УДК 519.85:519.865.3

ОБ ОТЫСКАНИИ РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ КООПЕРАЦИИ

В.И.Шмырев

В работах [I,2] автором для исследования вопроса о нахождении состояний равновесия в экономических моделях обмена был предложен подход, основанный на рассмотрении порождаемых моделью полиэдральных разбиений симплекса цен. Для классической модели обмена [3] этот подход позволил предложить эффективную конечную процедуру отыскания равновесных цен [4].

В настоящей работе показывается, как тот же подход можно применить для нахождения равновесия в ином варианте модели обмена, когда задачи максимизации линейных целевых функций участников заменяются задачами минимизации этих функций (при сохранении требования неотрицательности их коэффициентов). Этот вариант модели был условно назван автором моделью кооперации и уже рассматривался в [I,2].

Предлагаемый алгоритм позволяет отыскать состояние равновесия за конечное число шагов и во многом близок к алгоритму для классического варианта модели обмена. Однако имеются и значительные качественные отличия, вызванные принципиальным различием в характере монотонности возникающих кусочно-постоянных отображений симплекса цен в себя, на что указывалось в [2].

I. Задача и порождаемое ею кусочно-постоянное отображение

Пусть $I=\{1,2,\dots,m\}$ – множество номеров участников, а $J=\{1,2,\dots,n\}$ – множество номеров товаров рассматриваемой модели. Участник с номером $i\in I$ характеризуется двумя неотрицательными векторами $c^i, d^i \in R^n$ и при фиксированном неотрицательном векторе цен $p(\neq 0)$ решает экстремальную задачу

$$(c^i, x^i) - min! \qquad (1)$$

при условиях

$$(p, x^i) = (p, d^i), \qquad (2)$$

$$x^i \geqslant 0. \qquad (3)$$

Говорим, что p является равновесным вектором цен, если среди оптимальных решений указанных экстремальных задач найдутся такие $\tilde{x}^i$, что выполняется условие баланса

$$\sum_{i\in I} \tilde{x}^i = \sum_{i\in I} d^i.$$

О совокупности таких векторов $\tilde{x}^i$ вместе с соответствующим вектором цен p говорят, что они образуют состояние равновесия модели.

Ясно, что можно ограничиться рассмотрением векторов цен p из симплекса σ, задаваемого условием неотрицательности компонент p_j и требованием нормировки

$$\sum_j p_j = 1.$$

Естественно предполагать, что все векторы c^i и d^i отличны от нуля, и, кроме того, $\sum_{i\in I} d^i > 0$. Не ограничивая общности, будем считать, что

$$\sum_i d^i = (1, \ldots, 1). \qquad (4)$$

Чтобы акцентировать изложение на основных идеях предлагаемого подхода, сделаем более сильное предположение, считая в дальнейшем, что все векторы c^i и d^i положительны.

Сопоставим рассматриваемой модели, как и в случае модели обмена [4], параметрическую транспортную задачу следующего вида:

$$\sum_{i,j} z_{ij} \ln c^i_j \;- min! \qquad (5)$$

$$\sum_j z_{ij} = (p, d^i) \quad, i\in I, \qquad (6)$$

$$\sum_i z_{ij} = p_j \quad , \; j \in J, \tag{7}$$

$$z_{ij} \geqslant 0 \quad , \; (i,j) \in I \times J. \tag{8}$$

Роль параметров здесь играют компоненты p_j вектора цен p. Ввиду условия (4) эта задача очевидным образом разрешима при любых неотрицательных значениях p_j.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ I. Для задачи (5)-(8) выполняется условие двойственной невырожденности.

Это предположение обеспечивает единственность оптимального решения при любом $p \geqslant 0$.

Пусть $u_i, i \in I$, и $v_j, j \in J$, - совокупность оптимальных значений двойственных переменных (потенциалов), отвечающих фиксированному набору параметров p_j. Образуем вектор q из компонент $q_j = e^{v_j}, j \in J$. Производя нормировку делением на $\sum_j q_j$, получим вектор $\bar{q} = q / \sum_j q_j$, принадлежащий внутренности симплекса σ.

Описанная процедура определяет точечно-множественное отображение F из симплекса σ в множество его внутренних точек $\mathrm{Int}\,\sigma = \sigma^{\circ}$: каждой точке $p \in \sigma$ сопоставляется множество всех $\bar{q} \in \sigma^{\circ}$, полученных при данном p из различных оптимальных наборов v_j, $j \in J$, по указанному правилу.

