УДК 513.98

О ТЕОРЕМАХ М.Г.КРЕЙНА И Г.ДЖЕЙМСОНА

А.Г.Кусраев

1°. Одним из наиболее ранних и значительных результатов теории конусов в нормированных пространствах был следующий факт.

1.1. ТЕОРЕМА (М.Г.Крейн [1]). Пусть X - упорядоченное нормированное пространство. Для того чтобы любой линейный непрерывный функционал был представим в виде разности двух положительных непрерывных функционалов, необходимо и достаточно, чтобы положительный конус X^+ был нормальным.

Нормальность конуса X^+ означает, что $(\mathcal{U}+X^+)\cap\cap(\mathcal{U}-X^+)\subset\delta\mathcal{U}$ для некоторого $\delta>0$, где $\mathcal{U}$ - единичный шар пространства X. Теорема 1.1 обобщалась в разных направлениях, одно из которых связано с расширением концепции нормальности.

Пусть X - локально-выпуклое пространство. Говорят, что конусы $K_1,\dots,K_n$ в X находятся в нормальном положении, если для любой окрестности нуля $\mathcal{U}\subset X$ существует такая окрестность нуля $V\subset X$, что

$$(V+K_1)\cap\dots\cap(V+K_n)\subset K_1\cap\dots\cap K_n+\mathcal{U}.$$

Ясно, что нормальность X^+ равносильна тому, что конусы $K_1:=X^+$ и $K_2:=-X^+$ находятся в нормальном положении.

1.2. ТЕОРЕМА (Г.Джеймсон [2]). Конусы $K_1,\dots,K_n$ в локально-выпуклом про-

странстве находятся в нормальном положении в том и только в том случае, если конус $K_1^\circ+\ldots+K_n^\circ$ слабо замкнут и для любой окрестности нуля $\mathcal{U}$ найдется такая окрестность нуля V, что

$$(K_1^\circ+\ldots+K_n^\circ)\cap\mathcal{U}^\circ\subset K_1^\circ\cap V^\circ+\ldots+K_n^\circ\cap V^\circ.$$

Здесь и ниже символом $\mathcal{U}^\circ$ обозначается поляра множества $\mathcal{U}\subset X$:

$$\mathcal{U}^\circ:=\{x'\in X' : \langle x|x'\rangle\leq 1 \;,\; x\in\mathcal{U}\}.$$

Цель настоящей заметки - получить операторный вариант теоремы М.Г.Крейна и аналог теоремы Г.Джеймсона для выпуклых соответствий.

2^0. Всюду ниже X и Y - локально-выпуклые пространства, а X' и Y' - им сопряженные. Билинейные формы соответствующих двойственностей обозначаем одним и тем же символом $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Будем считать, что пространства $X\times Y$ и $X'\times Y'$ приведены в двойственность посредством билинейной формы

$$\langle(x,y)|(x',y')\rangle := \langle x|x'\rangle - \langle y|y'\rangle .$$

Выпуклым соотвествием из X в Y будем называть выпуклое множество $\Phi\subset X\times Y$. При этом для $x\in X$ и $A\subset X$ полагаем $\Phi(x):=\{y\in Y : (x,y)\in\Phi\}$ и $\Phi(A):=\cup\{\Phi(x): x\in A\}$.

В силу наших соглашений имеем

$$\Phi^\circ:=\{(x',y')\in X'\times Y' : \langle x|x'\rangle - \langle y|y'\rangle\leq 1\}.$$

Коническим отрезком называют всякое выпуклое множество, содержащее ноль. Для конических отрезков A и B положим

$$A\# B := \bigcup_{\substack{\alpha\geq 0,\,\beta\geq 0,\\ \alpha+\beta=1}} (\alpha\cdot A)\cap(\beta\cdot B) ,$$

где $\alpha\cdot A:=\alpha A:=\{\alpha a : a\in A\}$ при $\alpha>0$ и $0\cdot A :=$ $:=\cap\{\varepsilon(A-a):\varepsilon>0, a\in A\}$. Потребуются некоторые правила вычисления поляр (см. [3]).

