УДК 51.330.II5

МАГИСТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА δ-ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ В МОДЕЛЯХ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

К.Ю.Борисов

В математической теории экономической динамики обычно рассматривают (см., например, обзор в [I]) траектории, оптимальные в смысле терминального или интегрального целевого функционала. В то же время представляет интерес и задача о построении траекторий, которые обеспечивают в каждый момент времени определенное значение некоторого целевого показателя, например уровня потребления или темпа роста. Именно такие траектории в этой статье и исследуются. Рассматриваемый принцип оптимальности использовал А.Н.Ляпунов [2].

§ I. Модель рамсеевского типа

Рассматривается модель экономической динамики M_1, которая задается выпуклым компактным технологическим множеством $\mathcal{Z} \subset R^n \times R^n$, пересекающимся с множеством

$$Q = \{(x,y) \in R^n \times R^n : x = y\},$$

и непрерывной квазивогнутой функцией полезности

$$u : \mathcal{Z} \to R.$$

Под траекторией этой модели понимается последовательность $(x_t)_0^T$ (T конечно или бесконечно) элементов R^n, для которой $\{x_t, x_{t+1}\} \in \mathcal{Z}$ при всех t. Обычно в таких моделях рассматриваются задачи о максимизации величины суммарной полезности

$$\sum_{t=0}^{T-1} u(x_t, x_{t+1})$$

(или дисконтированной суммарной полезности) (см. [1,3,4]).

В настоящей статье задача ставится несколько иная: описать устройство траекторий, обеспечивающих достаточно большой уровень полезности в каждый момент времени, определив заранее, каким этот уровень может быть. Такая постановка задачи оправдана, в частности, потому, что экономические показатели по временному признаку делятся на интервальные и моментные. Интервальные показатели измеряются за некоторый промежуток времени и для них "правомерна операция суммирования при переходе от элементарных интервалов к интервалам большей длительности" [5, с.9]. Для моментных показателей операция сложения во времени не является правомерной. В то же время нет никаких оснований предполагать, что полезность, измеряемая с помощью функции полезности, является интервальным показателем.

Пусть $\hat{x}$ – решение задачи

$$u(x,x) \longrightarrow max; \ (x,x) \in Z,$$

а $\hat{u} = u(\hat{x},\hat{x})$. Будем предполагать, что $\hat{u} < max\{u(x,y): (x,y) \in Z\}$. В этом случае существует линейный функционал $(q,p) \in R^n \times R^n$, отделяющий множество Q от множества $\{(x,y) \in Z : u(x,y) \geq \hat{u}\}$, т.е.

$$qx + py \leq 0 \quad ((x,y) \in Z, \ u(x,y) \geq \hat{u}),$$

$$qx + px \geq 0 \quad (x \in R^n).$$

Сразу же отметим, что $q = -p$, тогда

$$py \leq px \quad ((x,y) \in Z, \ u(x,y) \geq \hat{u}).$$

Траекторию $(x_t)_0^T$ модели M_1 будем называть δ-оптимальной при некотором числе δ, если

$$u(x_t, x_{t+1}) \geq \hat{u} - \delta \quad (t = 0,1,\ldots).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.I. При каждом $\delta < 0$ существует число T_1 такое, что длина T любой δ-оптимальной траектории $(x_t)_0^T$ не превосходит T_1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$B = \max\{px : x \in Pr_1 z^{*)}\},$$
$$b = \min\{px : x \in Pr_2 z\}.$$

Очевидно, что поскольку $\delta < 0$ и $\hat{u} - \delta > \hat{u}$, то

$$\gamma = \max\{p(y-x) : (x,y) \in z,\ u(x,y) \geq \hat{u} - \delta\} < 0.$$

Следовательно, для любой траектории $(x_t)_0^T$ справедлива при $\tau \leq T$ цепочка неравенств:

$$b - \gamma\tau \leq px_\tau - \gamma\tau \leq px_0 \leq B.$$

Итак, $\tau \leq (B-b)/(-\gamma)$. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ. Для любой бесконечной траектории $(x_t)_0^\infty$ выполняется неравенство

$$\varliminf_{t\to\infty} u(x_t, x_{t+1}) \leq \hat{u}.$$

Определим множество M следующим образом:

$$M = \{x \in R^n : \exists y : (x,y) \in z,\ u(x,y) \geq \hat{u},\ py = px\} = Pr_1 z_1,$$

где

$$z_1 = \{(x,y) \in z : u(x,y) \geq \hat{u}\} \cap \{(x,y) \in z : py = px\}.$$

Отметим, что если функция u строго квазивогнута или представима в виде

$$u(x,y) = F(x) - G(y),$$

где F – строго вогнутая, а G – выпуклая функция, тогда $M = \{\hat{x}\}$.

