УДК 51.330.115

ОЦЕНКИ СХОДИМОСТИ ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ В МОДЕЛЯХ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Н.П.Дементьев

В работе предложены условия, при которых оптимальные траектории в моделях экономической динамики сходятся друг к другу с геометрической (экспоненциальной) скоростью при $t \to \infty$. Применительно к стационарным моделям с дисконтируемой функцией полезности такие условия рассмотрены в [1,2]. В [1] был применен спектральный анализ линеаризованной системы двойственных соотношений, а в [2] - аппарат функций Ляпунова. В обоих случаях существенно использовалась стационарность модели. В нашей работе изучаются модели с переменными во времени технологическими множествами и функциями полезности. Предложенный подход базируется на устойчивости динамических линейных систем вида

$$A_t V_t + B_{t+1} V_{t+1} + A^T_{t+1} V_{t+2} = 0, \qquad (*)$$

где B_t - невырожденная симметричная матрица, а A_t - вообще говоря, вырожденная матрица. Нами указаны достаточные условия при которых система (*) устойчива в следующем смысле. Существуют числа $C > 0$, $q \in [0,1)$ такие, что для любого решения (V_t) системы (*) и для любых t_1, t_0, t_2, $0 \le t_1 < t_0 < t_2 < \infty$, справедлива оценка

$$\|V_{t_0}\| \le C \max\{\|V_{t_1}\|, \|V_{t_2}\|\} \cdot \max\{q^{t_0-t_1}, q^{t_2-t_0}\}. \qquad (**)$$

Если (V_t) ограничено, то, полагая $t_1 = 0$ и переходя к пределу при $t_2 \to \infty$, получим:

$$\|V_{t_0}\| \le C q^{t_0} \sup_{t \ge 0} \|V_t\|.$$

Пусть (z_t'), (z_t'') – две оптимальные траектории в модели экономической динамики. При ряде предположений удается показать, что траектория $\mathcal{Z}_t = (z_t' - z_t'', \lambda_t' - \lambda_t'')$ является ограниченным решением для некоторой устойчивой динамической системы вида (ж), где λ_t', λ_t'' – двойственные переменные, поэтому $z_t' - z_t'' \to 0$, $\lambda_t' - \lambda_t'' \to 0$ с геометрической скоростью.

I. Формулировка основного результата. Рассмотрим стандартную модель экономической динамики

$$F_t(x_t, y_t) \leq 0, \quad t = 1,2,\dots; \tag{1}$$

$$y_t \geq x_{t+1} + c_t, \quad y_t, x_{t+1}, c_t \in R_+^n, \quad t = 0,1,\dots \tag{2}$$

"Полезность" допустимой траектории $(y_t, x_{t+1}, c_t)_{t=0}^{\infty}$ на конечном промежутке $[0,T]$ измеряется величиной

$$\sum_{t=0}^{T} u_t(c_t),$$

где $u_t : R_+^n \to R$, $t = 0,1,\dots$

Допустимая траектория $(y_t^*, x_{t+1}^*, c_t^*)_{t=0}^{\infty}$ называется оптимальной, если

$$\lim_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} (u_t(c_t^*) - u_t(c_t)) \geq 0$$

для всех допустимых траекторий $(y_t, x_{t+1}, c_t)_{t=0}^{\infty}$ таких, что $y_0 = y_0^*$.

Будем говорить, что траектория (x_t^*, y_t^*, c_t^*) допускает характеристику, если найдется последовательность (p_t) такая, что для произвольного момента t выполняется $-p_t x_t^* + p_{t+1} x_{t+1}^* + u_t(c_t^*) \geq -p_t x + p_{t+1}(y - c) + u_t(c)$, если $F_t(x,y) \leq 0$, $0 \leq c \leq y$. При этом последовательность (p_t) называется характеристикой траектории (x_t^*, y_t^*, c_t^*).

Ниже для удобства пару (x_t, y_t) иногда будем обозначать через z_t.

Пусть существуют числа $\varepsilon_1^i \geq 0$, $\varepsilon_2^j \geq 0$, $\varepsilon_3 > 0$, $\varepsilon_4 > 0$, $\varepsilon_5 > 0$, $\delta_1^i > \varepsilon_1^i$, $\delta_2^j > \varepsilon_2^j$, $\delta_3 \geq \varepsilon_3$, $\delta_4 \geq \varepsilon_4$, $\delta_5 \geq \varepsilon_5$, $\delta \geq 0$, $i = 1,\dots,2n$, $j = 1,\dots,n$, такие, что выполнены:

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ I. Функция $F_t(z)$ дважды непрерывно дифференцируема на множестве $A = [\varepsilon_1^1, \delta_1^1] \times \dots \times [\varepsilon_1^{2n}, \delta_1^{2n}]$, причем $\varepsilon_3 \leq \left\| \frac{\partial F_t}{\partial z}(z) \right\|$, $\left\| \frac{\partial F_t}{\partial x}(z) \right\| \leq \delta_3^*$, $\frac{\partial F_t}{\partial x}(z) \leq 0$, $\frac{\partial F_t}{\partial y}(z) \geq 0$,

ж) Здесь и ниже через $\|\cdot\|$ обозначается евклидова норма.

$$\varepsilon_4 \leq s^T \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(z) s \leq \delta_4 \qquad \text{для всех } z \in A, \quad s \in R^{2n}, \ \|s\| = 1, \quad t = 1, 2, \ldots$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. Функция $u_t(c)$ дважды непрерывно дифференцируема на множестве $B = [\varepsilon_2^1, \delta_2^1] \times \ldots \times [\varepsilon_2^n, \delta_2^n]$, причем $\frac{\partial u_t}{\partial c}(c) > 0$, $\varepsilon_5 \leq \left\| \frac{\partial u_t}{\partial c}(c) \right\| \leq \delta_5$, $-\delta_6 \leq s^T \frac{\partial u_t}{\partial c^2}(c) s \leq 0$ для всех $c \in B$, $s \in R^n$, $\|s\| = 1$, $t = 0, 1, \ldots$

Результаты работы содержатся в следующих теоремах.

