УДК 513.88

ЗАМЕЧАНИЕ О ПРЕДЕЛАХ КАСАТЕЛЬНЫХ

С.С.Кутателадзе

Пусть F – замкнутое множество в $\mathbb{R}^m$ и x' – точка из F. Рассмотрим контингенцию $K(F,x')$ и конус Кларка $Cl(F,x')$ множества F в точке x'. Таким образом,

$$K(F,x') = \bigcap_{\varepsilon} cl\left(\overline{\bigcup_{0<\delta\le\varepsilon} \frac{F-x'}{\delta}}\right);$$

$$Cl(F,x') = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{\alpha,\beta>0} \bigcap_{\substack{|x-x'|\le\alpha \\ x\in F \\ 0<\gamma\le\beta}} \left(\frac{F-x}{\gamma} + \varepsilon B\right),$$

где $B = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| \le 1\}$ – единичный шар в $\mathbb{R}^m$.

Нам потребуются следующие признаки касательных Кларка.

ЛЕММА. Эквивалентны утверждения:

(1) $h' \in Cl(F,x')$;

(2) для любой последовательности (x_n) элементов F, сходящейся к x', и для любой сходящейся к нулю последовательности (α_n) строго положительных чисел найдутся подпоследовательность индексов и последовательность векторов (h_k), сходящаяся к h' и такая, что $x_{n(k)} + \alpha_{n(k)} h_k \in F$ при всех $k \in \mathbb{N}$;

(3) для любой последовательности (x_n) элементов F, сходящейся к x', и любой сходящейся к нулю последовательности (α_n) строго положительных скаляров найдется последовательность (h_n), сходящаяся к h' и такая, что $x_n+\alpha_n h_n \in F$ при всех $n \in \mathbb{N}$;

(4) для любого x из $*F$, бесконечно близкого к x', и каждой строго положительной инфинитезимали $\alpha \in *\mathbb{R}$, найдется вектор h из $*\mathbb{R}^m$ такой, что h бесконечно близок к h' и, кроме того, $x+\alpha h \in *F$.

Здесь, как обычно, $*$ симвслизирует робинсоновскую стандартизацию.

Доказательство см. в [1-3].

В 1981 г. Б.Корне выяснил (см. [4-5]), что конус Кларка представляет собой стабильную часть контингенции. Именно, им установлено следующее представление:

$$Cl(F,x') = \underset{\substack{x \to x' \\ x \in F}}{Li} K(F,x),$$

где Li - это нижний предел соответствия по Куратовскому. Напомним, что в [6] установлен следующий нестандартный критерий:

$$h' \in \underset{\substack{x \to x' \\ x \in F}}{Li} K(F,x) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\forall x \approx x',\ x \in *F)(\exists h \approx h')\, h \in *K(*F,x),$$

в котором символ $\approx$ обозначает бесконечную близость векторов по рассматриваемой стандартной топологии.

ТЕОРЕМА. Элемент h' лежит в конусе Кларка $Cl(F,x')$ в том и только в том случае, если для любого элемента $x \in *F$, бесконечно близкого к x', и произвольных внутренних последовательностей (x_N), (α_N)

таких, что $x_N \to x, x_N \in {}^*F$ и $\alpha_N \to 0, \alpha_N > 0$, найдутся внутренние подпоследовательности индексов $(N(k))$ и подпоследовательность векторов (h_k), сходящаяся к элементу, бесконечно близкому к h', для которых $x_{N(k)} + \alpha_{N(k)} h_k \in {}^*F$ при всех гипердействительных $k \in {}^*N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если вектор h' удовлетворяет сформулированному признаку, то, как легко видеть, он лежит в пределе контингенций по Куратовскому. В самом деле, при $x \approx x'$, $x \in {}^*F$ можно рассмотреть последовательности $x_N := x$ и $\alpha_N := 1/N$, где $N \in {}^*N$. Отвечающий им предельный вектор $\bar{h}$, бесконечно близкий к h', очевидно, лежит в контингенции $\bar{h} \in {}^*K({}^*F, x)$.