Пусть

$$r(x,M) = \min\{\|x-y\| : y \in M\}.$$

Несложно показать, что имеют место следующие два утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.2. Для любого $\varepsilon > 0$ существует число $L(\varepsilon)$ такое, что для всякой 0-оптимальной траектории $(x_t)_0^T$ число моментов времени t, для которых $r(x_t, M) > \varepsilon$, не пре-

---

*) Если $A \subset R^n \times R^n$, то $Pr_1 A = \{x \in R^n : \exists y : (x,y) \in A\}$, $Pr_2 A = \{y \in R^n : \exists x : (x,y) \in A\}$.

восходит $\mathcal{L}(\varepsilon)$.

Далее, в этом параграфе будем считать, что выполняется следующее условие:

$$px = p\hat{x} \quad (x \in M). \qquad \text{(I.I)}$$

Оказывается, что в этом случае магистральный характер поведения δ-оптимальных траекторий является устойчивым при варьировании параметра δ в окрестности нуля, а именно, имеет место

ТЕОРЕМА I.I. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие числа $\delta > 0$, T_1, T_2, что для всякой δ-оптимальной траектории $(x_t)_0^T$ при $T_1 \leq t \leq T - T_2$ выполняется неравенство $r(x_t, M) \leq \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим функцию $\varphi : Z \to R$ следующим образом:

$$\varphi(x,y) = \min\{u(x,y) - \hat{u},\ py - px\}.$$

Очевидно, что $\max\limits_{(x,y)\in Z} \varphi(x,y) = 0$, причем $\varphi(x,y) < 0$ при $x \notin M$.

Нам требуется следующий вариант известной леммы Раднера.

ЛЕММА I.I. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из соотношений

$$r(x,M) > \varepsilon, \quad (x,y) \in Z$$

следует неравенство $\varphi(x,y) < -\delta(\varepsilon)$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$, положим $\hat{\delta} = \delta(\varepsilon)$ и выберем $\bar{\varepsilon} > 0$ таким, что из соотношения $r(x,M) \leq \bar{\varepsilon}$ следует неравенство $|px - p\bar{x}| \leq \hat{\delta}/4$. Положим, далее, $\bar{\delta} = \delta(\bar{\varepsilon}) > 0$, $\tilde{\delta} = \hat{u} - \max\{u(x,y) : py \geq px + \hat{\delta}/4\} > 0$ и зададим $\delta > 0$, T_1, T_2 следующим образом:

$$\delta < \min\{\hat{\delta}, \bar{\delta}, \tilde{\delta}\},$$

$$T_1 = \frac{B - (p\hat{x} + \hat{\delta}/2)}{\bar{\delta}},$$

$$T_2 = \frac{p\hat{x} - \hat{\delta}/2 - b}{\bar{\delta}} + 1.$$

Рассмотрим теперь некоторую δ-оптимальную траекторию $(x_t)_0^T$. Сразу же отметим, что для траектории $(x_t)_0^T$ при всех t выполняются следующие неравенства:

$$u(x_t, x_{t+1}) > \hat{u} - \hat{\hat{\delta}}, \tag{I.2}$$

$$u(x_t, x_{t+1}) > \hat{u} - \bar{\delta}, \tag{I.3}$$

$$px_{t+1} < px_t + \hat{\delta}/4. \tag{I.4}$$

Неравенство (I.4) выполняется в силу выбора числа $\tilde{\delta}$.

