Модели динамики и равновесия

УДК 519.86

О СОГЛАСОВАННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ С ДВУМЯ ВИДАМИ ЦЕН

В.А.Васильев

Настоящая работа является развернутым изложением некоторых результатов из [1-3]. Предметом исследования являются согласованные распределения одной модели взаимодействия рыночного механизма и механизма рационирования, предложенной В.Л. Макаровым [1]. Устанавливаются условия существования и коалиционной устойчивости этих распределений, дается внутренняя характеризация ассоциированных с ними равновесных состояний. Особое внимание уделяется модифицированным формам основного суммарного дохода, обеспечивающим более тесную (по сравнению с [1,2]) связь согласованных распределений и нечеткого ядра. Как и в [2,3], главным инструментом исследования вопросов существования является лемма Гейла – Никайдо – Дебре.

1. Рассматриваемая модель взаимодействия механизма рационирования (в сфере потребления) и рыночного механизма задается с помощью следующей информации:

$$\mathcal{E} = \langle N, \{X_i', X_i'', Y_i, Z_i, \alpha_i, \beta_i, d_i, w^i\}_N, q, Q\rangle, \quad (1)$$

где $q \in \mathbb{R}^\ell$ – фиксированный вектор цен, $Q \subseteq \mathbb{R}^\ell$ – множество допустимых (гибких) цен, $X_i' \subseteq \mathbb{R}^\ell$ – совокупность потребительских наборов, доступных участнику $i \in N$ по фиксированным (жестким) ценам q, $X_i'' \subseteq \mathbb{R}^\ell$ – множество потребительских наборов, доступных для этого участника по гибким ценам из Q, $Y_i \subseteq \mathbb{R}^\ell$ – производственное множество участника $i \in N$, а $Z_i \subseteq X_i' \times X_i'' \times Y_i$ – множество допустимых для него состояний. Далее, как обычно, через $\alpha_i \subseteq Z_i \times Z_i$ и $w^i \in \mathbb{R}^\ell$ обозначаются бинарное отношение предпочтения и начальные запасы участника

$i \in N$, а через $d_i : Y_i \times Q \to R$ – его функция (основного) дохода. Наконец, через $\beta_i : Y_i \to X_i'$ обозначены функции рационирования участников $i \in N$, определяющие максимально возможные объемы потребления по жестким ценам q.

В дальнейшем, наряду с символами y^i, Y_i, используются обозначения $y^{(i)} = y^i + w^i$, $Y_{(i)} = Y_i + w^i$, относящиеся к заданию производственных возможностей участников модели (I) с учетом их начальных запасов.

Как видно из описания модели, в ней предполагается наличие двух рынков продуктов. На одном из них действуют жесткие (стабильные) цены q и механизм рационирования, устанавливающий зависимость между уровнем производственной активности и объемом потребляемых на этом рынке продуктов, а на другом цены устанавливаются с помощью механизма уравнивания спроса и предложения в рамках возможностей, предоставляемых множеством Q.

Переходя к определению бюджетных множеств участников, повторим еще раз, что функции d_i характеризуют лишь основной доход, определяемый ценами $p \in Q$ и уровнем производственной активности $y^i \in Y_i$. Что касается полного (суммарного) дохода, которым располагает экономический агент $i \in N$ для потребления интересующих его продуктов, то этот доход складывается из основного $d_i(y^i, p)$ и дополнительного $(p-q)^+ \cdot (\beta_i(y^i) - x'^i)$, где, как и ранее, z^+ – положительная вариация вектора z $(z_k^+ = max\{z_k, 0\})$. Другими словами, предполагается, что в случае, когда $p_k > q_k$, каждый из участников полностью выкупает на первом рынке причитающийся ему максимальный объем $\beta_{ik}(y^i)$ продукта k по фиксированной цене q_k, а излишек (по сравнению с его действительной потребностью $x_k'^i$) реализует по цене p_k на втором рынке.