Пусть $\hat{\mathcal{B}}$ - какое-либо оптимальное базисное множество, полученное при решении транспортной задачи (5)-(8) при некотором $p = \hat{p}$ по одному из алгоритмов симплексного типа. По $\hat{\mathcal{B}}$ однозначно определяются линейные функции $z_{ij} = z_{ij}^{\hat{\mathcal{B}}}(p)$, удовлетворяющие системе условий (6)-(7) и условию

$$z_{ij} = 0 \, , \; (i,j) \notin \hat{\mathcal{B}}. \tag{9}$$

Величины $z_{ij}^{\hat{\mathcal{B}}}(p)$ будут задавать оптимальное решение задачи (5)-(8) не только при $p = \hat{p}$, но и при любом p, для которого $z_{ij}^{\hat{\mathcal{B}}}(p)$ остаются неотрицательными. Множество таких $p \in \sigma$ образует многогранник, который будем обозначать через $\Omega(\hat{\mathcal{B}})$. Для точек p из относительной внутренности этого многогранника $\mathrm{Int}\,\Omega(\hat{\mathcal{B}}) = \Omega^{\circ}(\hat{\mathcal{B}})$ образ $F(p)$, как легко видеть, будет одноточечным. Образы большей размерности будем получать при рассмотрении точек p, принадлежащих собственным граням многогранника $\Omega(\hat{\mathcal{B}})$. В дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь точек p из σ°. Поэтому нас будут интересовать лишь те грани многогранника $\Omega(\hat{\mathcal{B}})$, которые пересекаются с σ°. Эти грани задаются накрывающими подмножествами базисного множества $\hat{\mathcal{B}}$.

Множество $\mathcal{B} \subset I \times J$ назовем накрывающим, если каждый из номеров $i \in I$ и $j \in J$ входит хотя бы в одну из пар $(i,j) \in \mathcal{B}$. Каждому накрывающему $\mathcal{B} \subset \hat{\mathcal{B}}$ соответствует некоторая грань $\Omega(\mathcal{B})$ многогранника $\Omega(\hat{\mathcal{B}})$, которая задается теми же условиями, что и $\Omega(\hat{\mathcal{B}})$, но в условии (9) $\hat{\mathcal{B}}$ нужно заменить на $\mathcal{B}$.

Обозначим через $\mathcal{L}$ совокупность всех двойственно-допустимых базисных множеств и их всевозможных накрывающих подмножеств.

Справедливо следующее утверждение: каждое $\mathcal{B} \in \mathcal{L}$ порождает непустой многогранник $\Omega(\mathcal{B})$, и эти многогранники покрывают σ° правильным образом:

(i) пересечение любых двух многогранников $\Omega(\mathcal{B}_1)$ и $\Omega(\mathcal{B}_2)$, $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathcal{L}$, если оно непусто, является гранью для каждого из них;

(ii) $$\sigma^\circ = \bigcup_{\mathcal{B} \in \mathcal{L}} \operatorname{Int} \Omega(\mathcal{B}) .$$

Несложно убедиться в том, что образом точек $p \in \operatorname{Int} \Omega(\mathcal{B})$ при отображении F будет также выпуклый многогранник $\Xi(\mathcal{B})$, задаваемый условиями: $q \in \sigma$ и

$$\frac{c_j^i}{q_j} = \min_k \frac{c_k^i}{q_k}, \quad (i,j) \in \mathcal{B}. \qquad (10)$$

Задача об отыскании равновесия в рассматриваемой экономической модели эквивалентна отысканию неподвижной точки введенного отображения F, что, в свою очередь, приводит к задаче отыскания такого $\mathcal{B} \in \mathcal{L}$, что $\Omega(\mathcal{B}) \cap \Xi(\mathcal{B}) \neq \varnothing$.

На доказательствах сформулированных утверждений здесь останавливаться не будем. Доказываются они по той же схеме, что аналогичные утверждения для модели обмена [4].

2. Алгоритм

Процесс отыскания состояния равновесия состоит в последовательном переходе от одного множества $\mathcal{B} \in \mathcal{L}$ к "соседнему" множеству $\mathcal{B}' \in \mathcal{L}$, получающему из $\mathcal{B}$ добавлением или исключением одного элемента.

На k-шаге процесса имеются множество $\mathcal{B}_k \in \mathcal{L}$ и точки

$q^k \in \Xi(\mathcal{B}_k)$ и $\bar{p}^k \in \Omega(\mathcal{B}_k)$. Для удобства вычислений будем преобразовывать не $\bar{p}^k \in \sigma$, а некоторую $p^k \in R_+^n$, из которой $\bar{p}^k$ получается уже упоминавшейся нормировкой: $\bar{p}^k = p^k / \sum_j p_j^k$. Точки q^k и p^k связаны равенством

$$p^k = q^k + \tau_k e_1, \tag{11}$$

где $e_1 = (1,0,\dots,0)$ - координатный орт, а τ_k - положительное число. Выбор именно первого координатного орта не является существенным, однако в течение процесса выбранный орт уже не меняется.

Помимо множества $\mathcal{B}_k$, точек p^k и q^k имеется еще значение $\lambda_k \in \{-1,1\}$, содержательный смысл которого будет пояснен ниже.

Выполнение итерации начинается с определения точки $z^k \in \sigma$, принадлежащей пересечению подпространств $L(\mathcal{B}_k)$ и $M(\mathcal{B}_k)$, являющихся линейными оболочками многогранников $\Omega(\mathcal{B}_k)$ и $\Xi(\mathcal{B}_k)$ соответственно. Это, как и в случае модели обмена, приводит к решению некоторой системы линейных уравнений. Для описания этой системы целесообразно ввести в рассмотрение граф $\Gamma(\mathcal{B}_k)$ с множеством вершин $\{1,2,\dots,m+n\}$ и множество дуг $\{(i,m+j) / (i,j) \in \mathcal{B}_k\}$. Обозначим через $\mathcal{N}(\mathcal{B}_k)$ множество номеров компонент связности этого графа. Разбиению графа на компоненты связности естественным образом соответствует разбиение множеств I и J на подмножества $I_\nu \subset I$ и $J_\nu \subset J$, $\nu \in \mathcal{N}(\mathcal{B}_k)$.

