$ принадлежит $\mathcal{P}_i(\bar{z}^i)$. Вместе с тем, ввиду строгой положительности $\bar{p}_L$ имеем $\tilde{z}^{i,\delta} \in B_i'(\bar{p})$. Полученные включения противоречат неравенствам (I.8), что и завершает доказательство равновесности состояния $\bar{z}$.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Анализируя доказательство теоремы I, нетрудно убедиться, что соотношение (I.5) справедливо и в том случае, когда в определении линдаловского равновесия не предполагается неотрицательность векторов $\bar{p}_L$, $\bar{p}_Q^i$, а под нечетким ядром понимается множество распределений из $Z(N)$, не блокируемых никакой нечеткой коалицией, носитель которой совпадает с N. В приведенной ситуации некоторые условия предположений I-4 могут быть ослаблены (например, условие строгой монотонности α_i) или даже опущены (требование неотрицательности векторов из Y_{Qi}).

2. Теорема I позволяет сформулировать понятие реплики экономической модели с общественными благами и дать "работоспособное" представление об убывающем (по мере роста числа участников) влиянии каждого из них на экономическую ситуацию в целом.

Пусть $\mathcal{E} = \langle N, L, Q, \{X_i, Y_i, \alpha_i, w_L^i\}_N, w_Q \rangle$ - произвольная модель Линдала, r - некоторое натуральное число. Обозначим через $N(r)$ множество $N \times \{1, \dots, r\}$ и для каждого $(i,m) \in N(r)$ положим

$$
\begin{aligned}
X_{im} &= X_{Li} \times \tau X_{Qi} \quad , \\
Y_{im} &= Y_i \quad , \\
w_L^{im} &= w^i \quad , \\
w_Q^{(\tau)} &= \tau w_Q \quad .
\end{aligned}
\tag{2.I}
$$

Далее, через α_{im} обозначим бинарное отношение на $Z_{im} = X_{im} \times Y_{im}$, определенное соотношением:

$$
z^{im} \; \alpha_{im} \; \tilde{z}^{im} \iff \mathring{z}^{im} \; \alpha_i \; \mathring{\tilde{z}}^{im} , \tag{2.2}
$$

где

$$
\mathring{z}^{im} = (x_L^{im}, \; x_Q^{im} / \tau , \; y^{im})
$$

для всех $z^{im} = (x_L^{im}, x_Q^{im}, y^{im}) \in Z_{im}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Репликой объема τ модели $\mathcal{E}$ будем называть модель Линдала

$$
\mathcal{E}_{(\tau)} = \langle N(\tau), L, Q, \{ X_{im}, Y_{im}, \alpha_{im}, w_L^{im} \}_{N(\tau)}, w_Q^{(\tau)} \rangle ,
$$

компоненты которой определены в соответствии с формулами (2.I)-(2.2).

Ключевую роль в предлагаемом ниже определении блокирования в реплике $\mathcal{E}_{(\tau)}$, как и в [2], играет учет изменений в "статусе" участника $\mathcal{E}_{(\tau)}$, зависящем от структуры коалиции, в которую он вступает.

Пусть M - произвольная коалиция из $N(\tau)$. Будем использовать следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
M_i &= \{ m \mid (i,m) \in M \} , \\
m_i &= | M_i | .
\end{aligned}
$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Будем говорить, что коалиция $M \in N(\tau)$ ($*$)-блокирует состояние $z \in Z(N)$, если найдутся $(\tilde{x}_L^{im}, \tilde{y}^{im}) \in X_{Lim} \times Y_{im}$ такие, что

$$
\tilde{z}^{im,M} \in \mathcal{P}_i (\mathring{z}^{im}) , \qquad (i,m) \in M ,
$$

$$\sum_{(i,m)\in M} \tilde{x}_L^{im} = \sum_{(i,m)\in M} w_L^{im} + \sum_{(i,m)\in M} \tilde{y}_L^{im} ,$$

где

$$\tilde{z}^{im,M} = (\tilde{x}_L^{im}, w_Q + \frac{1}{m_i} \sum_{d\in M} \tilde{y}_Q^d , \tilde{y}^{im}).$$

Множество всех состояний $z \in Z(N)$, не являющихся (*)-блокируемыми никакой коалицией $M \in N(\tau)$, обозначим через $C_*(\mathcal{E}_{(\tau)})$ и будем называть (*)-ядром реплики $\mathcal{E}_{(\tau)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $Y_{Qi} = \{0\}$ введенное (*)-блокирование идентично стандартному для обычных моделей без общественных благ.