В соответствии с вышесказанным, бюджетные множества $B_i^q(p)$ участников $i \in N$ при ценах $p \in Q$ определяются следующим образом:

$$B_i^q(p) = \{(x'^i, x''^i, y^i) \in Z_i(\beta) \,|\, q \cdot x'^i + p x''^i \leq \bar{d}_i(x'^i, y^i, p)\}, \qquad (2)$$

где

$$Z_i(\beta) = \{(x'^i, x''^i, y^i) \in Z_i \,/\, x'^i \leq \beta_i(y^i)\},$$

$$\bar{d}_i(x'^i, y^i, p) = d_i(y^i, p) + (p-q)^+ \cdot (\beta_i(y^i) - x'^i).$$

В дальнейшем, наряду с бюджетными отображениями $p \mapsto B_i^q(p)$,

рассматриваются также отображения спроса $p \mapsto \mathcal{D}_i^q(p)$ и приведенного избыточного спроса $p \mapsto E_i^q(p)$, определяемые по формулам

$$\mathcal{D}_i^q(p)=\{z^i \in B_i^q(p) / \mathcal{P}_i(z^i) \cap B_i^q(p) = \emptyset\},$$

$$E_i^q(p)=\{x^i \in \mathbb{R}^\ell / \exists (x'^i, x''^i, y^i) \in \mathcal{D}_i^q(p) [x^i = x'^i + x''^i - y^i]\},$$

где $\mathcal{P}_i(z^i)=\{z^i \in Z_i(\beta) / (z^i, \bar{z}^i) \in \alpha_i, (\bar{z}^i, z^i) \notin \alpha_i\}$.

Обозначим через $Z_e(N)=Z(N)$ множество всех состояний $z=(x'^i, x''^i, y^i)_N \in \prod_N Z_i(\beta)$, удовлетворяющих условию материального баланса: $\sum_N (x'^i + x''^i) = \sum_N (y^i + w^i)$. Состояния из $Z(N)$ будем называть сбалансированными распределениями модели $\mathcal{E}$.

В принятых обозначениях понятие согласованного распределения в $\mathcal{E}$ формулируется следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Состояние $\bar{z} \in Z(N)$ называется согласованным распределением, если существует вектор цен $\bar{p} \in Q$ такой, что $\bar{z}^i \in \mathcal{D}_i^q(\bar{p})$, $i \in N$.

Множество согласованных распределений модели $\mathcal{E}$ будем обозначать через $W^q(\mathcal{E})$.

Вектор $\bar{p}$, фигурирующий в определении I, будем называть согласованными ценами модели $\mathcal{E}$ (ассоциированными с распределением $\bar{z}$). Непосредственно из определения I явствует, что согласованные цены являются нулями точечно-множественного отображения $E^q(p)=\sum_N E_i^q(p)$, $p \in Q$.

Прежде чем переходить к детальному изучению разрешимости включения $0 \in E^q(p)$, приведем некоторые соображения, касающиеся возможных применений рассматриваемой модели и ее места среди других моделей рационирования.

Замечание I. Помимо самостоятельного значения, модели типа (I) представляют большой интерес при анализе рыночных модификаций неэффективных экономических механизмов. Приведем простой пример. Известно [2], что в моделях рационирования в сфере потребления

$$\tilde{\mathcal{E}}=\langle N, \{X_i, Y_i, u_i, \beta_i, w^i\}_N \rangle, \qquad (3)$$

где все компоненты, включая функции полезности $u_i : X_i \times Y_i \to \mathbb{R}$, определяющие предпочтения участников, и функции рационирования $\beta_i : Y_i \to X_i$ имеют тот же смысл, что и в (I), решения $(\bar{x}^i, \bar{y}^i)$ экстремальных задач $u_i(x_i, y_i) \to max$ при $x^i \leqslant \beta_i(y^i)$, за исключением специальных случаев, не образуют Па-

рето-оптимальных сбалансированных распределений. Один из вариантов перестройки модели (3), обеспечивающий искомую эффективность, заключается в следующем. Наряду с потреблением рационируемых продуктов, на которые вводятся стабильные цены q, в рамках тех же потребительских множеств X_i организуется свободная торговля товарами, потребляемыми сверх рациона. В обозначениях этого параграфа соответствующие потребительские множества и множества допустимых состояний приобретают вид

$$X_i' = X_i\,, \quad X_i'' = X_i - X_i\,,$$

$$Z_i = \{(x'^i, x''^i, y^i) \in X_i' \times X_i'' \times Y_i \,/\, x'^i \leq \beta_i(y^i),\ x'^i + x''^i \in X_i\}.$$