Упомянутая система уравнений для определения точки z^k имеет вид:

$$\frac{z_l}{c_l^i} = \frac{z_j}{c_j^i}, \quad (i,l),(i,j) \in \mathcal{B}_k, \tag{12}$$

$$\sum_{j \in J_\nu} z_j = \sum_{i \in I_\nu} (z, d^i), \quad \nu \in \mathcal{N}(\mathcal{B}_k). \tag{13}$$

Легко видеть, что эта система всегда имеет единственное с точностью до множителя положительное решение. Действительно, система (12) задает некоторые пропорции между величинами z_j, $j \in J_\nu$, на каждой компоненте связности графа $\Gamma(\mathcal{B}_k)$, т.е. общее решение этой системы имеет вид:

$$z_j = \pi_\nu g_j, \quad j \in J_\nu, \quad \nu \in \mathcal{N}(\mathcal{B}_k), \tag{14}$$

где π_ν - произвольные параметры, а g_j - положительные константы, задающие упомянутые пропорции. Подставляя представление (I4) в (I3), получаем

$$\pi_\nu \sum_{j\in J_\nu} q_j = \sum_{i\in I_\nu} \sum_{\mu\in\mathcal{N}(B_\kappa)} \pi_\mu \sum_{j\in J_\mu} d_j^i q_j, \quad \nu\in\mathcal{N}(B_\kappa). \tag{I5}$$

Так как B_κ - накрывающее множество, то $J_\nu \neq \emptyset$ при всех $\nu\in\mathcal{N}(B_\kappa)$, и, не ограничивая общности, можно считать, что $\sum_{j\in J_\nu} q_j = 1$. В результате, объединяя величины π_ν в вектор π, систему (I5) можно переписать в векторном виде

$$\pi = \gamma\pi, \tag{I6}$$

где γ - положительная матрица, обладающая, ввиду (4), свойством: сумма элементов в каждом столбце равна единице. Это означает, что единица является собственным числом матрицы γ. В силу теоремы Перрона система (I6) имеет единственное с точностью до положительного множителя положительное решение, что позволяет однозначно определить $r^\kappa \in \sigma$.

Определив r^κ, рассмотрим зависящие от параметра t точки

$$p(t) = (1-t)p^\kappa + t r^\kappa, \tag{I7}$$

$$q(t) = (1-t)q^\kappa + t r^\kappa. \tag{I8}$$

Эти формулы такие же, как и в алгоритме для модели обмена. Однако отличие заключается в характере изменения параметра t: в то время как в случае модели обмена значение t всегда увеличивается от $t=0$, то в данном случае t может и уменьшаться, принимая отрицательные значения. То, как следует изменять t на данной итерации, и указывает переменная λ: если $\lambda_\kappa = 1$, то на данной итерации параметр t следует увеличивать; если же $\lambda_\kappa = -1$ - уменьшать. Граница изменения t в избранном направлении определяется условиями: $\bar p(t)\in\Omega(B_\kappa)$,*) $q(t)\in\Xi(B_\kappa)$, что эквивалентно системе неравенств:

$$x_{ij}^{B_\kappa}(p(t)) \geq 0, \quad (i,j)\in B_\kappa, \tag{I9}$$

$$\frac{c_\ell^i}{q_\ell(t)} \geq \frac{c_j^i}{q_j(t)}, \quad (i,\ell)\notin B_\kappa,\ (i,j)\in B_\kappa. \tag{20}$$

---

*) Здесь $\bar p(t) = p(t)/\sum_j p_j(t)$.

Если при этом оказывается достижимым значение $t=1$, то $\{\tau^k\}=\Omega(\mathcal{B}_k)\cap\Xi(\mathcal{B}_k)$, и мы получаем искомый вектор равновесных цен.

Пусть при изменении t получено значение $t=t_k$, и дальнейшему изменению t препятствует одно из неравенств (I9). Это означает, что точка $\bar{p}(t)$ достигает при $t=t_k$ границы множества $\Omega(\mathcal{B}_k)$. В этом случае переходим к $\mathcal{B}_{k+1}$, исключая из $\mathcal{B}_k$ элемент (i_1, j_1), соответствующий лимитирующему из неравенств (I9): $\mathcal{B}_{k+1}=\mathcal{B}_k\setminus\{(i_1,j_1)\}$. Это приведет к новым множествам $\Omega(\mathcal{B}_{k+1})\subset\Omega(\mathcal{B}_k)$, $\Xi(\mathcal{B}_{k+1})\supset\Xi(\mathcal{B}_k)$.