Как явствует из определения 5, предпочтения участника меняются не только вместе с изменением объема реплик (как это **предлагалось Р.Ауманом** [3]), но и с изменением числа однотипных ему участников блокирующей коалиции.

Влияние структуры блокирующей коалиции на предпочтения ее участников наиболее "зримо" проявляется в ситуации, когда $w_Q = 0$, а бинарные отношения α_i задаются функциями полезности $u_i : Z_i \to R$. В этом случае уровни полезности, достижимые участниками коалиции $M \in N(\tau)$, измеряются функциями

$$u_{im}^M (z^{im}) = u_i (x_L^{im} , x_Q^{im} / m_i , y^{im}) ,$$

а само условие (*)-блокирования состояния $z \in Z(N(\tau))$ некоторой коалицией M принимает следующий вид [5]: существуют $\tilde{z}^{im} = (\tilde{x}_L^{im}, \tilde{x}_Q^{im}, \tilde{y}^{im}) \in X_{Li} \times m_i X_{Qi} \times Y_i$, для которых выполняются соотношения

$$u_{im}^M (\tilde{z}^{im}) > u_{im}^{(\tau)} (z^{im}) , \quad (i,m) \in M ,$$

$$\sum_M \tilde{x}_L^{im} = \sum_M w_L^{im} + \sum_M \tilde{y}_L^{im} ,$$

$$\tilde{x}_Q^{im} = \sum_{d\in M} \tilde{y}_Q^d , \qquad (i,m) \in M ,$$

где $u_{im}^{(\tau)} = u_{im}^{N(\tau)}$ - функции полезности, задающие предпочтения α_{im} участников модели $\mathcal{E}_{(\tau)}$:

$$u_{im}^{(r)}(z^{im}) = u_i(x_L^{im}, x_Q^{im}/r, y^{im}).$$

В целом реплики возрастающего объема и введенное в них $(*)$-блокирование моделируют уменьшающееся влияние каждого из участников на процесс установления стабильных пропорций обмена (в частности, падение доли их начального запаса в суммарном запасе $\mathcal{E}_{(r)}$, а также относительное сокращение индивидуального вклада в формирование совокупного объема частных и общественных благ).

Оказывается, что и для рассматриваемых моделей Линдала справедлив аналог классической теоремы Дебре – Скарфа [8]. Именно, при достаточно общих условиях множество неблокируемых распределений $\mathcal{E}_{(r)}$ асимптотически эквивалентно $\mathcal{L}(\mathcal{E})$.

Переходя к точной формулировке этого результата, введем необходимые обозначения. Для $r \geqslant 1$ и состояния $z = (x_L^i, x_Q^i, y^i)_N \in Z$ через $\dot{z}_{(r)} \in Z_{(r)} = \prod_{N(r)} Z_{im}$ будем обозначать r-реплику вектора $\dot{z} = (x_L^i, r x_Q^i, y^i)_N$:

$$\dot{z}_{(r)} = (\dot{z}, \ldots, \dot{z}).$$

Далее, положим

$$C_r(\mathcal{E}) = \{ z \in Z(N) \mid \dot{z}_{(r)} \in C_*(\mathcal{E}_{(r)}) \}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathcal{E}$ удовлетворяет условиям теремы I. Тогда имеет место равенство

$$\mathcal{L}(\mathcal{E}) = \bigcap_{r=1}^{\infty} C_r(\mathcal{E}). \qquad (2.3)$$

Приступая к доказательству теоремы 2, установим следующее вспомогательное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Если для $\bar{z} \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_{(r)})$ существуют равновесные цены $\bar{P}_L, \bar{P}_Q^{im}$, удовлетворяющие условию

$$\bar{P}_Q^{im} = \bar{P}_Q^{im'}, \quad i \in N, \quad m, m' = 1, \ldots, r, \qquad (2.4)$$