2.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для любых конических отрезков A и B имеют место представления:

(а) $(A+B)^\circ = A^\circ \# B^\circ$;

(б) $(\bar{A} \# \bar{B})^\circ = \overline{A^\circ + B^\circ}$,

где черта означает замыкание в слабой топологии.

2.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть Φ - выпуклое соответствие из X в Y, причем $0 \in \Phi(0)$, и $\mathcal{U}$ - абсолютно выпуклая окрестность нуля в X. Тогда справедливы включения:

(а) $-\Phi^\circ(X') \subset \Phi(0)^\circ$;

(б) $-\Phi(\mathcal{U})^\circ = \cup\{\alpha\Phi^\circ(\frac{\beta}{\alpha}\cdot\mathcal{U}^\circ) : \alpha,\beta \geq 0,\ \alpha+\beta=1\}$,

где по определению $0\Phi^\circ(\frac{1}{0}\cdot\mathcal{U}^\circ) := (0\cdot\Phi^\circ)(\mathcal{U}^\circ)$.

Соответствие Φ называют полунепрерывным сверху в точке $x_0 \in X$, если для любой окрестности нуля $V \subset Y$ найдется такая окрестность нуля $\mathcal{U} \subset X$, что $\Phi(x_0+\mathcal{U}) \subset \subset \Phi(x_0)+V$.

Оказывается, что нормальное положение конусов является специальным случаем полунепрерывности сверху в точке. Рассмотрим набор конусов $K_1, \ldots, K_n$ в пространстве X. Введем соответствие Ψ из $Y := X^n$ в X формулой

$$\Psi := \{(x_1,\ldots,x_n, h) \in Y \times X : x_l + h \in K_l,\ l := 1,\ldots,n\}.$$

2.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Справедливы следующие утверждения:

(а) Ψ - выпуклое соответствие;

(б) соответствие Ψ полунепрерывно сверху в нуле тогда и только тогда, когда конусы $K_1,\ldots,K_n$ находятся в нормальном положении.

◁ Утверждение (а) очевидно, докажем (б). Заметим, что $\Psi(0,\ldots,0) = K_1 \cap \ldots \cap K_n$. Если $V \subset X$ - симметричное множество, то включение $h \in \Psi(V^n)$ равносильно существованию таких $k_1 \in K_1, \ldots, k_n \in K_n$ и $x_1, \ldots, x_n \in V$, что $x_l + h = k_l$, $l := 1, \ldots, n$. Тем самым $h \in \Psi(V^n)$ в том и только в том случае, если $h = k_l - x_l \in K_l + V$ для всех $l = 1, \ldots, n$. Это означает, что $\Psi(V^n) = (K_1 + V) \cap$

$\cap \ldots \cap (K_n + V)$. Остается сопоставить определения полунепрерывности сверху и нормального положения конусов. $\triangleright$

3°. Дадим теперь двойственную характеризацию полунепрерывности сверху выпуклого соответствия в нуле. Достаточно ограничиться этим случаем, ибо если $y_0 \in \Phi(x_0)$ и $\Phi_0 := \Phi - (x_0, y_0)$, то $\Phi_0(A) = \Phi(x_0 + A) - y_0$, следовательно, Φ полунепрерывно сверху в точке x_0 в том и только в том случае, если Φ_0 полунепрерывно сверху в нуле.

3.1. ТЕОРЕМА. Пусть Φ – выпуклое соответствие из X в Y, причем $0 \in \Phi(0)$. Тогда равносильны утверждения:

(а) Φ полунепрерывно сверху в нуле;

(б) множество $\Phi^\circ(X')$ слабо замкнуто и для каждого абсолютно выпуклого эквинепрерывного $B \subset Y'$ найдется абсолютно выпуклое эквинепрерывное множество $A \subset X'$ такое, что

$$\bigcup_{0<\alpha\leq 1} \alpha \Phi^\circ\left(\frac{1-\alpha}{\alpha} A\right) \supset (\varepsilon \Phi^\circ(X')) \cap (1-\varepsilon) B,$$

каково бы ни было число $0 < \varepsilon < 1$.