Если же при изменении t лимитирующее неравенство оказалось в системе (20), то $\mathcal{B}_{k+1}$ получаем из $\mathcal{B}_k$ пополнением соответствующей парой (i_1, ℓ_1): $\mathcal{B}_{k+1}=\mathcal{B}_k\cup\{(i_1,\ell_1)\}$. Это приводит к $\Omega(\mathcal{B}_{k+1})\supset\Omega(\mathcal{B}_k)$ и $\Xi(\mathcal{B}_{k+1})\subset\Xi(\mathcal{B}_k)$.

В любом случае имеем $q^{k+1}=q(t_k)\in\Xi(\mathcal{B}_{k+1})$, $\bar{p}^{k+1}=\bar{p}(t_k)\in\Omega(\mathcal{B}_{k+1})$ и $p^{k+1}=q^{k+1}+\tau_{k+1}e_1$ при $\tau_{k+1}=t_k\tau_k$. Наконец, полагаем $\lambda_{k+1}=-\lambda_k$ и переходим к следующему шагу процесса.

3. Обоснование сходимости

Получение состояния равновесия по описанной процедуре можно гарантировать лишь при специальном выборе начального множества $\mathcal{B}_0=\tilde{\mathcal{B}}$, о котором будет сказано ниже. Для доказательства основного утверждения потребуются некоторые вспомогательные утверждения и понятия.

Введем, как и в работе автора [2], на множестве σ° структуру линейного пространства, определяя операции сложения и умножения на вещественный скаляр. Обозначим для краткости $\Omega = \operatorname{Int} R^n_+=\{p\in R^n/p>0\}$. Будем рассматривать точки $p\in\Omega$ как представителей соответствующих классов эквивалентности P (лучей), порождаемых таким отношением:

$$p'\sim p'' \leftrightarrow p'=tp'',\ t>0.$$

Так как между точками $p\in\sigma^\circ$ и введенными классами эквивалентности имеется очевидно взаимно-однозначное соответствие, то можно ввести требуемые операции в множестве классов:

I) для классов P' и P'' под $P'\oplus P''$ понимается класс P, порождаемый вектором p с компонентами

$$p_j=p'_j p''_j,\quad j\in J,$$

где p'_j и p''_j - компоненты каких-либо представителей $p'\in P'$

и $p''\in P''$;

2) для класса Q и вещественного числа α под $\alpha\odot Q$ понимается класс P, порождаемый вектором p с компонентами

$$p_j = q_j^{\alpha}, \quad j\in J,$$

где q_j - компоненты какого-либо $q\in Q$.

Несложно проверить, что результат введенных таким образом операций не зависит от выбора конкретных представителей классов и что все аксиомы линейного пространства для введенных операций выполняются.

Обозначим полученное линейное пространство через Σ. Роль нулевого элемента в нем играет класс, содержащий точку $(1,\dots,1)\in R^n$. Обозначим его через 0_Σ.

В дальнейшем, ради краткости изложения, но там, где это не в ущерб ясности, будем отождествлять точки $p\in\Omega$ с соответствующими им классами P, говоря, например, для $p',p''\in\Omega$ о разности $p'\ominus p''$.

Вернемся теперь к рассмотрению вопроса о сходимости описанного алгоритма. Из (17) и (18) следует

$$p(t)-q(t)=(1-t)(p^k-q^k)=(1-t)\tau_k e_1. \quad (21)$$

Это означает, что элемент $p(t)\ominus q(t)$ находится в Σ на луче Λ, исходящем из 0_Σ в направлении элемента $f_1\in\Sigma$, порождаемого вектором $f_1=(\alpha,1,\dots,1)\in R^n$, где $\alpha>1$.

С другой стороны, $p(t)\ominus q(t)$ принадлежит множеству $\Omega(\mathcal{B}_k)\ominus\Xi(\mathcal{B}_k)=\Theta(\mathcal{B}_k)\subset\Sigma$.

Заметим, что в пространстве Σ линейные функционалы имеют вид

$$h(p)=\sum_j h_j \ln p_j,$$

где h_j - вещественные числа, удовлетворяющие условию $\sum h_j=0$. Поэтому многогранники $\Xi(\mathcal{B})\subset\Omega$, рассматриваемые как множества в Σ, также являются многогранниками, ибо задаются системами линейных неравенств вида $\ln p_l-\ln p_j\geqslant const$. Этого, однако, нельзя сказать о множествах $\Omega(\mathcal{B})$: в пространстве Σ они являются криогранниками. В результате криогранниками будут и множества $\Theta(\mathcal{B})=\Omega(\mathcal{B})\ominus\Xi(\mathcal{B})$.

ЛЕММА I. Пересечение луча Λ с любым из криогранников $\Theta(\mathcal{B})$ является связным множеством.

Иными словами, утверждение леммы состоит в том, что луч Λ, покинув однажды какое-либо из множеств $\Theta(\mathcal{B})$, уже не "возвращается" в него.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим линейные оболочки $L(\mathcal{B})$ и $M(\mathcal{B})$ соответственно многогранников $\Omega(\mathcal{B})$ и $\Xi(\mathcal{B})$ как множеств в R^n. Покажем, что множества $L(\mathcal{B})\cap\Omega$ и $M(\mathcal{B})\cap\Omega$, рассматриваемые как множества в Σ, взаимно дополняют друг друга в следующем смысле: любая точка $s\in\Sigma$ однозначно представима в виде разности $p\ominus q$ точек $p\in L(\mathcal{B})\cap\Omega$ и $q\in M(\mathcal{B})\cap\Omega$.