то $\bar{z} \in C_*(\mathcal{E}_{(r)})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для $\bar{z} \in \mathcal{Z}(\mathcal{E}_{(r)})$ существуют равновесные цены $\bar{p}_L$, $\bar{p}_Q^{im}$ такие, что $\bar{p}_Q^{im} = \bar{p}_Q^{io}$ для всех $i \in N$, $m = 1, \ldots, r$. Допуская, что $\bar{z}$ (*)-блокируется какой-либо коалицией $M \subseteq N(r)$, ввиду равновесности $\bar{z}$ имеем

$$\bar{p}_L \cdot \Delta z_L^{im} + r\, \bar{p}_Q^{im} \left(\sum_M y_Q^d / m_i \right) > \bar{p}_Q \cdot y_Q^{im}, \quad (i,m) \in M,$$

где (x_L^{im}, y^{im}) – некоторые элементы, удовлетворяющие условиям

$$(x_L^{im}, w_Q + \frac{1}{m_i} \sum_M y_Q^d, y^{im}) \in \mathcal{P}_i(\bar{z}^{im}), \quad (i,m) \in M,$$

$$\sum_M x_L^{im} = \sum_M w_L^{im} + \sum_M y_L^{im} \quad {}^{*)}.$$

Поскольку $\bar{p}_Q^{io}$ являются общими векторами цен общественных благ для участников типа i, суммируя выписанные неравенства, получаем

$$\bar{p}_L \cdot \sum_M \Delta z_L^d + r\left(\sum_{i|m_i \neq 0} \bar{p}_Q^{io}\right) \cdot \sum_M y_Q^d > r\left(\sum_{i \in N} \bar{p}_Q^{io}\right) \cdot \sum_M y_Q^d .$$

Учитывая равенство $\sum_M \Delta z_L^d = 0$, имеем

$$\left(\sum_{i|m_i = 0} \bar{p}_Q^{io}\right) \cdot \sum_M y_Q^d < 0 ,$$

что противоречит неотрицательности векторов $\bar{p}_Q^{io}$ и $\sum_M y_Q^d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $\bar{z}$ – произвольный элемент из $\mathcal{Z}(\mathcal{E})$, а $\bar{p}_L$, $\bar{p}_Q^i$ – отвечающие ему равновесные цены. Нетрудно проверить, что $\dot{z} \in \mathcal{Z}(\mathcal{E}_{(r)})$, так как в качестве соответствующих равновесных цен можно взять $\bar{p}_L$, $\bar{p}_Q = \frac{1}{r} \bar{p}_Q^i$. Отсюда, в силу предложения I, имеем

$$\mathcal{Z}(\mathcal{E}) \subseteq C_r(\mathcal{E}), \quad r \geq 1 .$$

Что касается включения $\bigcap_{r=1}^{\infty} C_r(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{E})$, то на основании теоремы I для его проверки достаточно убедиться в справедливости импликации

$$z \in \bigcap_{r=1}^{\infty} C_r(\mathcal{E}) \implies z \in C_F(\mathcal{E}). \qquad (2.5)$$

---

*) Как и ранее, $\bar{p}_Q = \sum_{N(r)} \bar{p}_Q^{im}$, $\Delta z_L^{im} = x_L^{im} - w_L^{im} - y_L^{im}$.

Переходя к проверке (2.5), заметим, что в условиях теоремы 2 из блокируемости распределения $z \in Z(N)$ какой-либо нечеткой коалицией t вытекает блокируемость z некоторой рациональнозначной коалицией t°, аппроксимирующей t с надлежащей степенью точности. В самом деле, пусть существуют $(\tilde{x}^i, \tilde{y}^i) \in X_i \times Y_i$ такие, что

$$\tilde{z}^{it} \in \mathcal{P}_i(z^i) \quad , \qquad i \in supp\, t \,, \tag{2.6}$$
$$\sum_N t_i \tilde{x}^i_L = \sum_N t_i w^i_L + \sum_N t_i \tilde{y}^i_L \quad ,$$

где

$$\tilde{z}^{it} = (\, \tilde{x}^i_L \,,\; w_Q + \frac{1}{t_i} \sum_N t_j \tilde{y}^j_Q \,,\; \tilde{y}^i \,) \,.$$