Покажем, что для каждого t выполняется также по крайней мере одно из двух следующих неравенств:

$$p\hat{x} - \hat{\delta}/4 \leq px_t \leq p\hat{x} + \hat{\delta}/4\ , \tag{I.5}$$

$$px_{t+1} < px_t - \bar{\delta}. \tag{I.6}$$

Действительно, если $\tau(x_t, M) \leq \bar{\varepsilon}$, тогда выполняется (I.5). Если же $\tau(x_t, M) > \bar{\varepsilon}$, то выполняется неравенство $\varphi(x_t, x_{t+1})$, а значит, в силу (I.3) и определения функции φ, выполняется (I.6).

Пусть для некоторого t_1 выполняется неравенство $\tau(x_{t_1}, M)$. Покажем, что если

$$px_{t_1} > p\hat{x} + \hat{\delta}/2, \tag{I.7}$$

тогда $t_1 \leq T_1$, а если

$$px_{t_1} \leq p\hat{x} + \hat{\delta}/2\ , \tag{I.8}$$

тогда $t_1 \geq T - T_2$.

Предположим, что выполняется (I.7). В силу (I.4) для $t = t_1 - 1$ выполняется неравенство

$$px_t \leq p\hat{x} + \hat{\delta}/4, \tag{I.9}$$

а значит, и неравенство (I.6). Следовательно, (I.9) и соответственно (I.6) выполняются для всех $t < t_1$. Суммируя (I.6) по всем t от 0 до $t_1 - 1$, получаем

$$px_{t_1} \leq px_0 - \bar{\delta} t_1.$$

Итак, имеем цепочку неравенств

$$p\hat{x} + \hat{\delta}/2 < px_{t_1} \leq px_0 - \bar{\delta} t_1 \leq B - \bar{\delta}/t_1,$$

откуда и вытекает, что $t_1 \leq T_1$.

Пусть выполняется (I.8). В силу (I.2) и определения φ

$$px_{t_1+1} < px_{t_1} - \hat{\delta} \leq p\hat{x} - \hat{\delta}/2.$$

Следовательно, для $t = t_1 + 1$, а значит, и для всех $t > t_1$ выполняется (I.6).

Возьмем произвольное τ такое, что $t_1 + 1 < \tau \leq T$. Просуммировав (I.6) по всем t от $t_1 + 1$ до τ, получаем

$$px_\tau \leq px_{t_1+1} - (\tau - t_1 - 1)\bar{\delta}.$$

Итак, если $t_1 + 1 < \tau \leq T$, то выполняется цепочка неравенств

$$b \leq px_\tau \leq px_{t_1+1} - (\tau - t_1 - 1)\bar{\delta} < p\hat{x} - \hat{\delta}/2 - (\tau - t_1 - 1)\bar{\delta},$$

Откуда вытекает, что $\tau - t_1 \leq T_2$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если для траектории $(x_t)_0^\infty$ выполняется равенство $\lim\limits_{t\to\infty} u(x_t, x_{t+1}) = \hat{u}$, тогда $r(x_t, M) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.

В модели M_1 можно считать, что в качестве изначально заданного берется не функция полезности u, а отношение предпочтения $\succsim_p (\succ)$, определенное на Z, индикатором которого является функция u, и все утверждения сформулировать в терминах этого отношения предпочтения.

Непосредственным следствием теоремы I.I является

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.3. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа $L_1(\varepsilon)$ и $L_2(\varepsilon)$ такие, что для всякой 0-оптимальной траектории $(x_t)_0^T$ при $L_1(\varepsilon) \leq t \leq T - L_2(\varepsilon)$ выполняется соотношение $r(x_t, M) \leq \varepsilon$.

Это предложение можно доказать и непосредственно. В связи с этим Н.П.Дементьев заметил, что теорема I.I является, в свою очередь, его простым следствием.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть X - компакт из R^n такой, что $Z \subset X \times X$. Рассмотрим множество S' всех таких непрерывных функционалов $s: X \to R$, что $s(y) \leq s(x)$ для тех $(x, y) \in Z$, при которых $u(x, y) \geq \hat{u}$. Положим для $s \in S$

$$W_s = \{x \in X : \exists y : (x, y) \in Z,\ u(x, y) \geq \hat{u},\ s(y) = s(x)\}$$

и возьмем $W = \bigcap\limits_{s \in S} W_s$, отметив, что $M = W \subset W_p$. Можно показать (аналогично тому, как это сделано в [6] для модели Неймана - Гейла), что найдется функционал $\bar{s} \in S$, для которого $W_{\bar{s}} = W$. Во всех сформулированных выше утверждениях можно множество M заменить множеством W. Для этого в доказательствах вместо функционала p нужно использовать

функционал $\overline{\delta}$.