Кроме того, вводится гибкая система оплаты труда (функции основного дохода) $d_i : Y_i \times Q \to \mathbb{R}$, а функции полезности $\tilde{u}_i : Z_i \to \mathbb{R}$ определяются по формулам $\tilde{u}_i(x'^i, x''^i, y^i) = u_i(x'^i + x''^i, y^i)$. В итоге получается модель типа (I):

$$\mathcal{E} = \langle N, \{X_i', X_i'', Y_i, \tilde{u}_i, \beta_i, d_i, w^i\}_N, q, Q\rangle, \quad (\text{Ia})$$

являющаяся расширением исходной модели (3). Важной чертой моделей (3) и (Ia) является сопоставимость, проявляющаяся, в частности, в том, что их эффективные распределения в некотором естественном смысле совпадают. Именно, каждому распределению $(x^i, y^i)_N$ модели (3), удовлетворяющему условию материального баланса $\sum_N x^i = \sum_N (y^i + w^i)$, соответствует сбалансированное распределение $(\beta_i(y^i), x^i - \beta_i(y^i), y^i)_N$ модели (Ia). Имеет место и обратное вложение: сбалансированному распределению $(x'^i, x''^i, y^i)_N$ модели (Ia) соответствует сбалансированное распределение $(x'^i + x''^i, y^i)_N$ модели (3). В силу устройства функций $\tilde{u}_i$ вышесказанное означает совпадение границ Парето рассматриваемых моделей в критериальном пространстве $\mathbb{R}^N$. Забегая вперед (см. далее п.2), отметим, что при выполнении надлежащих требований относительно d_i все согласованные распределения модели $\mathcal{E}$ являются Парето-оптимальными. Стало быть, и порождаемые ими распределения исходной модели (3) тоже эффективны.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Главное отличие изучаемой модели от исследовавшихся ранее схем рационирования (см. [4], где имеется обширная библиография) состоит именно в учете взаимодействия (симбиоза) двух различных рынков - рационируемого и гибкого. Далее, рассматриваемые в модели (I) максимальные рационы чувст-

вительны к производственной активности (β_i есть функция из Y в X_i' , а не константа, как, например, в [4]). Наконец, весьма специфический, нетрадиционный вид имеют ограничения на гибкость цен из Q . Ввиду неоднородности по p левой части бюджетных неравенств (2) множество Q определяет не только пропорции обмена, но и фиксирует "масштаб" гибких цен относительно q . Например, в случае, когда Q является положительной частью единичной сферы в l_1 , а q строго положителен, соответствующие ограничения принимают вид: $p_k / q_k \leq 1/q_k$.

2. Сформулируем одно из главных требований, обеспечивающих существование и эффективность согласованных распределений. Это требование имеет форму (слабого) закона Вальраса, устанавливающего границу и структуру суммарной стоимости потребляемых в рассматриваемой модели благ.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ I. Для всех $p \in Q$ и $y=(y^i)_N \in \prod_N Y_i$ справедливы неравенства

$$\sum_N d_i(y^i, p) \geq q \cdot \sum_N \beta_i(y^i) + p \cdot \left[\sum_N (y^{(i)} - \beta_i(y^i))\right]. \qquad (4)$$

Согласно условию (4) при ценах $p \in Q$ и уровне производственной активности $(y^i)_N \in Y = \prod_N Y_i$ экономические агенты располагают суммарным основным доходом, гарантирующим приобретение максимально возможного суммарного объема рационируемых благ $\sum_N \beta_i(y^i)$ по стабильным ценам q и приобретение оставшейся части произведенных продуктов и начальных запасов $\sum_N (y^i + w^i) - \sum_N \beta_i(y^i)$ по гибким ценам p .

Покажем, что предположение I обеспечивает Парето-оптимальность согласованных распределений. Ввиду нетрадиционности рассматриваемой модели, приведем сначала соответствующее формальное определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Сбалансированное распределение $z=(z^i)_N$ будем называть Парето-оптимальным (эффективным), если не существует другого распределения $\tilde{z}=(\tilde{z}^i)_N \in Z(N)$ такого, что $\tilde{z}^i \in \mathcal{P}_i(z^i)$ для всех $i \in N$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть модель $\mathcal{E}$ удовлетворяет предположению I. Тогда каждое распределение из $W^q(\mathcal{E})$ является Парето-оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольное согласованное