$\triangleleft$ (а) $\Rightarrow$ (б). Возьмем $y' \in \Phi(0)^\circ$ и положим

$$p(x) := \inf \{-\langle y | y' \rangle : y \in \Phi(x)\} \quad (x \in X).$$

Понятно, что $p : X \to \overline{\mathbb{R}}$ – выпуклая функция. Пусть V – такая окрестность нуля в Y, что $|\langle v | y' \rangle| \leq 1$ для всех $v \in V$. Подберем окрестность нуля $\mathcal{U} \subset X$, для которой $\Phi(\mathcal{U}) \subset \Phi(0) + V$. Тогда для любых $x \in \mathcal{U}$ и $y \in \Phi(x)$ будет $y = u + v$ при подходящих $u \in \Phi(0)$ и $v \in V$. Поэтому $\langle y | y' \rangle = \langle u | y' \rangle + \langle v | y' \rangle \leq 2$ и $p(x) \geq -2$.

Итак, выпуклая функция $p : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ограничена снизу на окрестности $\mathcal{U}$. Положим

$$q(x) := \inf \{ t^{-1}(p(xt) - p(0)) : t > 0 \} \quad (x \in X).$$

Нетрудно видеть, что $q : X \to \overline{\mathbb{R}}$ – сублинейный функционал и $q(x) \geq -3$ для всех $x \in \mathcal{U}$. Последнее следует

из того, что $q(x) \geqslant p(0) - p(-x)$ $(x \in X)$. Из ограниченности снизу функционала q на $\mathcal{U}$ следует $q \geqslant -3\mu(\mathcal{U})$, где $\mu(\mathcal{U})$ - функционал Минковского $\mathcal{U}$. Существует $x' \in X'$, для которого $\langle x|x' \rangle \leq q(x)$ при всех $x \in X$. Как видно,

$$\langle x|x' \rangle \leq q(x) \leq p(x) - p(0) < p(x) + 1 \leq -\langle y|y' \rangle + 1$$

для всех $x \in X$ и $y \in \Phi(x)$. Отсюда вытекает, что $(x', -y') \in \Phi^\circ$ или $-y' \in \Phi^\circ(x') \subset \Phi^\circ(X')$. Итак, $\Phi(0)^\circ \subset -\Phi^\circ(X')$. Обратное включение следует из 2.2 (а). Тем самым $\Phi(0)^\circ = -\Phi^\circ(X')$ и доказана замкнутость множества $\Phi^\circ(X')$. Пусть теперь B - симметричное эквинепрерывное множество в Y'. Тогда B° - окрестность нуля в Y. Стало быть, существует симметричная окрестность нуля $\mathcal{U} \subset X$ и число $\delta > 1$, для которых $\Phi(\delta\mathcal{U}) \subset \Phi(0) + B^\circ$. Переходя к полярам и привлекая 2.I (а) и 2.2 (б), выводим

$$\bigcup_{\substack{\alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0 \\ \alpha + \beta = 1}} \alpha \Phi^\circ\left(\frac{\beta}{\alpha\delta}\mathcal{U}^\circ\right) \supset \Phi^\circ(X') \# B^\circ \supset (\varepsilon\Phi^\circ(X')) \cap (1-\varepsilon)B^\circ,$$

где $0 < \varepsilon < 1$. Пусть $y' \in (0 \cdot \Phi^\circ)\left(\frac{1}{\delta}\mathcal{U}^\circ\right)$. Подберем $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $n/(n-1) < \delta$. Ввиду замкнутости Φ° имеем $0 \cdot \Phi^\circ = \bigcap\{\varepsilon\Phi^\circ : 0 < \varepsilon < 1\}$. Следовательно,

$$y' \in \frac{1}{n}\Phi^\circ\left(\frac{n}{\delta}\mathcal{U}^\circ\right) \subset \frac{1}{n}\Phi^\circ\left(n\left(1 - \frac{1}{n}\right)\mathcal{U}^\circ\right) \subset \bigcup_{0<\alpha<1} \alpha\Phi^\circ\left(\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\mathcal{U}^\circ\right).$$