Иначе говоря, нужно показать, что система уравнений

$$\frac{p_j}{q_j}=s_j \quad , \ j\in J, \tag{22}$$

$$\sum_{j\in J_\nu} p_j=\sum_{i\in I_\nu}(p,d^i) \quad , \quad \nu\in\mathcal{N}(\mathcal{B}), \tag{23}$$

$$\frac{q_\ell}{c_\ell^i}=\frac{q_j}{c_j^i} \quad , \ (i,\ell),(i,j)\in\mathcal{B}, \tag{24}$$

имеет при $s_j>0$ единственное с точностью до множителя положительное решение. Фигурирующие здесь множества I_ν, J_ν определяются ν-й компонентой связности графа $\Gamma(\mathcal{B})$ аналогично тому, как это было сделано при описании системы (12)-(13). Дальнейшие рассуждения следуют схеме, использованной при анализе разрешимости системы (12)-(13) с тем лишь отличием, что условие нормировки на величины q_j, $j\in J_\nu$, вводится теперь равенством

$$\sum_{j\in J_\nu} q_j s_j=1 .$$

В итоге снова приходим к системе вида (16) и, используя теорему Перрона, получаем требуемое: система (22)-(24) имеет единственное с точностью до положительного множителя положительное решение.

Вернемся непосредственно к утверждению леммы. Из доказанной однозначности представления любой точки $s\in\Sigma$ в виде $s=p^s\ominus q^s$, $p^s\in L(\mathcal{B})\cap\Omega$, $q^s\in M(\mathcal{B})\cap\Omega$, получаем единственность такого представления и для точек луча $\Lambda\subset\Sigma$. Следует подчеркнуть, что, говоря о единственности, имеем в виду единственность p^s и q^s как элементов пространства Σ, т.е.

единственность соответствующих классов эквивалентности в $\Omega \subset R^n$. Конкретные же представители этих классов определяются, естественно, лишь с точностью до положительного множителя. Получим однозначность и в выборе представителей, если, рассматривая p^s и q^s как элементы из R^n, потребуем дополнительно $p^s, q^s \in \sigma$. При этом условии, анализируя равенство (21), приходим к заключению, что при продвижении s по лучу Λ соответствующие точки $p^s, q^s \in \sigma$ будут перемещаться по некоторым лучам $\mathcal{P} \subset L(\mathcal{B})$ и $Q \subset M(\mathcal{B})$, исходящим из точки пересечения $L(\mathcal{B}) \cap M(\mathcal{B}) \cap \sigma$. Несложно проверяется, что упорядоченность точек s на луче Λ согласуется с упорядоченностью точек на лучах $\mathcal{P}$ и Q : $s_1 \succ s_2$ влечет $p^{s_1} \succ p^{s_2}$, $q^{s_1} \succ q^{s_2}$. Подчеркнем, что Λ - это луч в Σ, а $\mathcal{P}$ и Q - лучи в R^n.

Ясно, что **движущаяся точка** $s \in \Lambda$ тогда и только тогда покидает множество $\Omega(\mathcal{B}) \ominus \Sigma(\mathcal{B})$, когда либо точка p^s покидает $\Omega(\mathcal{B})$, двигаясь по лучу $\mathcal{P}$, либо точка q^s покидает $\Sigma(\mathcal{B})$, двигаясь по лучу Q, либо то и другое происходит одновременно. Принимая во внимание, что множества $\Omega(\mathcal{B})$ и $\Sigma(\mathcal{B})$ являются многогранниками в R^n, а $\mathcal{P}$ и Q - лучи в R^n, получаем утверждение леммы. Лемма доказана.

Рассмотрим транспортную задачу (5)-(8) при $p = e_1$. При таком p задача (5)-(8) имеет единственное допустимое решение:

$$x_{i1} = d_1^i \quad , \quad i \in I ,$$

$$x_{ij} = 0 \quad , \quad j \neq 1 .$$

Оптимальные значения двойственных переменных, как легко видеть, определяются по формулам

$$v_1 = 0 ,$$

$$v_j = \min_i \ \ln \frac{c_j^i}{c_1^i} \quad , \quad j > 1 ,$$

причем **минимум** здесь, ввиду условия двойственной невырожденности, достигается на единственном элементе $i = i_j$. Тем самым получаем в качестве оптимального базисное множество

$$\tilde{\mathcal{B}} = \{(i,1) / i \in I\} \cup \{(i_j, j) / \ j \in J \setminus \{1\}\} . \quad (25)$$

Для функций $x_{ij}^{\mathcal{B}}(p)$, порождаемых этим базисным множеством, имеем

$$x_{i_j j}(p) = p_j \quad , \quad j > 1 ,$$

$$z_{i1}(p)=(p,d^i)-\sum_{j:\, i_j=i} p_j \quad , \quad i\in I.$$

Как легко видеть, эти функции принимают положительные значения для всех $p\in \sigma^o$, достаточно близких к точке e_1. Поэтому для таких p множество $\tilde{\mathcal{B}}$ будет единственным оптимальным базисным множеством. Отсюда следует, что такие точки p будут принадлежать только множеству $\Omega(\tilde{\mathcal{B}})$ и не будут принадлежать никакому другому из множеств $\Omega(\mathcal{B})$, $\mathcal{B}\in\mathcal{L}$.