распределения $\bar{Z}=(\bar{x}^{i'},\bar{x}^{i''},\bar{y}^{i})_N$ и допустим, что существует сбалансированное распределение $z=(x^{i'},x^{i''},y^{i})_N$, удовлетворяющее условию: $z^{i}\in\mathcal{P}_i(\bar{z}^{i})$ для всех $i\in N$. Согласно определению для согласованных цен $\bar{p}\in Q$, ассоциированных с $\bar{Z}$, выполняются неравенства

$$q\cdot x^{i'}+\bar{p}\cdot x^{i''}>d_i(y^{i},\bar{p})+(\bar{p}-q)^{+}\cdot(\beta_i(y^{i})-x^{i'}),\ i\in N.$$

Суммируя эти неравенства и осуществляя элементарные преобразования, получаем

$$\bar{p}\cdot\sum_N(x^{i'}+x^{i''})>(\bar{p}-q)^{+}\cdot\sum_N\beta_i(y^{i})+[(\bar{p}-q)-(\bar{p}-q)^{+}]\cdot\sum_N x^{i'}+$$

$$+\sum_N d_i(y^{i},\bar{p})=(\bar{p}-q)^{+}\cdot\sum\beta_i(y^{i})-(\bar{p}-q)^{-}\cdot\sum_N x^{i'}+\sum_N d_i(y^{i},\bar{p}),$$

где, как и ранее, $z_k^{-}=max\{-z_k,0\}$, $k=1,\ldots,\ell$. Отсюда, учитывая сбалансированность распределения z и неотрицательность вектора $(\bar{p}-q)^{-}$, имеем

$$\sum_N d_i(y^{i},\bar{p})<\bar{p}\cdot\sum_N y^{(i)}-(\bar{p}-q)\cdot\sum_N\beta_i(y^{i}).$$

Но это неравенство противоречит предположению I. Таким образом, $\bar{Z}$ - Парето-оптимальное распределение, что и требовалось установить.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Как видно из доказательства, предложение I остается справедливым и в том случае, когда неравенства (4) выполняются лишь для согласованных цен. В такой форме предположение I близко к необходимому условию эффективности распределений из $W^{q}(\varepsilon)$.

Переходя к выяснению условий непустоты $W^{q}(\varepsilon)$, введем некоторые вспомогательные обозначения. Для каждого $p\in Q$ положим

$$B_N^{q}(p)=\prod_N B_i^{q}(p),$$

$$B_N(p)=\{(x^{i'},x^{i''},y^{i})\in\prod_N Z_i(B)\,/\,p\cdot\sum_N(x^{i'}+x^{i''})\le p\cdot\sum_N y^{(i)}\}.$$

Всюду в дальнейшем для простоты предполагается, что бинарные отношения предпочтения $\prec_i$ определяются функциями полезности u_i: $z^{i}\prec_i\tilde{z}^{i}\Longleftrightarrow u_i(z^{i})\le u_i(\tilde{z}^{i})$, $z^{i},\tilde{z}^{i}\in Z_i$. Кроме того, в качестве множества Q рассматривается положительная часть единичного шара $Q_1=\{p\in\mathbb{R}^{\ell}/\sum_{k=1}^{\ell}|p_k|\le 1\}$:

$$Q=\{p\in\mathbb{R}^{\ell}_{+}\mid \sum_{k=1}^{\ell} p_k \le 1\}.$$

Как обычно, через S будем обозначать положительную часть единичной сферы в норме ℓ_1 : $S=\{p\in\mathbb{R}^{\ell}_{+}\mid \sum_{k=1}^{\ell} p_k = 1\}$.

Среди требований, обеспечивающих применимость леммы Гейла – Никайдо – Дебре [5,6] к точечно-множественному отображению $p\mapsto E^q(p)\ (p\in Q)$, особое значение имеет следующее.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. Для любых $p\in S$ и $z=(z^i)_N\in B^q(p)$ найдется состояние $\tilde z=(\tilde z^i)_N\in B_N(p)\cap B^q(p)$ такое, что $u_i(\tilde z^i)\ge u_i(z^i)$, $i\in N$.

Нетрудно видеть, что с формальной точки зрения предположение 2 эквивалентно одному из условий упоминавшейся леммы Гейла – Никайдо – Дебре:

$$\forall p\in S\ \exists z\in E^q(p)\,[p\cdot z \leqq 0]. \tag{5}$$

В содержательном же плане это предположение означает, что при любых гибких ценах $p\in S$ имеется сколь угодно хороший, сбалансированный по этим ценам выбор в рамках множества $B^q(p)$.