ТЕОРЕМА I. Пусть выполнены предположения I, 2, причем $\varepsilon_1^i > 0$, $\varepsilon_2^j > 0$, $i = 1, \ldots, 2n$, $j = 1, \ldots, n$. Пусть $(y_t', x_{t+1}', c_t')_{t=0}^{\infty}$, $(y_t'', x_{t+1}'', c_t'')_{t=0}^{\infty}$ – две оптимальные траектории, лежащие в $A \times B$. Тогда существуют числа $C > 0, q \in [0, 1)$ такие, что $\|(y_t' - y_t'', x_{t+1}' - x_{t+1}'', c_t' - c_t'')\| \leq C q^t$, $t = 0, 1, \ldots$

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены предположения I, 2. Пусть $(y_t', x_{t+1}', c_{t+1}')_{t=0}^{\infty}$ и $(y_t'', x_{t+1}'', c_t'')_{t=0}^{\infty}$ – две оптимальные траектории, удовлетворяющие следующим свойствам:

а) $\exists \sigma_1 > 0$ такое, что $y_t''^i$, $x_{t+1}''^i$, $c_t''^i > \sigma_1$ для всех $i = 1, \ldots, n$, $t = 0, 1, \ldots$;

б) траектория (y_t', x_{t+1}', c_t') допускает ограниченную характеристику p_t' $(\exists \sigma_2 > 0: \|p_t'\| \leq \sigma_2, \ t = 1, 2, \ldots)$. Тогда существуют числа $C > 0$, $q \in [0, 1)$ такие, что

$$\|(y_t' - y_t'', x_{t+1}' - x_{t+1}'', c_t' - c_t'')\| \leq C q^t, \ t = 0, 1, \ldots$$

2. <u>Устойчивость одной специальной линейной динамической системы</u>. Ниже будем использовать следующие простые свойства симметричных матриц. Пусть S – симметричная матрица. Введем следующие обозначения:

$$\|S\| = \max_{\|x\|=1} \|Sx\|, \quad \|S\|_{min} = \min_{\|x\|=1} \|Sx\|;$$

$\rho_{max}(S)$ – максимальное по модулю собственное число S

$\rho_{min}(S)$ – минимальное по модулю собственное число S.

Как известно, имеют место следующие соотношения:

а) $\|S\| = |\rho_{max}(S)|$;

б) $\|S\|_{min} = |\rho_{min}(S)|$;

в) $|\rho_{max}(S^{-1})| = |\rho_{min}(S)|^{-1}$, если S - невырожденная симметричная матрица;

г) $\rho_{max}(S) = \|S\| = \max\limits_{\|x\|=1} x^T S x$, $\rho_{min}(S) = \|S\|_{min} = \min\limits_{\|x\|=1} x^T S x$, если S - положительно определенная матрица.

Итак, рассмотрим линейную динамическую систему следующего вида:

$$-S_{t-1}Y_{t-1} + (P_t^{11} + S_{t-1})X_t + P_t^{12}Y_t + H_t^1\Lambda_t = 0; \qquad (3)$$

$$P_t^{21}X_t + (P_t^{22} + S_t)Y_t + H_t^2\Lambda_t - S_tX_{t+1} = 0; \qquad (4)$$

$$(H_t^1)^T X_t + (H_t^2)^T Y_t = 0, \; t = 1, 2, \ldots \qquad (5)$$

Здесь X_t , $Y_t \in R^n$; $\Lambda_t \in R$.

Обозначим

$$P_t = \begin{pmatrix} P_t^{11} & P_t^{12} \\ P_t^{21} & P_t^{22} \end{pmatrix}, \quad H_t = \begin{pmatrix} H_t^1 \\ H_t^2 \end{pmatrix}.$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3. Матрицы P_t и S_t являются положительно определенной и неотрицательно определенной матрицами соответственно.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 4. Существуют положительные числа π_1, π_2, σ, h такие, что:

а) $\pi_1 \le x^T P_t x \le \pi_2$ для всех $x \in R^{2n}$, $\|x\| = 1$, $t = 1, 2, \ldots$;

б) $x^T S_t x \le \sigma$ для всех $x \in R^n$, $\|x\| = 1$, $t = 0, 1, \ldots$;

в) $\|H_t\| \ge h$, $t = 1, 2, \ldots$

Мы хотим показать, что если ограниченная последовательность $(Y_t, X_{t+1}, \Lambda_{t+1})$ есть решение (3)-(5), то $(Y_t, X_{t+1}, \Lambda_{t+1}) \to 0$ с геометрической скоростью при $t \to \infty$.