Выберем рациональные числа $t^\circ_i \geqslant t_i$, $t^\circ_j = 0$, $j \notin supp\, t$ достаточно близкими к t_i так, чтобы выполнялись соотношения

$$z^{io} \in \mathcal{P}_i(z^i) \quad , \qquad i \in supp\, t \,, \tag{2.7}$$

где

$$z^{io} = \frac{t_i}{t^\circ_i} z^{it} + \frac{t^\circ_i - t_i}{t^\circ_i} (w^i_L \,, w_Q \,, 0) \,.$$

Непосредственно из построения z^{io} и из условия (2.6) имеем

$$\sum_N t^\circ_i x^{io}_L = \sum_N t^\circ_i w^i_L + \sum_N t_i \tilde{y}^i_L \,.$$

Отсюда, ввиду очевидного равенства $\sum_N t_i \tilde{y}^i_L = \sum t^\circ_i y^{io}_L$, получаем

$$\sum_N t^\circ_i x^{io}_L = \sum_N t^\circ_i w^i_L + \sum_N t^\circ_i y^{io}_L \,. \tag{2.8}$$

Далее, поскольку $t^\circ_i y^{io}_Q = t_i \tilde{y}^i_Q$ и $x^{io}_Q = w_Q + \frac{1}{t^\circ_i} \sum t_j \tilde{y}^j_Q$, справедливо соотношение

$$x^{io}_Q = w_Q + \frac{1}{t^\circ_i} \sum t^\circ_j y^{jo}_Q \,, \qquad i \in supp\, t \,. \tag{2.9}$$

Но условия (2.7)-(2.9) и означают, что рациональнозначная коалиция t° блокирует состояние z .

Для завершения доказательства теоремы 2 остается добавить, что блокируемость распределения z нечеткой рациональнозначной коалицией t° влечет существование натурального числа r

и коалиции $M \subseteq N(\tau)$, (*)-блокирующей распределение $\dot{z}_{(\tau)}$. Действительно, не уменьшая общности, можно считать $\sum_N t_i^\circ = 1$, а $t_i^\circ = m_i/\tau$, где τ, m_i - некоторые натуральные числа, удовлетворяющие условию $\sum_{i\in N} m_i = \tau$. Ясно, что коалиция $M = \bigcup_{i \mid m_i \neq 0} \{(i,m) \mid m = 1,\dots, m_i\}$ и есть искомая, так как она (*)-блокирует распределение $\dot{z}(\tau)$ с помощью набора $(x_L^{im}, y^{im})_{(i,m)\in M}$, где $(x_L^{im}, y^{im}) = (x_L^{io}, y^{io})$.

Отметим, что при некотором усилении требования строгой выпуклости множества $C_\tau(\mathcal{E})$ полностью исчерпывают ядра $C_*(\mathcal{E}_{(\tau)})$ в том смысле, что

$$C_*(\mathcal{E}_{(\tau)}) = \{\dot{z}_{(\tau)} \mid z \in C_\tau(\mathcal{E})\}. \qquad (2.10)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Будем говорить, что бинарное отношение α сильно выпукло, если для любого конечного набора не совпадающих между собой элементов $\{z_k\}_{k=1}^m$ выполняется включение

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m z_k \in \bigcup_{k=1}^m \mathcal{P}(z_k)\ ^{*)}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $\mathcal{E}$ удовлетворяет предположениям 1, 2, 4 и, кроме того, все α_i сильно выпуклы, то для любого $\tau \gg 1$ имеют место равенства (2.10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для некоторого $\bar{z} \in C_*(\mathcal{E}_{(\tau)})$ множество элементов $i \in N$, для которых компоненты $\bar{z}^{im}$ ($m=1,\dots,\tau$) не совпадают между собой, не пусто. Обозначим это множество через S. Ввиду сильной выпуклости α_{im}, очевидным образом вытекающей из сильной выпуклости α_i, найдутся элементы m_i такие, что

$$\frac{1}{\tau}\sum_{m=1}^{\tau} \bar{z}^{im} \in \mathcal{P}_{im_i}(\bar{z}^{im_i}), \quad i \in S.$$

Положим $m_i = 1$ для всех $i \notin S$ и рассмотрим коалицию $M = \{(i, m_i) \mid i \in N\}$. Покажем, что M (*)-блокирует

---

*) Для полных транзитивных строго выпуклых бинарных отношений такое включение выполняется автоматически.