ЛЕММА 2. Достаточно далекие точки луча Λ принадлежат только одному из множеств $\Theta(\mathcal{B})$ – множеству $\Theta(\tilde{\mathcal{B}})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для элементов луча $\Lambda\subset\Sigma$ в качестве представителей ограничимся рассмотрением точек $s\in\sigma$. Тогда для достаточно далеких элементов луча будем иметь: $s\to e_1$, т.е.

$$\frac{s_i}{s_1}\longrightarrow 0 \quad , \quad i>1.$$

Для точек $p^s, q^s\in\sigma^o$, задающих представление s в виде $s=p^s\ominus q^s$, это означает

$$\frac{p_i^s}{p_1^s}\cdot\frac{q_1^s}{q_i^s}\longrightarrow 0 \quad , \quad i>1. \tag{26}$$

Если $q^s\in\Xi(\mathcal{B})$ при некотором $\mathcal{B}\in\mathcal{L}$, то q_1^s/q_i^s ограничено, ибо $\Xi(\mathcal{B})$ – замкнутое множество и $\Xi(\mathcal{B})\subset\sigma^o$. Тем самым, из (26) следует, что $p_i^s/p_1^s\longrightarrow 0$ при любом $i>1$ и, значит, $p^s\to e_1$. Но тогда условие $p^s\in\Omega(\mathcal{B})$ может выполняться, согласно изложенному выше, лишь при $\mathcal{B}=\tilde{\mathcal{B}}$. Лемма доказана.

Продолжим рассмотрение вопроса о сходимости предложенного алгоритма. Будем называть пару точек $p,q\in\sigma^o$ допустимой, если при некотором $\mathcal{B}\in\mathcal{L}$ элемент $p\ominus q$ принадлежит множеству $\Theta(\mathcal{B})\cap\Lambda$.

Для $q\in\Xi(\mathcal{B})$ введем величины

$$y_i = c_j^i/q_j \quad , \quad (i,j)\in\mathcal{B},$$

и, используя их, перепишем систему условий (10), задающих множество $\Xi(\mathcal{B})$, в виде

$$y_i q_l \le c^i_l \quad , \; (i,l) \notin \mathcal{B}. \tag{27}$$

Напомним, что множество $\Omega(\mathcal{B}) \subset \sigma$ задается системой неравенств

$$z^{\mathcal{B}}_{ij}(p) \geqslant 0 \quad , \; (i,j) \in \mathcal{B}. \tag{28}$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. Для любой допустимой пары точек p и q в неравенствах (27) и (28) разве лишь одно неравенство выполняется как равенство.

На множестве $\mathcal{L}$ естественным образом вводится бинарное отношение "соседства" S : два множества $\mathcal{B}', \mathcal{B}'' \in \mathcal{L}$ являются "соседними", т.е. образуют пару $(\mathcal{B}', \mathcal{B}'') \in S$, если одно из них получается из другого добавлением или исключением одного элемента.

Рассмотрим сужение S_Λ отношения S на множество $\mathcal{L}_\Lambda = \{\mathcal{B} \in \mathcal{L} / \Theta(\mathcal{B}) \cap \Lambda \neq \emptyset\}$. Для этого отношения S_Λ на основании леммы I и предположения 2 можно утверждать, что:

I) для каждого $\mathcal{B} \in \mathcal{L}_\Lambda$ в множестве $\mathcal{L}_\Lambda$ имеется не более двух "соседей".

Из леммы 2 получаем дополнительно:

2) у множества $\tilde{\mathcal{B}}$, определяемого в соответствии с (25), в $\mathcal{L}_\Lambda$ лишь один "сосед".

Теперь рассмотрим последовательность множеств $\mathcal{B}_k \in \mathcal{L}$, порождаемую в соответствии с описанным алгоритмом исходя из начального множества $\mathcal{B}_0 = \tilde{\mathcal{B}}$ и начального $\lambda_0 = 1$. Начальный вектор $q^0 \in \sigma^0$ получается однозначно нормировкой вектора $\tilde{q}^0_i$ с компонентами

$$\tilde{q}^0_1 = 1,$$
$$\tilde{q}^0_j = \frac{c^{i_j}_j}{c^{i_j}_1} \quad , \; j > 1 .$$

В качестве p^0 можно взять любой вектор вида $p^0 = q^0 + \tau_0 e_1$, где τ_0 настолько велико, что выполняются неравенства

$$(p^0, d^i) > \sum_{j:\, i_j = i} q^0_j \quad , \; i \in I .$$

Ясно, что на начальном шаге будем иметь $\tau^0 = q^0$, и, ввиду выбора начального $\lambda_0 = 1$, процесс оборвется на этом шаге лишь в том случае, когда q^0 является равновесным вектором цен модели.