Пусть t_1, t_2 - два целых числа, $0 \le t_1 < t_2 < \infty$. Тогда величины $Y_{t_1+1}, X_{t_1+1}, \Lambda_{t_1+1}, \ldots, Y_{t_2-1}, X_{t_2-1}, \Lambda_{t_2-1}$ можно выразить через Y_{t_1}, X_{t_2} , если доказать невырожденность системы уравнений (3)-(5) при $t = t_1 + 1, \ldots, t_2 - 1$ относительно неизвестных $Y_{t_1+1}, X_{t_1+1}, \Lambda_{t_1+1}, \ldots, Y_{t_2-1}, X_{t_2-1}, \Lambda_{t_2-1}$.

Матрица этой системы после перестановки строк и столбцов может быть представлена в виде:

$$\begin{array}{c} \quad X_{t_1+1}, Y_{t_1+1}, \ldots, X_{t_2-1}, Y_{t_2-1} \quad \Lambda_{t_1+1}, \ldots, \Lambda_{t_2-1}; \\ \mathcal{D}(t_1,t_2) = \left[\begin{array}{c|c} P(t_1,t_2) + S(t_1,t_2) & H(t_1,t_2) \\ \hline H^T(t_1,t_2) & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

где

$$P(t_1,t_2) = \begin{vmatrix} P_{t_1+1} & & 0 \\ & P_{t_1+2} & \\ 0 & \ddots & P_{t_2-1} \end{vmatrix}, \qquad H(t_1,t_2) = \begin{vmatrix} H_{t_1+1} & & 0 \\ & H_{t_1+2} & \\ 0 & \ddots & H_{t_2-1} \end{vmatrix}$$

$$S(t_1,t_2) = \left[\begin{array}{cccccccc} S_{t_1} & & & & & & & \\ & S_{t_1+1} & -S_{t_1+1} & & & & & \\ & -S_{t_1+1} & S_{t_1+1} & & & & & \\ & & & S_{t_1+2} & -S_{t_1+2} & & & \\ & & & -S_{t_1+2} & S_{t_1+2} & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & S_{t_2-2} & -S_{t_2-2} & \\ & & & & & -S_{t_2-2} & S_{t_2-2} & \\ & & & & & & & S_{t_2-1} \end{array}\right]$$

Очевидно, что $\max\limits_{\|x\|=1} x^T P(t_1,t_2)x \leq \pi_2, \quad x \in R^{2(t_2-t_1-1)n}$.

Рассмотрим блок

$$R_t = \left(\begin{array}{c|c} S_t & -S_t \\ \hline -S_t & S_t \end{array}\right)$$

матрицы $S(t_1,t_2), \ t = t_1+1, \ldots, t_2-2$. Имеем $(x^T, y^T)R_t(x,y) = (x^T - y^T)S_t(x-y) \leq \sigma\|x-y\|^2 \leq 2\sigma(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 2\sigma\|(x,y)\|^2, \ x,y \in R^n$.

Поэтому $\max\limits_{\|x\|=1} x^T S(t_1,t_2)x \leq 2\sigma, \ x \in R^{2(t_2-t_1-1)n}$. Складывая

матрицы $P(t_1, t_2)$ и $S(t_1, t_2)$, получим

$$\max_{\|x\|=1} x^T(P(t_1,t_2) + S(t_1,t_2))x \le \pi_2 + 2\sigma, \ x \in R^{2(t_2-t_1-1)n}.$$

ЛЕММА I. Имеет место оценка

$$\|\mathcal{D}^{-1}(t_1,t_2)\| \le [\min\{\pi_1/2, -(\pi_2+2\sigma)/2+\sqrt{(\pi_2+2\sigma)^2/4+h^2}\}]^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На протяжении доказательства мы для простоты вместо $\mathcal{D}(t_1,t_2)$, $P(t_1,t_2)$, $S(t_1,t_2)$, $H(t_1,t_2)$ будем писать $\mathcal{D}, P, S, H$. Так как S – неотрицательно определенная матрица, а P, $P+S$ положительно определены, то согласно предположению 4 получим $\rho_{min}(P+S) = \min_{\|x\|=1} x^T(P+S)x \ge$ $\ge \min_{\|x\|=1} x^T Px \ge \pi_1$. Заметим, что $\|H\|_{min} = \min_{\|\Lambda\|=1} \|H\Lambda\| \ge h$. Матрица $\mathcal{D}$ симметричная. Если мы установим, что $|\rho_{min}(\mathcal{D})| \ge$ $\ge \min\left\{\pi_1/2, -\frac{\pi_2+2\sigma}{2}+\sqrt{\frac{(\pi_2+2\sigma)^2}{4}+h^2}\right\}$, то справедливость леммы будет вытекать из соотношения в). Пусть, от противного, $|\rho_{min}(\mathcal{D})| <$ $< \min\{\pi_1/2, -(\pi_2+2\sigma)/2+\sqrt{(\pi_2+2\sigma)^2/4+h^2}\}$. Обозначим $\bar\rho = \rho_{min}(\mathcal{D})$, а через $(\bar{Z}, \bar\Lambda)$ – соответствующий обственный вектор:

$$(P+S)\bar{Z} + H\Lambda = \bar\rho\bar{Z}, \tag{6}$$

$$H^T\bar{Z} = \bar\rho\bar\Lambda. \tag{7}$$

Отсюда $\bar{Z} = -(P+S-\bar\rho E)^{-1}H\Lambda$. Матрица $P+S-\bar\rho E$ и ей обратная положительно определены, так как

$$\min_{\|x\|=1} x^T(P+S-\bar\rho E)x \ge \min_{\|x\|=1} x^T(P+S)x - \pi_1/2 \ge \pi_1 - \pi_1/2 = \pi_1/2.$$