распределение $\bar{z}$. Действительно, полагая $\tilde{z}^{im_i} = \frac{1}{r}\sum_{m=1}^{r} \bar{z}^{im}$, имеем в силу построения

$$\sum_{i\in N} \tilde{x}_L^{im_i} = \sum_{i\in N} w_L^{im_i} + \sum_{i\in N} \tilde{y}_L^{im_i} .$$

Далее, учитывая, что $\tilde{x}_Q^{im_i} = \bar{x}_Q^{im_i}$ для всех $i \in N$, имеем

$$(\tilde{x}_L^{im_i}, w_Q + \sum_M \tilde{y}_Q^d, \tilde{y}^{im_i}) \in \mathcal{P}_i(\tilde{z}^{im_i}), \quad i \in S. \quad (2.11)$$

Поскольку $\tilde{z}^{im_i} = \bar{z}^{im_i}$ ($i \in N \setminus S$), существует достаточно малое распределение частных благ в пользу участников коалиции $M_1 = \{(i, m_i) | i \in N/S\}$ (возможное ввиду предположения 2), не изменяющее соотношений (2.11) и улучшающее (в силу строгой монотонности α_i) компоненты $\bar{z}^{im}$ для всех $(i, m) \in M_1$. Но это и означает, что коалиция M (*)-блокирует распределение $\bar{z}$, что противоречит включению $\bar{z} \in C_*(\mathcal{E}_{(r)})$.

Ясно, что последовательность $\{C_r(\mathcal{E})\}_{r=1}^{\infty}$ является монотонно убывающей. Поэтому соотношение (2.3) эквивалентно равенству

$$\mathcal{L}(\mathcal{E}) = \lim C_r(\mathcal{E}) ,$$

где через $\lim A_r$ обозначается теоретико-множественный предел последовательности $\{A_r\}_{r=1}^{\infty}$.

Таким образом, как и в случае стандартных моделей обмена [7,8], равенство (2.3) в условиях сильной выпуклости α_i означает стягиваемость (*)-ядер реплик $\mathcal{E}_{(r)}$ к множеству линдаловских равновесий $\mathcal{E}$.

Что касается соотношения между множествами $\mathcal{L}(\mathcal{E}_{(r)})$ и $C_*(\mathcal{E}_{(r)})$, то в отличие от стандартных моделей в условиях предложения 2 множества $C_*(\mathcal{E}_{(r)})$ содержат лишь симметричные линдаловские равновесия $\mathcal{E}_{(r)}$. Последние определяются как элементы $\mathcal{L}(\mathcal{E}_{(r)})$, для которых существуют равновесные цены, удовлетворяющие дополнительному требованию:

$$\bar{p}_Q^{im}(\bar{x}_Q^{im} - w_Q^{(r)}) = \bar{p}_Q^{im'}(\bar{x}_Q^{im'} - w_Q^{(r)}) \quad (2.12)$$

для всех $i \in N$, $m, m' = 1, \dots, r$.

Обозначим через $\mathcal{L}_{sim}(\mathcal{E}_{(r)})$ множество всех симметричных линдаловских равновесий модели $\mathcal{E}_{(r)}$ и покажем, что в предположении сильной выпуклости предпочтений $\mathcal{L}_{sim}(\mathcal{E}_{(\tau)})$ полностью исчерпывается соответствующими репликами распределений из $\mathcal{L}(\mathcal{E})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если бинарные отношения $\mathcal{L}_i$ сильно выпуклы, то для всех $\tau = 1, \dots$ справедливы равенства

$$\mathcal{L}_{sim}(\mathcal{E}_{(\tau)}) = \{ \dot{z}_{(\tau)} \mid z \in \mathcal{L}(\mathcal{E}) \} .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что множество $\{ \dot{z}_{(\tau)} \mid z \in \mathcal{L}(\mathcal{E}) \}$ содержится в $\mathcal{L}_{sim}(\mathcal{E}_{(\tau)})$, поскольку в качестве искомых цен для $\dot{z}_{(\tau)}$ можно взять систему $\bar{p}_L$, $\bar{p}_Q^{im} = \frac{1}{\tau} \bar{p}_Q^i$, где $\bar{p}_L$, $\bar{p}_Q^i$ – равновесные цены, отвечающие $z \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$.