§ 2. Модель Неймана - Гейла

В рамках модели Неймана - Гейла обычно рассматривается задача о построении траекторий, максимизирующих некоторый терминальный целевой функционал (при конечном интервале планирования), или о построении бесконечных эффективных траекторий (см. [I]).

Рассматривается следующая задача: как устроена траектория $(x_t)_0^T$, обеспечивающая за каждый единичный промежуток времени $[t, t+1]$ достаточно большой темп роста, измеряемый с помощью положительной однородной непрерывной функции $f: R_+^n \to R_+$ как частное $f(x_{t+1})/f(x_t)$.

Пусть имеется модель Неймана - Гейла M_2 , которая задается нормальным суперлинейным отображением $a: R_+^n \to R_+^n$. С теорией моделей неймановского типа и соответствующей терминологией можно познакомиться по работам [I,6,7].

Будем предполагать, что у этой модели имеется неймановское состояние равновесия $(\alpha, (\bar{x}, \alpha\bar{x}), p)$, причем $p >> 0$ (т.е. $p^i > 0$ для всех $i \in 1:n$).

Под траекторией этой модели понимается последовательность $(x_t)_0^T$ (T конечно или бесконечно) такая, что

$$x_{t+1} \in a(x_t) (t \in 0,1,\ldots).$$

Пусть задана функция $f: R_+^n \to R_+$; предполагается, что она непрерывна, положительно однородна ($f(\lambda x) = \lambda f(x)$ для всех $\lambda \geq 0,\ x \in R_+^n$) и монотонна (из соотношений $x^i \geq y^i$ для всех $i \in 1:n$ вытекает, что $f(x) \geq f(y)$) . Будем рассматривать только те траектории $(x_t)_0^T$ модели M_2 , для которых $f(x_t) > 0$ при всех t . Траекторию $(x_t)_0^T$ будем называть δ-оптимальной, если

$$f(x_{t+1})/f(x_t) \geq (1-\delta)\alpha \quad (t = 0,1,\ldots).$$

Положим $c_1 = \max\{f(x) : px = 1\} > 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.I. Для любого $\delta < 0$ длина T любой δ-оптимальной траектории $(x_t)_0^T$ не превосходит $\ln\left(\frac{c_1 p x_0}{f(x_0)}\right)/\ln(1-\delta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$f(x) \leq c_1 px (x \in R_+^n),$$

значит, для любой траектории $(x_t)_0^T$

$$f(x_t)\leqslant c_1 p x_t \leqslant c_1 \alpha^t p x \quad (t=0,1,\ldots).$$

В то же время для δ-оптимальной траектории $(\bar{x}_t)_0^T$ выполняется для всех t неравенство

$$f(x_t)\geqslant [(1-\delta)\alpha]^{\alpha} f(x_0),$$

а значит, и

$$(1-\delta)^t \alpha^t f(x_0)\leqslant c_1 \alpha^t p x_0,$$

откуда получаем требуемое, заметив, что здесь $(1-\delta)>1$.

СЛЕДСТВИЕ. Для любой бесконечной траектории $(x_t)_0^T$ выполняется неравенство

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{f(x_{t+1})}{f(x_t)}\leqslant \alpha.$$

Напомним, (см.[6]), что непрерывный монотонный положительно однородный ненулевой функционал $h: R_+^n \to R_+$ называется равновесным (относительно темпа роста α), если

$$h(y)\leqslant \alpha h(x) \quad (x\in R_+^n,\ y\in a(x)).$$

Множество

$$\{x\in R_+^n : \exists y\in a(x) : h(y)=\alpha h(x)\}$$

выделяемо функционалом h .