Подставляя полученное для $\bar{Z}$ выражение в (7) и умножая результат слева на $\bar\Lambda^T$, получим

$$-\bar\Lambda^T H^T(P+S-\rho E)^{-1}H\Lambda = \bar\rho\|\Lambda\|^2. \tag{8}$$

Так как $P+S-\bar\rho E$ – положительно определенная матрица, то $\bar\rho \le 0$. Для матрицы $(P+S-\bar\rho E)^{-1}$ имеет место оценка

$$\min_{\|x\|=1} x^T(P+S-\bar\rho E)^{-1}x = \rho_{min}((P+S-\bar\rho E)^{-1}) =$$

$$= \rho^{-1}_{max}(P+S-\bar\rho E) = (\max_{\|x\|=1} x^T(P+S-\rho E)x)^{-1} \ge (\pi_2+2\sigma-\bar\rho)^{-1}.$$

Отсюда и из (8) вытекает неравенство

$$-(\pi_2+2\sigma-\bar\rho)^{-1}\|\Lambda\|^2\|H\|^2_{min}\geq\bar\rho\|\Lambda\|^2$$

или

$$-h^2\geq\bar\rho(\pi_2+2\sigma-\bar\rho).$$

Из последнего неравенства и из того, что $\bar\rho\leq 0$, получим

$$\bar\rho<(\pi_2+2\sigma)/2-\sqrt{(\pi_2+2\sigma)^2/4+h^2}$$

или

$$|\bar\rho|>-(\pi_2+2\sigma)/2+\sqrt{(\pi_2+2\sigma)^2/4+h^2}.$$

Это противоречит допущению. Лемма доказана.

Итак, мы действительно показали, что величины $Y_{t_1+1}, X_{t_1+1}, \Lambda_{t_1+1},\ldots, Y_{t_2-1}, X_{t_2-1}, \Lambda_{t_2-1}$ можно выразить через Y_{t_1}, X_{t_2}. Для этого вектор $(S_{t_1}Y_{t_1}, 0,\ldots,0, S_{t_2}X_{t_2}, 0,\ldots,0)$ следует умножить на матрицу $\mathcal{D}^{-1}(t_1,t_2)$. Из леммы I следует, что нормы матриц $\mathcal{D}^{-1}(t_1,t_2)$ ограничены равномерно по t_1, t_2. Если ограниченная траектория $(Y_t, X_{t+1}, \Lambda_{t+1})$ является решением (3)-(5), то из равномерной ограниченности $\|\mathcal{D}^{-1}(t_1,t_2)\|$ и $\|S_t\|$, $t=0,1,\ldots$ немедленно следует, что для всякого $\varepsilon>0$ существует конечное число точек t, в которых $\|(Y_t, X_t,\Lambda_t)\|>\varepsilon$. Нужный нам более сильный результат содержится в следующей лемме.

ЛЕММА 2. Пусть $(Y_t, X_{t+1}, \Lambda_{t+1})_{t=0}^{\infty}$ есть ограниченное решение (3)-(5). Тогда существуют $C>0$, $q\in[0,1)$ такие, что

$$\|(Y_t,X_t,\Lambda_t)\|\leq C q^t \max\{\sup_{t\geq 0}\|Y_t\|, \sup_{t\geq 1}\|X_t\|\}.$$

Величины C, q не зависят от выбора решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что существует $T>0$ такое, что для всех $t>T$ справедливо неравенство

$$\|(Y_t,X_t,\Lambda_t)\|\leq\frac{1}{2}\max\{\|Y_{t-T}\|, \|X_{t+T}\|\}. \tag{9}$$

В качестве T можно выбрать минимальное из целых чисел, превосходящих число $64k^4\sigma^4+2$, где $k=\min\{\pi_1/2, -(\pi_2+2\sigma)/2+\sqrt{(\pi_2+2\sigma)^2/4+h^2}\}$. Докажем это. Среди чисел $t-T+1$, $t-T+2,\ldots,t-1$ найдется t' такое, что $\|Y_{t'}\|\leq$

$\leq max\{\|Y_{t-T}\|, \|X_{t+T}\|\}/4k\sigma$. Предположим противное. Тогда

$$\sqrt{\sum_{\theta=t-T+1}^{t-1}\|Y_\theta\|^2} \geq \sqrt{T\cdot(max\{\|Y_{t-T}\|,\|X_{t+T}\|\})^2/16k^2\sigma^2} \geq$$

$$\geq 8k^2\sigma^2 max\{\|Y_{t-T}\|,\|X_{t+T}\|\}/4k\sigma = 2k\sigma max\{\|Y_{t-T}\|,\|X_{t+T}\|\}.$$

С другой стороны,

$$\sqrt{\sum_{\theta=t-T+1}^{t-1}\|Y_\theta\|^2} \leq \sqrt{\sum_{\theta=t-T+1}^{t+T-1}\|(Y_\theta, X_\theta, \Lambda_\theta)\|^2} \leq 2\|\mathcal{D}^{-1}(t-T, t+T)\|\times$$

$$\times\, \sigma\, max\{\|Y_{t-T}\|,\|X_{t+T}\|\} \leq 2k\sigma\, max\{\|Y_{t-T}\|, \|X_{t+T}\|\}.$$

Из полученного противоречия следует существование t'. Аналогично можно показать, что среди чисел $t+1,\ldots,t+T-1$ найдется t'' такое, что $\|X_{t''}\| \leq max\{\|Y_{t-T}\|,\|X_{t+T}\|\}/4k\sigma$.