Для проверки противоположного включения рассмотрим произвольный элемент $\bar{z} \in \mathcal{L}_{sim}(\mathcal{E}_{(\tau)})$ и отвечающие ему равновесные цены $\bar{p}_L$, $\bar{p}_Q^{im}$, удовлетворяющие условию (2.12). Покажем, что $\bar{z} = \dot{z}_{(\tau)}$ для некоторого $z \in Z(N)$. Допуская противное и используя сильную выпуклость предпочтений $\mathcal{L}_{im}$, найдем участника (i, m_i) , для которого элемент $\tilde{z}^{im_i} = = \frac{1}{\tau} \sum_{m=1}^{\tau} \bar{z}^{im}$ принадлежит $\mathcal{P}_{im_i}(\bar{z}^{im_i})$. Но $\tilde{z}^{im_i}$ принадлежит и бюджетному множеству $B_{im_i}(\bar{p})$. Действительно, ввиду (2.12), для всех $m = 1, \dots, \tau$ справедливы неравенства

$$\bar{p}_L \cdot \Delta \bar{z}_L^{im} - \bar{p}_Q \cdot \bar{y}_Q^{im} + c_i \le 0 , \qquad (2.13)$$

где $\bar{p}_Q = \sum_{N(\tau)} \bar{p}_Q^d$, а $c_i = \bar{p}_Q^{im_i} (\bar{x}_Q^{im_i} - w_Q^{(\tau)})$ – общая для всех участников типа i величина расходов на прирост общественных благ. Умножая каждое соотношение (2.13) на $\frac{1}{\tau}$ и складывая получившиеся неравенства, имеем

$$\bar{p}_L \cdot \Delta \tilde{z}_L^{im_i} - \bar{p}_Q \cdot \tilde{y}_Q^{im_i} + c_i \le 0 ,$$

что и означает принадлежность $\tilde{z}^{im_i}$ бюджетному множеству участника (i, m_i) . Но включение $\tilde{z}^{im_i} \in B_{im_i}(\bar{p}) \cap \mathcal{P}_{im_i}(\bar{z}^{im_i})$ противоречит равновесности $\bar{z}$.

Итак, $\bar{z} = \dot{z}_{(\tau)}$ для некоторого $z \in Z(N)$. Убедимся теперь, что в качестве равновесных оценок общественных благ для $\bar{z}$ можно взять систему $\tilde{p}_Q^{im} = \tilde{p}_Q^{io}$ ($i \in N$, $m = 1, \dots, \tau$), где $\tilde{p}_Q^{io} = \frac{1}{\tau} \sum_{m=1}^{\tau} \bar{p}_Q^{im}$ – единый вектор оценок участников типа i . В самом деле, учитывая, что $\tilde{p}_Q = = \tau \sum_N \tilde{p}_Q^{io} = \bar{p}_Q$, а $\bar{x}_Q^{im} - w_Q^{(\tau)} = \sum_{N(\tau)} \bar{y}_Q^d$, на основании (2.12) и (2.13) имеем

$$\bar{p}_L \cdot \Delta \bar{z}_L^{im} - \tilde{p}_Q \cdot \bar{y}_Q^{im} + \tilde{p}_Q^{im} \cdot (\bar{x}_Q^{im} - w_Q^{(\tau)}) \leq 0$$

для всех $i \in N, m=1,\dots,\tau$. Далее, допуская, что найдется $\tilde{z}^{im} \in \mathcal{P}_{im}(\bar{z}^{im})$, ввиду $\bar{z}^{im} = \dot{z}^i$ $(m=1,\dots,\tau)$ получаем

$$\bar{p}_L \cdot \Delta \tilde{z}_L^{im} - \bar{p}_Q \cdot \tilde{y}_Q^{im} + \bar{p}_Q^{im'} \cdot (\tilde{x}_Q^{im} - w_Q^{(\tau)}) > 0$$

для всех $m' = 1,\dots,\tau$. Отсюда

$$\bar{p}_L \cdot \Delta \tilde{z}_L^{im} - \tilde{p}_Q \cdot \tilde{y}_Q^{im} + \tilde{p}_Q^{im} \cdot (\tilde{x}_Q^{im} - w_Q^{(\tau)}) > 0,$$

что и означает максимальность элемента $\bar{z}^{im}$ в бюджетном множестве, отвечающем ценам $\bar{p}_L, \tilde{p}_Q^{im}$.