Далее будем считать, что $\bar{x}\gg 0$ и неймановский луч $(\lambda \bar{x})_{\lambda\geqslant 0}$ является магистралью. Магистральность неймановского луча означает, что для всякой траектории $(x_t)_0^\infty$, удовлетворяющей условию $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha^{-t} p x_t > 0$, имеет место сходимость $\rho(x_t,\bar{x}) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, где $\rho(x,y)=\|x/\|x\|-y/\|y\|\|$.

Неймановский луч является магистралью, если, например, неймановское состояние является строгим, т.е. равенство $\alpha p x = p y$ при $y\in a(x)$ возможно только для x , лежащих на неймановском луче. Неймановский луч является магистралью и в динамической модели Леонтьева, которая задается следующим суперлинейным отображением: $a(x)=\{y\in R_+^n : Ay\leqslant x\}$, где A – неотрицательная неразложимая примитивная матрица.

Из магистральности неймановского луча следует (см.[6]), что найдется равновесный функционал s , выделяющий нейма-

новский луч. Можно считать, что равенство $s(x)=0$ выполняется только при $x=0$, ибо в противном случае будем использовать равновесный функционал $s'(x)=s(x)+px$, тоже выделяющий неймановский луч.

ТЕОРЕМА 2.I. При всяких $x_0 \in R^n_+$, $\varepsilon>0$ найдутся числа $\delta>0$, T_1, T_2 такие, что для любой δ-оптимальной траектории $(x_t)_0^T$, исходящей из x_0, при $T_1 \le t \le T-T_2$ выполняется неравенство $\rho(x_t,\bar{x}) \le \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не умаляя общности, будем считать, что $f(\bar{x})=s(\bar{x})$ и $\alpha=1$, тогда

$$s(y)\le s(x) \quad (x\in R^n_+,\ y\in a(x)),$$

$$s(y)=s(x),\ y\in a(x) \Rightarrow \exists \lambda \ge 0:\ \lambda x=\bar{x}. \qquad (2.\mathrm{I})$$

Используем следующую лемму.

ЛЕММА 2.I. Для всякого $\varepsilon>0$ найдется $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что из соотношений $\rho(x,\bar{x})>\varepsilon$, $y\in a(x)$ вытекает неравенство $s(y)\le(1-\delta(\varepsilon))s(x)$.

Зафиксируем $\varepsilon>0$, положим $\hat{\delta}=\delta(\varepsilon)$, выберем такое число $\bar{\varepsilon}\in(0,\varepsilon)$, что из неравенства $\rho(x,\bar{x})\le\bar{\varepsilon}$ вытекают соотношения

$$(1-\hat{\delta})^{1/4}\le f(x)/s(x)\le(1-\hat{\delta})^{-1/4},$$

и пусть $\bar{\delta}=\delta(\bar{\varepsilon})>0$.

Определим числа $\delta>0$, T_1, T_2 следующим образом:

$$\delta<\min\{1-(1-\hat{\delta})^{1/4},\ 1-(1-\bar{\delta})^{1/2}\},$$

$$T_1=\frac{\ln\left[(1-\hat{\delta})^{1/2}/\frac{f(x_0)}{s(x_0)}\right]}{\ln\left[(1-\bar{\delta})^{-1/2}\right]},$$

$$T_2=\frac{\ln\left[\hat{c}\,(1-\hat{\delta})^{-1/4}\right]}{\ln\left[(1-\bar{\delta})^{-1/2}\right]},$$

где $\hat{c}=\max\{f(x):\ s(x)=1\}$.

Пусть $(x_t)_0^T$ – δ-оптимальная траектория. Сразу же заметим, что для нее выполняются следующие неравенства ($t=0,1,\ldots$):

$$\frac{f(x_{t+1})}{f(x_t)} > (1-\hat{\delta})^{1/4}, \qquad (2.2)$$

$$\frac{f(x_{t+1})}{f(x_t)} > (1-\bar{\delta})^{1/2}. \qquad (2.3)$$

Предположим, что $\rho(x_{t_1}, \bar{x}) > \varepsilon$ для некоторого t_1, и покажем, что если

$$f(x_{t_1})/\Delta(x_{t_1}) \leq (1-\hat{\delta})^{1/2}, \qquad (2.4)$$

то $t_1 \leq T_1$, а если

$$f(x_{t_1})/\Delta(x_{t_1}) > (1-\hat{\delta})^{1/2}, \qquad (2.5)$$

тогда $t_1 \geq T - T_2$.