Определяя величины $Y_{t'+1}, X_{t'+1}, \Lambda_{t'+1},\ldots, Y_{t''-1}, X_{t''-1}, \Lambda_{t''-1}$ через $Y_{t'}$, $X_{t''}$, получим оценку (9):

$$\|(Y_t, X_t, \Lambda_t)\| = \sqrt{\sum_{\theta=t'+1}^{t''-1}\|(Y_\theta, X_\theta, \Lambda_\theta)\|^2} \leq 2k\sigma max\{\|Y_{t'}\|, \|X_{t''}\|\} \leq$$

$$\leq 2k\sigma max\{\|Y_{t-T}\|,\|X_{t-T}\|\}/4k\sigma = max\{\|Y_{t-T}\|, \|X_{t+T}\|\}/2.$$

Пусть $M = max\{\sup\limits_{t\geq 0}\|Y_t\|, \ sup\|X_t\|\}$, где $(Y_t, X_{t+1}, \Lambda_{t+1})_{t=0}^{\infty}$ – ограниченная последовательность, фигурирующая в формулировке леммы. Применяя оценку (9), получаем последовательно

$$max\{\sup_{t\geq T}\|Y_t\|, \sup_{t\geq T}\|X_t\|\} \leq 2^{-1}M;\ max\{\sup_{t\geq 2T}\|Y_t\|, \sup_{t\geq 2T}\|X_t\|\} \leq 2^{-2}M,\ldots;$$

$$max\{\sup_{t\geq iT}\|Y_t\|, \ \sup_{t\geq iT}\|X_t\|\} \leq 2^{-i}M,\ldots$$

В качестве q выберем 2^{-T}. Непосредственно проверяется, что q, $C = 4k\sigma$ удовлетворяют требованиям леммы. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ I. В ходе доказательств лемм I,2 величины k, T, q, C были непосредственно оценены через π_1, π_2, σ, h из пп. а)-в) предположения 4. Поэтому числа $q \in [0,1)$, $C > 0$ можно выбрать одновременно для всех линейных динамических систем (3)-(5), удовлетворяющих предположениям 3,4 с общими π_1, π_2, σ, h.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из леммы I вытекает устойчивость системы (3)-(5) в том смысле, что

$$\|(Y_t, X_t, \Lambda_t)\| \leq 2k6\, max\{\|Y_{t_1}\|, \|X_{t_2}\|\}$$

для всех $t_1, t, t_2,\ 0 \leq t_1 < t < t_2 < \infty$. Применяя ту же лемму I, можно без особого труда установить устойчивость (3)-(5) в более сильном смысле (см. оценку (**) во введении), из которой немедленно следовал бы результат леммы 2. Однако доказательство леммы 2, базирующееся на оценке (9), представляется нам еще более простым.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. Траектория $(y'_t, x'_{t+1}, c'_t)_{t=0}^{t_0-1}$ является оптимальным решением задачи

$$F_t(x_t, y_t) \leq 0,\ t = 1, \ldots, t_0 - 1;$$

$$x_t + c_t \leq y_t,\quad t = 0, \ldots, t_0 - 1;$$

$$y_0 \leq y'_0,\ x_{t_0} \geq x'_{t_0},\ x_t \geq 0,\ y_t \geq 0,\ c_t \geq 0;$$

$$\sum_{t=0}^{t_0-1} u_t(c_t) \longrightarrow max$$

для произвольного $t_0 \geq 1$. Будем обозначать через λ_t, ρ_t соответственно оценки ограничений $F_t(x_t, y_t) \leq 0,\ x_t + c_t \leq y_t$.

Для упрощения записи введем следующие обозначения: $\bar{x}_t = x'_t - x''_t$, $\bar{y}_t = y'_t - y''_t,\ \bar{c}_t = c'_t - c''_t,\ \bar{\lambda}_t = \lambda'_t - \lambda''_t,\ z'_t = (x'_t, y'_t),\ z''_t = (x''_t, y''_t),\ \bar{z}_t = z'_t - z''_t$.

Сформулированная задача удовлетворяет условию Слейтера.

Действительно, допустимое решение

$$x_1 = x'_1, \ldots, x'_{t_0-1} = x'_{t_0-1},\quad x_{t_0} = x'_{t_0} + c'_{t_0-1}/4;$$

$$y_0 = y'_0 - c'_0/4, \ldots, y_{t_0-1} = y'_{t_0-1} - c'_{t_0-1}/4;$$

$$c_0 = c'_0/2, \ldots, c_{t_0-2} = c'_{t_0-2}/2,\ c_{t_0-1} = c'_{t_0-1}/4$$

удовлетворяет всем ограничениям задачи как строгим неравенствам. Выпишем двойственные условия оптимальности, учитывая, что $F_t(x'_t, y'_t) = 0,\ y'_t = x'_{t+1} + c'_t,\ t = 0, \ldots, t_0 - 1,\ x'_t > 0,\ y'_t > 0,\ c'_t > 0$:

$$\frac{\partial u_t}{\partial c}(c'_t) = \rho'_t,\quad t = 0, \ldots, t_0 - 1; \tag{10}$$

$$\lambda_t' \frac{\partial F_t}{\partial x}(z_t') = -p_{t-1}', \quad t=1,\dots,t_0-1; \tag{11}$$

$$\lambda_t' \frac{\partial F_t}{\partial y}(z_t') = p_t', \quad t=1,\dots,t_0-1 \tag{12}$$