Для проверки противоположной импликации возьмем произвольный вектор h' из $Cl(F, x')$. Пусть, далее, элемент x из ${}^*F$ таков, что $x \approx x'$. Возьмем произвольные внутренние последовательности (x_n) элементов ${}^*F$ и (α_n) строго положительных гипердействительных чисел такие, что $x_n \to x$ и $\alpha_n \to 0$. Ясно, что, начиная с некоторого номера N_0 из ${}^*N$, будет

$$(\forall N \geq N_0, N \in {}^*N)\, x_N \approx x, \alpha_N \approx 0.$$

Учитывая, что $x \approx x'$, и то, что бесконечная близость является эквивалентностью, видим, что $x_N \approx x'$. Стало быть, в силу нестандартного критерия, приведенного в п.4 леммы, найдется элемент h_N из ${}^*R^m$ такой, что $x_N + \alpha_N h_N \in {}^*F$ для всех $N \geq N_0$ и при этом $h_N \approx h'$. Зафиксируем стандартное положительное число $\varepsilon > 0$. Тогда имеем, что для каждого $N \geq N_0$, $N \in {}^*N$ найдется h_N, для которого $|h_N - h'| \leq \varepsilon$. Таким образом возникает внутренняя последовательность $(h_N - h')$ элементов шара $\varepsilon {}^*B$. По принципу Лейбница этот шар компактен в ${}^*R^m$. Следовательно, найдется внутренняя последовательность $(N(k))$ гипернатуральных чисел такая, что $(h_{N(k)})$ сходится к некоторому вектору $\bar{h}$. При этом выполнено $|h' - \bar{h}| \leq \varepsilon$ и, кроме того, $x_{N(k)} + \alpha_{N(k)} h_{N(k)} \in {}^*F$ при $k \in {}^*N$.

Итак, установлено, что для фиксированных внутренних последовательностей (x_N) и (α_N) с отмеченными выше свойствами для каждого стандартного $\varepsilon > 0$ существуют внутренняя последовательность индексов $(N(k))$ и внутренняя последовательность (h_k), сходящаяся к $\bar{h}$ и такая, что $|\bar{h} - h'| \leq \varepsilon$ и $x_{N(k)} + \alpha_{N(k)} h_k \in {}^*F$ при всех $k \in {}^*N$. Используя принцип направленности в сильной форме [7], видим, что имеются внутренняя последовательность индексов $(N(k))$ и внутренняя последовательность векторов (h_k), сходящаяся к h'' и такая, что, с одной стороны, $x_{N(k)} + \alpha_{N(k)} h_k \in {}^*R$ при всех $k \in N$, а с другой $-|h'' - \bar{h}| \leq \varepsilon$ при каждом стандартном строго положительном ε. Иными словами, $h'' \approx h'$. Тем самым доказательство завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ. Относительно пределов конусов равномерных касательных см. недавнюю работу Б.Корне [8].

ЛИТЕРАТУРА

I. Hiriart-Urruty J.-B. Tangent cones, generalized gradients and mathematical programming in Banach spaces // Math. Oper. Rec. - 1979.- V.4, NI.- P.79-97.

2. Thibault L. Mathematical programming and optimal control problems defined by compactly Lipschtzian mappings // Preprint. Depar. Math. Univ. Pau, France, 1979. - 58 p.

3. Кутателадзе С.С. Инфинитезимальные касательные конусы// Сиб. мат. журн.- 1985. - Т.26, № 6. - С.67-76.

4. Penot J.P. A characterization of tangential regularity // Nonlinear analysis. - 198I. - V.3, №6. - P.625-643.

5. Aubin J.-P. Lipschitz behavior of solutions to convex minimization problem // Math. Oper. Res. - 1984. - V.9, N I. - P.87-III.

6. Кутателадзе С.С. Нестандартные замечания о пределах надграфиков // Оптимизация. - 1986. - Вып. 37(54). - С.28-32.

7. Кутателадзе С.С. Теоретико-множественное обоснование нестандартного анализа. - Новосибирск: изд. НГУ, 1986.

8. Cornet B. Regularity properties of open tangent cones // Math. Programming Study. - 1987. - P.17-33.

Поступила в ред.-изд. отдел
22.06.1987 г.