Из описания алгоритма следует, что получающаяся в результате последовательность множеств $\mathcal{B}_k \in \mathfrak{B}$ обладает свойством $(\mathcal{B}_k, \mathcal{B}_{k+1}) \in S_\Lambda$. Повторяя выкладки, приведенные в [4] при рассмотрении алгоритма для модели обмена, можно показать, что если из пары неравенств

$$z_{ij}(p(t)) \geqslant 0, \qquad y_i q_j(t) \leqslant c_j^i$$

одно оказалось лимитирующим при определении величины t_k, то, благодаря правилу $\lambda_{k+1} = -\lambda_k$, другое из неравенств этой пары не может оказаться лимитирующим на следующем шаге, и тем самым

$$\mathcal{B}_{k+2} \neq \mathcal{B}_k \quad . \tag{29}$$

ТЕОРЕМА. При выполнении предположений I и 2 и начальных $\mathcal{B}_0 = \tilde{\mathcal{B}}$ и $\lambda_0 = 1$ процесс заканчивается получением равновесного вектора цен модели.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что факт получения по описанному процессу равновесного вектора цен равносилен конечности получаемой последовательности множеств $\mathcal{B}_k$.

В самом деле, процесс может прерваться лишь по той причине, что либо на определенном шаге было достигнуто значение $t_k = 1$, либо у имеющегося $\mathcal{B}_k$ не нашлось второго "соседа" (кроме $\mathcal{B}_{k-1}$) по той причине, что $p(t) \ominus q(t)$ принадлежит [illegible]$(\mathcal{B}_k)$ при любом отрицательном t. По лемме 2 это возможно лишь для $\mathcal{B}_k = \tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_0$. Учитывая приведенные выше свойства отношения S_Λ, получаем $\mathcal{B}_{k-1} = \mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_{k-2} = \mathcal{B}_2$ и т.д. Из самого характера перехода от $\mathcal{B}_\alpha$ к $\mathcal{B}_{\alpha+1}$ (либо добавляется, либо исключается один элемент) следует, что k здесь может быть лишь четным. Но тогда в результате получим, что $\mathcal{B}_{\frac{k}{2}-1} = \mathcal{B}_{\frac{k}{2}+1}$, а это противоречит (29).

Таким образом, остается показать, что последовательность $\mathcal{B}_k$ конечна. Предположим противное: она бесконечна. Тогда, ввиду конечности общего числа множеств $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$, среди множеств $\mathcal{B}_k$ имеются повторяющиеся. Пусть α – минимальный из номеров повторяющихся множеств $\mathcal{B}_k$, и $\mathcal{B}_\alpha$ повторилось на шаге с номером γ, т.е. $\mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}_\gamma$, $\gamma > \alpha$.

Ясно, что $\alpha > 0$, ибо у $\mathcal{B}_0 = \tilde{\mathcal{B}}$ лишь один "сосед", а у $\mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}_\gamma$ их два: $\mathcal{B}_{\gamma-1} \neq \mathcal{B}_{\gamma+1}$ по ([illegible]). Множество $\mathcal{B}_{\alpha-1}$ также является "соседом" для $\mathcal{B}_\alpha$, а значит, должно совпадать либо с $\mathcal{B}_{\gamma-1}$, либо с $\mathcal{B}_{\gamma+1}$. Но это противоречит тому, что $\mathcal{B}_\alpha$ – первое из повторяющихся множеств $\mathcal{B}_k$. Тем самым получаем конечность последовательности $\mathcal{B}_k$. Теорема доказана.

4. Пример

В качестве иллюстративного примера рассмотрим модель кооперации, в которой три товара и четыре участника. Пусть векторы c^i и d^i таковы:

$$
\begin{aligned}
c^1 &= (2,\ 1,\ 3), & d^1 &= (0{,}3;\ 0{,}1;\ 0{,}2),\\
c^2 &= (3,\ 1,\ 1), & d^2 &= (0{,}2;\ 0{,}4;\ 0{,}3),\\
c^3 &= (1,\ 2,\ 2), & d^3 &= (0{,}1;\ 0{,}1;\ 0{,}2),\\
c^4 &= (1,\ 1,\ 4), & d^4 &= (0{,}4;\ 0{,}4;\ 0{,}3).
\end{aligned}
$$

Информацию о текущих множествах $\mathcal{B}_k$ будем записываь в виде матриц 4х3, отмечая позиции, соответствующие элементам $\mathcal{B}_k$ крестом $\times$, а остальные элементы точкой $\bullet$.

Легко убедиться, что фигурирующее в описании алгоритма множество $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_0$ в данном случае будет таким:

$$
\tilde{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \times & \bullet & \bullet \\ \times & \times & \times \\ \times & \bullet & \bullet \\ \times & \bullet & \bullet \end{pmatrix}
$$

В результате вектор q^0 оказывается пропорциональным вектору c^2 : $q^0 = (0{,}6;\ 0{,}2;\ 0{,}2)$. Вектор p^0 имеет вид $p^0 = q^0 + \tau_0 e_1$, где τ_0 в данном случае определяется насколько большим, чтобы была неотрицательной величина $z_{21}^{\mathcal{B}_0}(p^0)$. Имеем $z_{21}^{\mathcal{B}}(p^0) = (p, d^2) - p_1 - p_2 = 0{,}2p_1 - 0{,}6p_2 - 0{,}7p_3$. Можно взять $\tau_0 = 0{,}9$, что дает $p^0 = (1{,}5;\ 0{,}2;\ 0{,}2)$.