Тем самым приходим к соотношению

$$\bigcup_{0<\alpha\leq 1} \alpha\Phi^\circ\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\mathcal{U}^\circ\right) \supset (\varepsilon\Phi^\circ(X')) \cap (1-\varepsilon)B.$$

Остается заметить, что множество $\mathcal{U}^\circ$ эквинепрерывно.

(б) $\Longrightarrow$ (а). Для симметричной окрестности нуля $W \subset Y$ и числа $\delta > 1$ подберем замкнутую абсолютно выпуклую окрестность нуля $V \subset Y$ так, чтобы $\delta V + \delta V \subset W$. Согласно (б) существует абсолютно выпуклое замкнутое эквинепрерывное множество $A' \subset X'$ такое, что

$$C := \bigcup_{0<\alpha\leq 1} \alpha\Phi^\circ\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}A\right) \supset (\varepsilon\Phi^\circ(X')) \cap (1-\varepsilon)\delta V^\circ \supset \varepsilon\Phi^\circ(X') \cap (1-\varepsilon)V^\circ$$

при всех $0<\varepsilon<1$. Ввиду эквинепрерывности множества V° будет $0\cdot V^\circ=\{0\}$, поэтому $\Phi^\circ(X')\cap(0\cdot V^\circ)\subset C$. Из замкнутости множества $\Phi^\circ(X')$ вытекает, что $0\cdot\Phi^\circ(X')=\cap\{\varepsilon\Phi^\circ(X'):$ $0<\varepsilon<1\}$. Возьмем $y'\in(0\cdot\Phi^\circ(X'))\cap V^\circ$ и подберем $n\in N$ так, чтобы $n/(n-1)<\delta$. Тогда из-за выбора окрестности V и числа δ будет

$$y'\in\frac{1}{n}\Phi^\circ(X')\cap\frac{n-1}{n}\left(\frac{n}{n-1}V^\circ\right)\subset\frac{1}{n}\Phi^\circ(X')\cap\left(1-\frac{1}{n}\right)\delta V^\circ\subset C.$$

Тем самым $(0\cdot\Phi^\circ(X'))\cap V^\circ\subset C$ и приходим к соотношению $C\supset\Phi^\circ(X')\# V^\circ$. Переход к полярам с учетом формул $-\Phi^\circ(X')=\Phi(0)^\circ$, 2.2 (б) и 2.I (б) дает

$$-\Phi(A^\circ)\subset C^\circ\subset\overline{\Phi^\circ(X')+V}\subset-\Phi(0)+V+V\subset-\Phi(0)+W.$$

Отсюда получаем $\Phi(\mathcal{U})\subset\Phi(0)+W$, где $\mathcal{U}:=A^\circ$ - окрестность нуля в X . ▷

3.2. ТЕОРЕМА. Пусть выполнены условия теоремы 3.I и, сверх того, $\Phi(0)$ - конус. Тогда равносильны условия:

(а) Φ полунепреывно сверху в нуле;

(б) множество $\Phi^\circ(X')$ слабо замкнуто и для каждого абсолютно выпуклого эквинепрерывного $B\subset Y'$ найдется абсолютно выпуклое эквинепрерывное множество $A\subset X'$ такое, что

$$\Phi^\circ(A)\supset\Phi^\circ(X')\cap B.$$

◁ Для доказательства нужно лишь заметить, что для конического отрезка $A\subset X'$ справедливы включения

$$\Phi^\circ(A)\supset\bigcup_{0<\alpha<1}\alpha\Phi\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}A\right)\supset\frac{1}{2}\Phi^\circ(A),$$