Рассмотрим случай (2.4). В силу (2.I) и (2.2) имеем для

$$t=t_1-1: \frac{f(x_t)}{\Delta(x_t)} < \frac{f(x_{t+1})}{(1-\hat{\delta})^{1/4}\Delta(x_{t+1})} \leq (1-\hat{\delta})^{1/4},$$

откуда, с учетом выбора $\bar{\delta}$, получаем

$$\Delta(x_{t+1}) \leq \Delta(x_t)(1-\bar{\delta}).$$

Привлекая (2.3), получаем что для $t = t_1 - 1$ выполняется неравенство

$$\frac{f(x_t)}{\Delta(x_t)} < (1-\delta)^{1/2} f(x_{t+1})/\Delta(x_{t+1}). \qquad (2.6)$$

Точно так доказывается, что (2.6) верно и для всех $t < t_1$. Следовательно,

$$\frac{f(x_{t_1})}{\Delta(x_{t_1})} \geq \left[(1 \;\; \bar{\delta})^{-1/2}\right]^{t_1} f(x_0)/\Delta(x_0),$$

откуда, с учетом (2.4), получаем

$$(1-\hat{\delta})^{1/2} \geq \left[(1-\hat{\delta})^{-1/2}\right]^{t_1} f(x_0)/\Delta(x_0),$$

что и влечет неравенство $t_1 \leq T_1$.

Теперь рассмотрим случай (2.5). По лемме 2.I имеем

$$\Delta(x_{t_1+1}) \leq (1-\hat{\delta})\Delta(x_{t_1}).$$

Привлекая (2.2), получаем цепочку неравенств

$$\frac{f(x_{t_1+1})}{s(x_{t_1+1})} > \frac{(1-\hat{\delta})^{(-1/2-1/4)} f(x_{t_1})}{s(x_{t_1})} \geq (1-\hat{\delta})^{-1/4}.$$

Следовательно, имеем, в силу выбора $\bar{\varepsilon}$, для $t = t_1 + 1$ неравенство

$$s(x_{t+1})/s(x_t) < (1-\bar{\delta}),$$

а с учетом (2.3) и неравенство

$$\frac{f(x_{t+1})/s(x_{t+1})}{f(x_t)/s(x_t)} > (1-\bar{\delta})^{-1/2}. \qquad (2.7)$$

Аналогично доказывается, что (2.7) выполняется для всех $t > t_1$. Отсюда вытекает, что для всех $t > t_1$ выполняются неравенства

$$\hat{c} \geq \frac{f(x_t)}{s(x_t)} > \left[(1-\bar{\delta})^{-1/2}\right]^{t-(t_1+1)} (1-\hat{\delta})^{-1/4}.$$

Итак, если $t > t_1$, то $t - t_1 \leq T_2$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если для некоторой траектории $(x_t)_0^\infty$ выполняется соотношение $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{f(x_{t+1})}{f(x_t)} = \alpha$, тогда $\rho(x_t, \bar{x}) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.

В заключение отметим, что для всех приведенных утверждений имеются полные аналогии в моделях с непрерывным временем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рубинов А.М. Экономическая динамика // Современные проблемы математики. - М., 1982. - Т.19. - С.58-110.
2. Ляпунов А.Н. Асимптотически оптимальные траектории для выпуклых отображений // Оптимальные модели в системном анализе. - М.: ВНИИСИ, 1983.
3. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. - М.: Мир, 1972.

4. Аркин В.И., Евстигнеев И.В. Вероятностные модели управления и экономической динамики. - М.: Наука, 1979.
5. Гранберг А.Г. Динамические модели народного хозяйства. - М.: Экономика, 1985.
6. Рубинов А.М. Суперлинейные многозначные отображения и их приложения к экономико-математическим задачам. - Л.: Наука, 1980.
7. Макаров В.Л., Рубинов А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. - М.: Наука, 1973.

Поступила в ред.-изд. отдел
10.06.1986 г.