Для завершения доказательства предложения 3 остается заметить, что в качестве цен для распределения z, фигурировавшего в равенстве $\bar{z} = \dot{z}_{(\tau)}$, можно взять систему $\bar{p}_L$, $\tau \tilde{p}_Q^{io}$.

На основании предложений 1–3 имеем

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях предложения 2 для всех $\tau \geqslant 1$ справедливы включения

$$\mathcal{L}_{sim}(\mathcal{E}_{(\tau)}) \subseteq C_*(\mathcal{E}_{(\tau)}).$$

Приведенные утверждения показывают, что в случае сильной выпуклости предпочтений соотношение (2.3) можно интерпретировать и как стягиваемость (*)- ядер реплик $\mathcal{E}_{(\tau)}$ к множеству их симметричных линдаловских равновесий.

Завершая обсуждение теоремы 2, отметим, что представляют интерес и более сильные условия симметрии, имеющие смысл для самых общих моделей линдаловского типа. Одним из вариантов является требование совпадения расходов $p_Q^i(x_Q^i - w_Q)$ на прирост общественных благ для всех участников $\mathcal{E}$, имеющих одинаковые характеристики w_L^i, X_i, Y_i и α_i (частный случай см. в [4]). Ясно, что и в этой ситуации справедливы соответствующие утверждения об одинаковом выборе $\bar{z}^i$ и $\bar{p}_Q^i$ для "одинаковых" участников экономики $\mathcal{E}$. Более того, надлежащее уточнение блокирования, учитывающее наличие однотипных участников, позволяет получить аналог теоремы 2 и для симметричной части $\mathcal{L}(\mathcal{E})$.

3. В заключение остановимся вкратце на упоминавшейся связи между линдаловскими и информационными равновесиями. Приведем соответствующие определения из [5].

Обобщенной моделью обмена (с производством) будем называть систему

$$E = \langle N, \mathcal{K}, \{\mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i, w^i, \beta_i\}_N \rangle , \qquad (3.1)$$

где $N=\{1,\dots,n\}$ – множество участников, $\mathcal{K}=\{1,\dots,k\}$ – номенклатура продуктов в E, $\mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i \subseteq \mathbb{R}^{\mathcal{K}}$ – потребительские и производственные множества участников $i \in N$, β_i – бинарные отношения предпочтения $i \in N$, заданные на $\mathcal{Z} = \prod_N \mathcal{X}_i \times \mathcal{Y}_i$, $w^i \in \mathbb{R}^{\mathcal{K}}$ – начальный запас участника $i \in N$.

Основное отличие E от традиционных моделей равновесного анализа состоит в том, что предпочтения участников могут зависеть не только от их собственного потребления и производства, но и от состояния системы в целом.

Положим $\mathcal{X} = \prod_N \mathcal{X}_i$, $\mathcal{Y} = \prod_N \mathcal{Y}_i$, $\mathcal{Z}(N) = \{(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \mid \sum_N x^i = \sum_N w^i + \sum_N y^i\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 [5]. Информационным равновесием обобщенной модели обмена E называется состояние $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{Z}(N)$, для которого существуют цены $\bar{p}_0 \in \mathbb{R}^{\mathcal{K}}$, $\bar{p}^i, \bar{\pi}^i \in (\mathbb{R}^{\mathcal{K}})^N$ такие, что

$$(i) \qquad \sum_{i \in N} \bar{p}^i_k = \sum_{i \in N} \bar{\pi}^i_k = \bar{p}_0 , \qquad k \in N ,$$

$$(ii) \qquad \mathcal{B}_i(\bar{p}, \bar{\pi}) \cap P_i(\bar{z}) = \emptyset , \qquad i \in N ,$$

где

$$\mathcal{B}_i(\bar{p}, \bar{\pi}) = \{(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \mid \bar{p}^i x \leq \bar{p}_0 w^i + \bar{\pi}^i y\},$$

$$P_i(\bar{z}) = \{z \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \mid (\bar{z}, z) \in \beta_i , (z, \bar{z}) \notin \beta_i\}.$$

Множество информационных равновесий E обозначим через $I(E)$.