или

$$\lambda_t' \frac{\partial F_t}{\partial x}(z_t') = -\frac{\partial u_{t-1}}{\partial c}(c_{t-1}'), \quad t=1,\dots,t_0-1, \tag{13}$$

$$\lambda_t' \frac{\partial F_t}{\partial y}(z_t') = \frac{\partial u_t}{\partial c}(c_t'), \quad t=1,\dots,t_0-1. \tag{14}$$

Уравнениям (13),(14) удовлетворяют также величины x_t'', y_t'', c_t'', λ_t'', p_t''. Поэтому выполнены соотношения

$$\lambda_t' \frac{\partial F_t}{\partial x}(z_t') - \lambda_t'' \frac{\partial F_t}{\partial x}(z_t'') = -\frac{\partial u_{t-1}}{\partial c}(c_{t-1}') + \frac{\partial u_{t-1}}{\partial c}(c_{t-1}), \tag{15}$$

$$\lambda_t' \frac{\partial F_t}{\partial y}(z_t') - \lambda_t'' \frac{\partial F_t}{\partial y}(z_t'') = \frac{\partial u_t}{\partial c}(c_t') - \frac{\partial u_t}{\partial c}(c_t''). \tag{16}$$

Для всех $\alpha' \geqslant 0$, $\alpha'' \geqslant 0$, $\alpha' + \alpha'' = 1$ имеет место тождество

$$\lambda_t' \frac{\partial F_t}{\partial z}(z_t') - \lambda_t'' \frac{\partial F_t}{\partial z}(z_t'') = (\alpha'\lambda_t' + \alpha''\lambda_t'') \times$$

$$\times \left(\frac{\partial F_t}{\partial z}(z_t') - \frac{\partial F_t}{\partial z}(z_t'')\right) + \bar{\lambda}_t \left(\alpha'' \frac{\partial F_t}{\partial z}(z_t') + \alpha' \frac{\partial F_t}{\partial z}(z_t'')\right). \tag{17}$$

Так как F_t - строго выпуклая функция и $F_t(z_t') = 0$, $F_t(z_t'') = 0$, то $\frac{\partial F_t}{\partial z}(z_t')\bar{z}_t > 0$ и $\frac{\partial F_t}{\partial z}(z_t'')\bar{z}_t < 0$ либо $\bar{z}_t = 0$. В обоих случаях можно выбрать $\alpha_t' \geqslant 0$, $\alpha_t'' \geqslant 0$, $\alpha_t' + \alpha_t'' = 1$ такие, что

$$\left(\alpha_t'' \frac{\partial F_t}{\partial z}(z_t') + \alpha_t' \frac{\partial F_t}{\partial z}(z_t''), \bar{z}_t\right) = 0. \tag{18}$$

Обозначив через f_t величину $\alpha_t'' \frac{\partial F_t}{\partial z}(z_t') + \alpha_t' \frac{\partial F_t}{\partial z}(z_t'')$, получим равенство

$$f_t^T \bar{z}_t = 0. \tag{18'}$$

Из предположения 2 следует, что соответствующие компоненты векторов $\frac{\partial F_t}{\partial z}(z_t')$ и $\frac{\partial F_t}{\partial z}(z_t'')$ имеют один знак

и, кроме того, $\left\| \frac{\partial F_t}{\partial z}(z_t') \right\|$, $\left\| \frac{\partial F_t}{\partial z}(z_t'') \right\| \geq \varepsilon_3$, поэтому $\| f_t \| \geq \varepsilon_3/2$.

Слагаемое $(\alpha_t' \lambda_t' + \alpha_t'' \lambda_t'')\left(\frac{\partial F_t}{\partial z}(z_t') - \frac{\partial F_t}{\partial z}(z_t'')\right)$ в правой части (I7) можно представить в виде

$$\lambda_t^* \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(z_t'' + \theta \bar{z}_t), \bar{z}_t\right) d\theta = \lambda_t^* G_t \bar{z}_t,$$

где

$$\lambda_t^* = \alpha_t' \lambda_t' + \alpha_t'' \lambda_t'', \quad G_t = \int_0^1 \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(z_t'' + \theta \bar{z}_t) d\theta.$$

Из предположений I,2 и равенства $|\lambda_t'| \left\| \frac{\partial F_t}{\partial z}(z_t') \right\| = \left\| -\frac{\partial u_{t-1}}{\partial c}(c_{t-1}'), \frac{d u_t}{\partial c}(c_t') \right\|$ (см. (I3)-(I4)) вытекает оценка $\varepsilon_5/\delta_3 \leq \lambda_t' \leq \leq 2\delta_5/\varepsilon_3$. Такая же оценка справедлива для λ_t'' и, следовательно, для λ_t^* . Из предположения I следует, что $\varepsilon_4 \leq s^T G_t s \leq \leq \delta_4$ для всех $s \in R^{2n}$, $\|s\| = 1$, $t = 1, 2, \ldots$ Тогда $\varepsilon_4 \varepsilon_5/\delta_3 \leq \leq \lambda_t^* s^T G_t s \leq 2\delta_4 \delta_5/\varepsilon_3$ для всех $s \in R^{2n}$, $\|s\| = 1$, $t = 1, 2, \ldots$
Аналогично

$$\frac{\partial u_t}{\partial c}(c_t') - \frac{\partial u_t}{\partial c}(c_t'') = W_t \bar{c}_t = W_t (\bar{y}_t - \bar{x}_t),$$