и принять во внимание, что при указанных условиях $\Phi^\circ(X')$ - конус. ▷

3.3. Доказательство теоремы Джеймсона. Этот факт получается как специальный случай теоремы 3.2. В самом деле, пусть $K_1, \dots, K_n$ – конусы в X, а Ψ – ассоциированное выпуклое соответствие из $Y := X^n$ в X. Поляра Ψ имеет вид

$$\Psi^\circ := \left\{ (x'_1, \dots, x'_n, h') \in Y' \times X' : x'_\ell \in K^\circ_\ell,\ h' + \sum_{\ell=1}^{n} x'_\ell = 0 \right\}.$$

Действительно, если $(x'_1, \dots, x'_n, h') \in \Psi^\circ$, то

$$\sum_{\ell=1}^{n} \langle x_\ell | x'_\ell \rangle - \langle h | h' \rangle \le 0 \quad (x_\ell + h \in K_\ell,\ \ell := 1, \dots, n).$$

Полагая $h = 0$, получаем $x'_\ell \in K^\circ_\ell$, $\ell := 1, \dots, n$. Если же $x_\ell := -h$, то $\langle h | \sum_{\ell=1}^{n} x'_\ell + h' \rangle = 0$, поэтому $h' + \sum_{\ell=1}^{n} x'_\ell = 0$. Наоборот, допустим, что $x'_\ell \in K^\circ_\ell$, $\ell := 1, \dots, n$, и $h' \in X'$, причем $h' + \sum_{\ell=1}^{n} x'_\ell = 0$. Тогда

$$\sum_{\ell=1}^{n} \langle x_\ell | x'_\ell \rangle + \langle h | h' \rangle = \sum_{\ell=1}^{n} \langle x_\ell + h | x'_\ell \rangle \le 0,$$

как только $x_\ell + h \in K_\ell$, $\ell := 1, \dots, n$. Заметим теперь, что для $C \subset Y'$ будет $-\Psi^\circ(C^n) = K^\circ_1 \cap C + \dots + K^\circ_n \cap C$ и, в частности, $-\Psi^\circ(Y') = K^\circ_1 + \dots + K^\circ_n$. Остается применить 3.2 к соответствию Ψ. $\triangleright$

Если Φ – линейный оператор, то 3.2 превращается в хорошо известный результат.

3.4 ТЕОРЕМА. *Пусть Φ – слабо непрерывный оператор из X в Y, а $\Phi' : Y' \to X'$ – сопряженный оператор. Тогда Φ непрерывен в том и только в том случае, если множество $\Phi'(B)$ эквинепрерывно для всякого абсолютно выпуклого эквинепрерывного множества $B \subset Y'$.*

4°. При доказательстве теоремы 3.I было установлено, в частности, что если выпуклое соответствие Φ полунепрерывно сверху в нуле и $0 \in \Phi(0)$, то $\Phi(0)^\circ = -\Phi^\circ(X')$. Для соответствия Ψ это означает, в силу 2.3, что если конусы $K_1, \dots, K_n$ в локально-выпуклом пространстве находятся в нормальном положении, то

$$(K_1 \cap \dots \cap K_n)^\circ = K^\circ_1 + \dots + K^\circ_n .$$

Перейдем теперь к установлению операторного варианта этого факта. Возьмем произвольное K-пространство E (см. [4]). Линейный оператор $T: X \to E$ называют o-ограниченным, если существуют окрестность нуля $\mathcal{U} \subset X$ и элемент $0 \leq e \in E$ такие, что $|Tx| \leq e$ для всех $x \in \mathcal{U}$. Символом $\mathcal{L}_o(X, E)$ обозначим множество всех o-ограниченных операторов из X в E. Ясно, что $T \in \mathcal{L}_o(X, E)$ в том и только в том случае, если существуют элемент $0 \leq e \in E$ и непрерывная полунорма $p: X \to \mathbb{R}$, для которых