ИТЕРАЦИЯ 0. Имеем $\tau^0 = q^0$, $q(t) \equiv q^0$,

$$p(t) = (1{,}5 - 0{,}9t;\ 0{,}2;\ 0{,}2).$$

Так как $\lambda_0 = 1$, то t нужно увеличивать. При $t = t_0 = \frac{0{,}2}{0{,}9} = \frac{2}{9}$ величина $z_{21}^{\mathcal{B}_0}(p)$ обратится в ноль.

$$
\mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} \times & \bullet & \bullet \\ \bullet & \times & \times \\ \times & \bullet & \bullet \\ \times & \bullet & \bullet \end{pmatrix}
\qquad
\begin{aligned}
&p^1 = (1{,}3;\ 0{,}2;\ 0{,}2),\\
&q^1 = (0{,}6;\ 0{,}2;\ 0{,}2),\quad \lambda_1 = -1.
\end{aligned}
$$

ИТЕРАЦИЯ I. Для определения компонент вектора r^1 имеем систему

$$r_2 + r_3 = (r, d^2),$$

$$\frac{r_2}{c_2^2} = \frac{r_3}{c_3^2},$$

т.е.

$$\begin{cases} 0{,}2\, r_1 - 0{,}6\, r_2 - 0{,}7\, r_3 = 0, \\ r_2 = r_3. \end{cases}$$

Учитывая требование $r^1 \in \sigma$, получаем $r^1 = \frac{1}{17}(13, 2, 2)$. В результате

$$q(t) = (1-t)q^1 + t r^1 = (0{,}6 + 0{,}1647t;\ 0{,}2 - 0{,}08235t;\ 0{,}2 - 0{,}08235t).$$

Так как r^1 с точностью до положительного множителя совпадает с p^1, то условие $\bar{p}(t) \in \Omega(B_1)$ не будет лимитирующим при определении величины t_1.

Так как $\lambda_1 = -1$, то на данном шаге значение t нужно **уменьшать** от $t = 0$. Лимитирующим для t_1 оказывается условие

$$\frac{c_2^1}{q_2(t)} \geqslant \frac{c_1^1}{q_1(t)},$$

т.е.

$$\frac{1}{0{,}2 - 0{,}08235t} \geqslant \frac{2}{0{,}6 + 0{,}1647t}.$$

Получаем $t_1 = -0{,}6072$. В результате

$$B_2 = \begin{pmatrix} \times & \times & \cdot \\ \cdot & \times & \times \\ \times & \cdot & \cdot \\ \times & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} &q^2 = (0{,}5;\ 0{,}25;\ 0{,}25), \\ &p^2 = (1{,}625;\ 0{,}25;\ 0{,}25),\ \lambda_2 = 1. \end{aligned}$$

ИТЕРАЦИЯ 2. Система для определения компонент вектора r^2 имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{2}{r_1^2} = \dfrac{1}{r_2^2}, \\ \dfrac{1}{r_2^2} = \dfrac{1}{r_3^2}. \end{cases}$$

Отсюда, с учетом требования $z^2 \in \sigma$, имеем $z^2=(0,5;\ 0,25;\ 0,25)$. Поэтому $q(t) \equiv q^2$, $p(t)=(1,625-1,125t;\ 0,25;\ 0,25)$. Величину t на данной итерации следует увеличивать $(\lambda_2=1)$. Лимитирующим при определении t_2 может оказаться лишь одно из условий: $z_{11}^{B_2}(p(t)) \geqslant 0$, $z_{12}^{B_2}(p(t)) \geqslant 0$, $z_{22}^{B_2}(p(t)) \geqslant 0$. Имеем

$$z_{22}^{B_2}(p)=(p,d^2)-p_3=0,2p_1+0,4p_2-0,7p_3 ,$$

$$z_{12}^{B_2}(p)=p_2+p_3-(p,d^2)=-0,2p_1+0,6p_2+0,7p_3 ,$$

$$z_{11}^{B_2}(p)=p_1-(p,d^3+d^4)=0,5p_1-0,5p_2-0,5p_3 .$$

Легко проверить, что для $p=p(1)=z^2$ все указанные условия выполняются. Тем самым $p=z^2$ является искомым равновесным вектором цен модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шмырев В.И. Об одном подходе к отысканию равновесия в простейших моделях обмена // Докл. АН СССР. - 1983. - Т.268, № 5. - С.1062-1066.
2. Шмырев В.И. Монотонность в линейных моделях обмена // Оптимизация. - 1981. - Вып. 27(44). - С.77-95.
3. Gale D. The linear exchange model // J. math. econ. - 1976.- Vol.3, N 2. - P.205-209.
4. Шмырев В.И. Алгоритм поиска равновесия в линейной модели обмена // Сиб. мат. журн. - 1985. - Т.26, № 2. - С.162-175.

Поступила в ред.-изд. отдел
01.12.1986 г.