где $W_t = \int_0^1 \frac{\partial^2 u_t}{\partial c^2}(c_t'' + \theta \bar{c}_t) d\theta$. Из предположения 2 следует, что $0 \geq s^T W_t s \geq -\delta_6$ для всех $s \in R^n$, $\|s\| = 1$, $t = 0, 1, \ldots$
Итак, уравнения (I5), (I6) можно записать следующим образом:

$$W_{t-1} \bar{y}_{t-1} + (\lambda_t^* G_t^{11} - W_{t-1}) \bar{x}_t + \lambda_t^* G_t^{12} \bar{y}_t + f_t^1 \bar{\lambda}_t = 0, \tag{I9}$$

$$\lambda_t^* G_t^{21} \bar{x}_t + (\lambda_t^* G_t^{22} - W_t) \bar{y}_t + f_t^2 \bar{\lambda}_t + W_t \bar{x}_{t+1} = 0, \tag{20}$$

где

$$\begin{pmatrix} G_t^{11} & G_t^{12} \\ G_t^{21} & G_t^{22} \end{pmatrix} = G_t, \quad \begin{pmatrix} f_t^1 \\ f_t^2 \end{pmatrix} = f_t .$$

Последние уравнения вместе с (I8) образуют линейную динамическую систему вида (3)-(5). Достаточно положить $P_t = \lambda_t^* G_t$, $S_t = -W_t$, $H_t = f_t$, $\pi_1 = \varepsilon_4 \varepsilon_5/\delta_3$, $\pi_2 = 2\delta_4 \delta_5/\varepsilon_3$, $\sigma = \delta_6$, $h = \varepsilon_3/2$, $X_t = \bar{x}_t$, $Y_t = \bar{y}_t$, $\Lambda_t = \bar{\lambda}_t$. Поэтому $(\bar{x}_t, \bar{y}_t, \bar{\lambda}_t) \to 0$ с геометрической скоростью при $t \to \infty$. Теорема доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Двойственные условия оптимальности для траектории $(y'_t,\ x'_{t+1},\ c'_t)$ имеют вид

$$-\frac{\partial u_t}{\partial c^i}(c'_t)+p^{i}_t\geq 0,\quad c'^{i}_t\Big(-\frac{\partial u_t}{\partial c^i}(c'_t)+p'^{i}_t\Big)=0,\tag{I0$'$}$$

$$i=1,\dots,n,\ t=0,1,\dots;$$

$$\lambda'_t\frac{\partial F_t}{\partial x^i}(z'_t)+p'^{i}_{t-1}\geq 0,\quad x'^{i}_t\Big(\lambda'_t\frac{\partial F_t}{\partial x^i}(z'_t)+p'^{i}_{t-1}\Big)=0,\tag{II$'$}$$

$$i=1,\dots,n,\ t=1,2,\dots;$$

$$\lambda'_t\frac{\partial F_t}{\partial y^i}(z'_t)-p'^{i}_t\geq 0,\quad y'^{i}_t\Big(\lambda'_t\frac{\partial F_t}{\partial y^i}(z'_t)-p'^{i}_t\Big)=0,\tag{I2$'$}$$

$$i=1,\dots,n,\ t=1,2,\dots$$

На траектории $(y''_t,\ x''_{t+1},\ c''_t)$ выполнены уравнения (I0)-(I2). Зафиксируем числа $\alpha'\geq 0,\ \alpha''\geq 0,\ \alpha'+\alpha''=1$. Из (I0$'$), (II$'$), (I0), (II) прямо следуют равенства

$$(\alpha'\lambda'_t+\alpha''\lambda''_t)\Big(\frac{\partial F_t}{\partial x^i}(z'_t)-\frac{\partial F_t}{\partial x^i}(z''_t)\Big)+$$

$$+\Big(\alpha''\frac{\partial F_t}{\partial x^i}(z'_t)+\alpha'\frac{\partial F_t}{\partial x^i}(z''_t)\Big)\bar\lambda_t+\frac{\lambda'_t\frac{\partial F_t}{\partial x^i}(z'_t)+p'^{i}_{t-1}}{x''^{i}_t}\bar x^{i}_t+$$

$$+\frac{\frac{\partial u_{t-1}}{\partial c^i}(c'_{t-1})-p'^{i}_{t-1}}{c''_{t-1}}\bar c^{i}_{t-1}+\Big(\frac{\partial u_{t-1}}{\partial c^i}(c'_{t-1})-\frac{\partial u_{t-1}}{\partial c^i}(c''_{t-1})\Big)=0.\tag{2I}$$