$$|Tx| \leq e p(x) \qquad (x \in X).$$

Линейный оператор $T: X \to E$ называют проскалярным, если существует семейство проекторов $(\pi_\xi)_{\xi \in \Xi}$ на попарно-дизъюнктные компоненты в E такое, что $\sum_{\xi \in \Xi} \pi_\xi = I_E$ и $\pi_\xi \circ T \in \mathcal{L}_o(X, E)$ для всех $\xi \in \Xi$. Пусть $\mathcal{L}_p(X, E)$ - пространство всех проскалярных операторов из X в E. Для конуса $K \subset X$ положим

$$\pi_o(K, E) := \{T \in \mathcal{L}_o(X, E) : Tk \leq 0,\ k \in K\};$$

$$\pi_p(K, E) := \{T \in \mathcal{L}_p(X, E) : Tk \leq 0,\ k \in K\}.$$

Ясно, что $\pi_o(K, R) = \pi_p(K, R) = K^\circ$.

4.1. ТЕОРЕМА. Если конусы $K_1, \ldots, K_n$ находятся в нормальном положении, то имеет место представление

$$\pi_o(K_1 \cap \ldots \cap K_n, E) = \pi_o(K_1, E) + \ldots + \pi_o(K_n, E).$$

$\triangleleft$ Возьмем $T \in \pi_o(K_1 \cap \ldots \cap K_n, E)$ и положим по определению

$$P(x_1, \ldots, x_n) := \inf \{-Tk : k \in \Psi(x_1, \ldots, x_n)\},$$

где Ψ - соответствие из 2.3, ассоциированное с конусами $K_1, \ldots, K_n$, и инфимум вычисляется в $\overline{E} := E \cup \{\pm\infty\}$. Пусть окрестность нуля $V \subset X$ и элемент $0 \leq e \in E$ таковы, что $T(V) \subset [-e, e]$. Подберем абсолютно выпуклую ок-

рестность нуля $\mathcal{U} \subset X$ так, чтобы $\Psi(\mathcal{U}^n) \subset \Psi(0,\ldots,0)+V$ (см. 2.3). Так как Ψ - выпуклое соответствие и $\Psi(\alpha(x_1,\ldots,x_n))= =\alpha\Psi(x_1,\ldots,x_n)$ при $\alpha>0$, то P - сублинейный оператор из X^n в $\bar{E}$ (см.[3]). Если $h\in\Psi(\mathcal{U}^n)$, то $h=k+v$ для некоторых $k\in\Psi(0,\ldots,0)=K_1\cap\ldots\cap K_n$ и $v\in V$. Поэтому $Th=Tk+Tv\le Tv\le e$, а значит, $-Th\geqslant -e$. Следовательно, $P(x_1,\ldots,x_n)\geqslant -e$ для всех $x_1,\ldots,x_n\in\mathcal{U}$. Отсюда вытекает, что

$$P(x_1,\ldots,x_n)\geqslant -\lambda e \quad (x_\ell\in\lambda\mathcal{U},\ \ell:=1,\ldots,n,\ \lambda>0).$$

Переход к супремуму по указанным λ дает

$$P(x_1,\ldots,x_n)\geqslant -Q(x_1,\ldots,x_n) \qquad (x_1,\ldots,x_n\in X),$$

где $Q(x_1,\ldots,x_n):=q(x_1)\vee\ldots\vee q(x_n)\cdot e$, а q - функционал Минковского множества $\mathcal{U}$. По теореме о сэндвиче (см.[3]) существует линейный оператор $\mathcal{T}: X^n\to E$ такой, что

$$-Q(u)\le \mathcal{T}u\le P(u) \qquad (x\in X^n).$$

Положим $T_\ell x:=\mathcal{T}(0,\ldots,0,x,0,\ldots,0)$, где x стоит на ℓ-м месте. Тогда T_ℓ - линейный оператор из X в E и имеют место неравенства

$$-e\,q(x)\le T_\ell x\le P(0,\ldots,0,x,0,\ldots,0) \quad (x\in X).$$

Отсюда видно, что $|T_\ell x|\le e\,q(x)$ $(x\in X)$, т.е. $T_\ell\in\mathcal{L}_0(X,E)$. С другой стороны, для $x:=k_\ell\in K_\ell$ будет $0\in\Psi(0,\ldots,0,k,0,\ldots,0)$ поэтому $T_\ell k\le 0$. Итак, $T_\ell\in\pi_0(K_\ell,E)$ и $T=T_1+\ldots+T_n$. Тем самым установлено включение $\subset$. Противоположное включение очевидно. $\triangleright$