Отметим некоторые простейшие ситуации, в которых заведомо выполняется предположение 2. Одна из них состоит в том, что при всех $i\in N$ векторы $\beta_i(y^i)$ принадлежат так называемой нижней границе Парето $\underline{\theta}(X_i')$ множества X_i' ($\underline{\theta}(X_i')=\{x\in X_i'\mid y\le x,\ y\in X_i' \Rightarrow y=x\}$). При этом предполагается, что функции d_i удовлетворяют закону Вальраса в форме равенства

$$\sum_N d_i(y^i,p)=q\cdot\sum_N \beta_i(y^i)+p\cdot\Big[\sum_N y^{(i)}-\sum_N \beta_i(y^i)\Big]. \tag{6}$$

В другой ситуации модель $\mathcal{E}$ характеризуется тем, что функции основного дохода участников имеют вид

$$d_i(y^i,p)=q\cdot\beta_i(y^i)+p\cdot[y^{(i)}-\beta_i(y^i)], \tag{7}$$

а функции полезности u_i зависят лишь от суммы $x''+x'''$ переменных x'', x'''. Кроме того, предполагается, что для любых $p\in S$ и $(x''^i,x'''^i,y^i)\in B_i^q(p)$ существует $\tilde y^i\in Y_i$ такой, что $(\beta_i(\tilde y^i),\ x''^i+x'''^i-\beta_i(\tilde y^i),\ \tilde y^i)\in Z_i$ и при этом $\bar p\cdot(x''^i+x'''^i)\leqq\bar p\cdot\tilde y^{(i)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Последний случай наиболее характерен для моделей типа (Iа), рассматривавшихся в предыдущем пункте в связи с расширением моделей "чистого" рационирования.

Сформулируем некоторые дополнительные условия, позволяющие, наряду с предположениями I,2, обеспечить разрешимость включе-

ния $\mathbb{0} \in E^q(p)$. Для каждого $i \in N$ и $y^i \in Y_i$ положим $X_i'(y^i) = \{x''^i \in X_i' \mid x''^i, \mathbb{0}, y^i) \in Z_i(\beta)\}$ и через $d_{(i)}$, δ_i и δ_i^o обозначим функции, определяемые по формулам

$$d_{(i)}(y^i, p) = d_i(y^i, p) + (p - q)^+ \cdot \beta_i(y^i),$$

$$\delta_i(y^i, p) = \inf\{p \vee q \cdot x''^i + p \cdot x'''^i \mid (x''^i, x'''^i, y^i) \in Z_i(\beta)\},$$

$$\delta_i^o(y^i, p) = \inf\{q \cdot x''^i \mid x''^i \in X_i'(y^i)\},$$

где, как обычно, $(p \vee q)_k = \max\{p_k, q_k\}$, $k = 1, \ldots, \ell$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3. Для любых $i \in N$ и $p \in Q$ существует $y^i \in Y_i$ такой, что

$$d_{(i)}(y^i, p) \geq \delta_i(y^i, p), \tag{8}$$

причем для $p \in S$ неравенство строгое.

Учитывая, что бюджетные множества $B_i^q(p)$ могут быть представлены в виде

$$B_i^q(p) = \{(x''^i, x'''^i, y^i) \in Z_i(\beta) \mid p \vee q \cdot x''^i + p \cdot x'''^i \leq d_{(i)}(y^i, p)\},$$

имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если для модели $\mathcal{E}$ выполняется предположение 3, то $B_i^q(p) \neq \emptyset$ для всех $i \in N$ и $p \in Q$.

Жесткими, но содержательно более прозрачными аналогами требования (8) являются следующие условия "обеспеченности потребления по рационируемым продуктам":

$$\forall p \in Q \exists y^i \in Y_i [d_i(y^i, p) \geq \delta_i^o(y^i)], \tag{8а}$$

$$\forall p \in Q \exists y^i \in Y_i [d_{(i)}(y^i, p) \geq \inf\{p \vee q \cdot x''^i \mid x''^i \in X_i(y^i)\}]. \tag{8б}$$

Наконец, совсем простой вариант условия (8) для функций вида (7) можно сформулировать следующим образом:

$$\forall p \in Q \exists y^i \in Y_i [p \cdot \beta_i(y^i) \leq p \cdot y^{(i)}].$$

Разумеется, при этом предполагается, что состояние $(\beta_i(y^i), \mathbb{0}, y^i)$ принадлежит Z_i.