Аналогично, из (I0$'$), (I2$'$), (I0), (I2) вытекают равенства

$$(\alpha'\lambda'_t+\alpha''\lambda''_t)\Big(\frac{\partial F_t}{\partial y^i}(z'_t)-\frac{\partial F_t}{\partial y^i}(z''_t)\Big)+$$

$$+\Big(\alpha''\frac{\partial F_t}{\partial y^i}(z'_t)+\alpha'\frac{\partial F_t}{\partial y^i}(z''_t)\Big)\bar\lambda_t+\frac{\lambda'_t\frac{\partial F_t}{\partial y^i}(z'_t)-p'^{i}_t}{y''^{i}_t}\bar y^{i}_t+$$

$$+\frac{\frac{\partial u_t}{\partial c^i}(c'_t)-p'^{i}_t}{c''^{i}_t}\bar c^{i}_t+\Big(\frac{\partial u_t}{\partial c^i}(c'_t)-\frac{\partial u_t}{\partial c^i}(c''_t)\Big)=0.\tag{22}$$

Положим $\alpha'_t,\ \alpha''_t$ такими, чтобы выполнялось (I8). Определим вектор f_t, число λ^*_t, матрицы G_t, W_t так же, как в доказательстве теоремы I. Кроме того, определим матрицы $\Lambda^x_t,\Lambda^y_t,\Lambda^c_t$ размерности $n\times n$ следующим образом: элементы этих матриц с индексами (i,i) равны соответственно числам

$$\left(\lambda'_t \frac{\partial F_t}{\partial x^i}(z'_t)+p'^{i}_{t-1}\right)/x'''^{i}_t \geq 0, \quad \left(\lambda'_t \frac{\partial F_t}{\partial y^i}(z'_t)-p'^{i}_t\right)/y'''^{i}_t \geq 0,$$

$$\left(\frac{\partial u_t}{\partial c^i}(c'_t)-p'^{i}_t\right)/c'''^{i}_t \leq 0.$$

Тогда равенства (2I)-(22) можно переписать в виде:

$$(W_{t-1}+\Lambda^c_{t-1})\bar{y}_{t-1}+(\lambda^*_t G^{11}_t+\Lambda^x_t-W_{t-1}-\Lambda^c_{t-1})\bar{x}_t+$$

$$+\lambda^*_t G^{12}_t \bar{y}_t + f^1_t \bar{\lambda}_t = 0;$$

$$\lambda^*_t G^{21}_t \bar{x}_t + (\lambda^*_t G^{22}_t + \Lambda^y_t - W_t - \Lambda^c_t)\bar{y}_t +$$

$$+ f^2_t \bar{\lambda}_t + (W_t+\Lambda^c_t)\bar{x}_{t+1} = 0.$$

Эти уравнения вместе с (I8$'$) образуют систему вида (3)-(5). Для этого следует положить $P_t = \lambda^*_t G_t + \Lambda^z_t$, $S_t = -W_t - \Lambda^c_t$,

$H_t = f_t$, $X_t = \bar{x}_t$, $Y_t = \bar{y}_t$, $\Lambda_t = \bar{\lambda}_t$, где

$$\Lambda^z_t = \begin{pmatrix} \Lambda^x_t & 0 \\ 0 & \Lambda^y_t \end{pmatrix}.$$

Покажем, что

$$\varepsilon_5/\delta_3 \leq \lambda^*_t \leq \max\{\sigma_2/\varepsilon_3,\ 2\delta_5/\varepsilon_3\}. \qquad (23)$$

Действительно, из (I0$'$)-(I2$'$) вытекает, что $\lambda'_t \left\|\frac{\partial F_t}{\partial y}(z'_t)\right\| \geq$ $\geq \left\|\frac{\partial u_t}{\partial c}(c'_t)\right\|$, $\lambda'_t \left\|\frac{\partial F_t}{\partial x}(z'_t)\right\| \leq \|p_{t-1}\|$. Отсюда, используя предположение I и условие $в$) теоремы 2, имеем $\varepsilon_5/\delta_3 \leq \lambda'_t \leq \sigma_2/\varepsilon_3$. Так как в доказательстве теоремы I была установлена оценка $\varepsilon_5/\delta_3 \leq \lambda''_t \leq 2\delta_5/\varepsilon_3$, то справедливы неравенства (23).

Имеем также следующие оценки:

$$0 \leq \left(\lambda'_t \frac{\partial F_t}{\partial x^i}(z'_t)+p'^{i}_{t-1}\right)/x'''^{i}_t \leq p'^{i}_{t-1}/x'''^{i}_t \leq \sigma_2/\sigma_1, \qquad (24)$$

$$0 \leq \left(\lambda'_t \frac{\partial F_t}{\partial y^i}(z'_t)-p'^{i}_t\right)/y'''^{i}_t \leq$$

$$\leq \lambda_t' \frac{\partial F_t}{\partial y^i}(x_t')/y_t''^i \leq \sigma_2 \sigma_3/\sigma_1 \varepsilon_3, \tag{25}$$

$$0 \geq \left(\frac{\partial u_t}{\partial c^i}(c_t') - p_t'^i\right)/c_t''^i \geq -p_t'^i/c_t''^i \geq -\sigma_2/\sigma_1. \tag{26}$$

Далее доказательство существования чисел π_1, π_2, σ, h с использованием оценок (23)-(26) становится рутинным и мы его опускаем. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Araujo A., Scheinkman J. Smoothness, comparative dynamics and turnpike property // Econometrica. - 1977. - V.45. - P.601-620.
2. Bewley T. An integration of equilibrium theory and turnpike theory // J. Math. Econ. - 1982. - V.10, N 213. - P.233-268.

Поступила в ред.-изд. отдел
12.05.1987 г.