4.2. ТЕОРЕМА. *Если конусы $K_1,\ldots,K_n$ находятся в нормальном положении, то справедлива формула*

$$\pi_p(K_1,\ldots,K_n,mE)=\pi_p(K_1,mE)+\ldots+\pi_p(K_n,mE).$$

$\triangleleft$ Вновь фиксируем оператор T из левой части требуемого равенства. Пусть $(\rho_\xi)_{\xi\in\Xi}$ - семейство попарно-дизъюнктных проекторов в E таких, что $\sum\rho_\xi=I_E$ и $\rho_\xi\circ T\in\mathcal{L}_0(X,E)$. Понятно, что $\rho_\xi\circ T\in\pi_0(K_1\cap\ldots\cap K_n,mE)$, поэтому в силу 4.1 будет $\rho_\xi\circ T=T_{1,\xi}+\ldots+T_{n,\xi}$, где $T_{\ell,\xi}\in\pi_0(K_\ell,mE)$ $(\ell:=1,\ldots,n)$. Положим $T_\ell x:=\sum_{\xi\in\Xi}T_{\ell,\xi}x$. Тогда $T_\ell\in\pi_p(K_\ell,mE)$, $T=T_1+\ldots+T_n$. $\triangleright$

Предположим теперь, что X - упорядоченное локально-выпуклое пространство с положительным конусом X^+. Пусть $\mathcal{L}_o^+(X,E)$ и $\mathcal{L}_p^+(X,E)$ - конусы положительных o-ограниченных и положительных проскалярных операторов соответственно. Применив теоремы 4.I и 4.2 при $n=2$ к конусам $K_1 := X^+$ и $K_2 := -X^+$, получим следующее обобщение теоремы М.Г.Крейна.

4.3. ТЕОРЕМА. Если $E \neq \{0\}$, то равносильны утверждения:

(а) конус X^+ нормален;

(б) $\mathcal{L}_o(X,E) = \mathcal{L}_o^+(X,E) - \mathcal{L}_o^+(X,E)$.

$\triangleleft$ (а) $\Longrightarrow$ (б). Это вытекает из 4.I.

(б) $\Longrightarrow$ (а). Возьмем $x' \in X'$ и $0 < e \in E$. Положим $Tx := \langle x | x' \rangle e$ $(x \in X)$. В силу (а) имеем $T := T_1 - T_2$, где $T_1, T_2 \in \mathcal{L}_o^+(X,E)$. Пусть F - главный идеал в E, содержащий образы операторов T_1 и T_2, а также элемент e. Ясно, что F - это K-пространство ограниченных элементов и существует такой положительный функционал f на F, что $f(e)=1$. Положим $x'_\ell := f \circ T_\ell$, $\ell = 1,2$. Тогда $x'_1, x'_2 \geqslant 0$ и

$\langle x | x' \rangle = \langle x | x' \rangle f(e) = f(Tx) = f(T_1 x) - f(T_2 x) = \langle x | x'_1 \rangle - \langle x | x'_2 \rangle$,

т.е. $x' = x'_1 + x'_2$. $\triangleright$

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн М.Г. О минимальном разложении функционала на положительные соответствия // Докл. АН СССР. - 1940. - Т.28, №I.- С.18-22.
2. Jameson G.J.O. The duality of pairs of wedges // Proc. London Math. Soc. - 1972. - V.24, 3. - P.531-547.
3. Кусраев А.Г. Векторная двойственность и ее приложения. - Новосибирск: Наука, 1985.
4. Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных векторных пространств. - М.: Физматгиз, 1961.

Поступила в ред.-изд. отдел
06.04.1987 г.