Пусть теперь $\mathcal{E} = \langle N, L, Q, \{X_i, Y_i, \alpha_i, w^i_L\}_N, w_Q \rangle$ – произвольная модель Линдала, $\bar{z} = (\bar{x}^i, \bar{y}^i)_N$ – некоторый элемент из $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, а $\bar{p}_L, \bar{p}^i_Q$ – отвечающие ему равновесные цены. Положим

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{X} = L \cup Q\,,\\
&\mathcal{X}_i = X_{Li} \times X_Q + (0_L\,, -w^i_Q)\,, \qquad\qquad (3.2)\\
&\mathcal{Y}_i = Y_i\,,\\
&w^i = (w^i_L\,, 0_Q)\,,
\end{aligned}
$$

где $X_Q = \frac{1}{n} \bigcap_{i=1}^{n} X_{Qi}$, а w^i_Q - произвольные элементы из R^Q, удовлетворяющие условию $\sum w^i_Q = w_Q$.

Далее, для элементов $z = (x^i_L, x^i_Q - w^i_Q, y^i)_N$ и $\tilde{z} = (\tilde{x}^i_L, \tilde{x}^i_Q - w^i_Q, \tilde{y}^i)_N$ из $\prod_N \mathcal{X}_i \times \mathcal{Y}_i$ полагаем

$$
z \beta_i \tilde{z} \Longleftrightarrow (x^i_L, \sum_N x^k_Q + w_Q, y^i) \alpha_i (\tilde{x}^i_L, \sum_N \tilde{x}^k_Q + w_Q, \tilde{y}^i). \qquad (3.3)
$$

Нетрудно проверить, что состояние $(\bar{x}^i_L, \frac{1}{n}\bar{x}^i_Q - w^i_Q, \bar{y}^i)_N$ из $\prod_N \mathcal{X}_i \times \mathcal{Y}_i$ является информационным равновесием модели типа (3.I), заданной в соответствии с формулами (3.2)-(3.3). При этом в качестве равновесных цен можно взять векторы $\bar{p}_0$, $\bar{p}^i$, $\bar{\pi}^i$, определяемые из соотношений

$$
\begin{aligned}
&\bar{p}_0 = (\bar{p}_L, \bar{p}_Q)\,,\\
&\bar{p}^i_{Qk} = \bar{p}^i_Q \qquad, k \in N\,,\\
&\bar{\pi}^i_{Qk} = \begin{cases} \bar{p}_Q &, i = k\,,\\ 0 &, i \neq k\,, \end{cases}\\
&\bar{p}^i_{Lk} = \bar{\pi}^i_{Lk} = \begin{cases} \bar{p}_L &, i = k\,,\\ 0 &, i \neq k\,. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Таким образом, каждое линдаловское равновесие $\mathcal{E}$ является в указанном смысле информационным равновесием построенной обобщенной модели обмена. Обратное, вообще говоря, неверно. Последнее обстоятельство, наряду с естественными преимуществами конкретизации, и послужило одной из главных причин самостоятельного рассмотрения асимптотики ядер в моделях линдаловского типа.

ЛИТЕРАТУРА

I. Макаров В.Л. Экономическое равновесие: существование и экстремальные свойства // Современные проблемы математики. - М., 1982. - Т.19.-С.23-58.
2. Макаров В.Л., Васильев В.А. Информационное равновесие и ядро в обобщенных моделях обмена // Докл. АН СССР. - 1984. - Т.275, № 3. - С.549-553.
3. Milleron J.-C. Theory of value with public goods: a survey article. - J. Econ. Theory.- 1972.- V.5.- P.419-477.
4. Champsaur P. Symmetry and continuity properties of Lindahl equilibria. - J. Math. Econ. - 1976. - V.3.- P.19-36.
5. Макаров В.Л., Васильев В.А., Козырев А.Н., Маракулин В.М. Равновесие, рационирование и устойчивость // Оптимизация.- Новосибирск, 1986. - Вып. 38(55). - С.2-120.
6. Маленво Э. Лекции по микроэкономическому анализу. - М.: Наука, 1985.
7. Экланд И. Элементы математической экономики. - М.: Мир, 1983.
8. Debreu G., Scarf H. A limit theorem on the core of an economy. - Intern. Econ. Rev. - 1963. - V.4. - P. 235-246.

Поступила в ред.-изд. отдел
4.01.1987 г.