Переходя к условиям, имеющим , в основном, чисто технический характер, введем необходимые обозначения:

$$\tilde{Z}(N) = \{z \in \prod_N Z_i(\beta) \mid \sum (x''^i + x'''^i - y^{(i)}) \leq \mathbb{0}\},$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 4.(а) Для всех $i \in N$ множества X_i' выпуклы, замкнуты и ограничены снизу, а множества X_i'', Y выпуклы и компактны; (б) функции d_i, β_i и u_i непрерывны по совокупности аргументов; (в) для всех $i \in N$ и $k = 1, \ldots, \ell$ функции $d_{(i)}$, β_{ik} вогнуты по y_i, а функции u_i вогнуты по совокупности переменных; (г) существует $i_0 \in N$ такой, что $\tilde{Z}_{i_0}$ локально насыщено вверх по $x^{''i_0}$ *), причем u_{i_0} - строго возрастающая по $x^{''i_0}$; (д) для всех $i \in N$ и $z \in \tilde{Z}(N)$ множества $\mathcal{P}_i(z^i)$ не пусты.

Условие (д) означает, что существует участник, имеющий достаточно "большое" потребительское множество в гибких ценах, причем все продукты из этого множества для него желательны. Остальные требования предположения 4 имеют стандартный формальный и содержательный смысл.

Покажем, что сформулированные требования обеспечивают существование согласованных распределений.

ТЕОРЕМА I. Если модель $\mathcal{E}$ удовлетворяет условиям предположений I - 4, то $W^q(\mathcal{E}) \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем в рассмотрение приращенные бюджетные отображения и отображения квазиспроса

$$\tilde{B}_i^q(p) = \{z^i \in Z_i(\beta) \,|\, q \cdot x'^i + p \cdot x''^i \leq \bar{d}_i(x'^i, y^i; p) + \frac{1 - \|p\|_1}{n}\},$$

$$\tilde{\mathcal{D}}_i^q(p) = \{z^i \in \tilde{B}_i^q(p) \,|\, \mathcal{P}_i(z^i) \cap \tilde{B}_i'^q(p) = \emptyset\}, \quad p \in Q,$$

где через $\tilde{B}_i'^q(p)$ обозначается та часть элементов $z^i \in \tilde{B}_i^q(p)$, для которых определяющее соотношение выполняется как строгое неравенство: $q x'^i + p x''^i < \bar{d}_i(x'^i, y^i, p) + \frac{1 - \|p\|_1}{n}$. Далее, обозначим через $\tilde{E}^q(p)$ агрегированный избыточный квазиспрос при ценах p:

---

*) Т.е. $z = (x'^{i_0}, x''^{i_0}, y^{i_0}) \in \tilde{Z}_{i_0} \Longrightarrow (x'^{i_0}, x''^{i_0} + u, y^{i_0}) \in Z_{i_0}$ для всех $u \in \mathbb{R}_+^\ell$ таких, что $\|u\| < \delta(z)$.

$$E^q(p)=\{\sum_N(x'^i+x''^i-y^{(i)})|(x'^i,x''^i,y^i)\in\tilde{\mathcal{D}}_i^q(p),\ i\in N\}$$

и покажем, что в условиях теоремы многозначное отображение $p\mapsto\tilde{E}^q(p)$ ($p\in Q$) удовлетворяет всем требованиям леммы Гейла – Никайдо – Дебре [5,6] (при $P=\mathbb{R}^l_+$, $B=Q_1$). Действительно, предположение 3 обеспечивает непустоту множеств $\tilde{B}_i^q(p)$ при всех $p\in Q$, а условие (а) предположения 4 вместе с вогнутостью и непрерывностью функций u_i, β_i и γ_i гарантируют выпуклость и компактность множеств $\tilde{\mathcal{D}}_i^q(p)$. Таким образом, все множества $\tilde{E}^q(p)$ ($p\in Q$) непусты, выпуклы и компактны. Далее, ввиду компактности множеств X''_i, Y_i, ограниченности снизу X'_i и непрерывности функций β_i, объединение образов $\bigcup_{p\in Q}\tilde{E}^q(p)$ лежит в некотором компактном подмножестве $\mathbb{R}^l$. Поэтому для проверки полунепрерывности сверху соответствия $\tilde{E}^q$ достаточно убедиться в замкнутости его графика. Покажем, что в условиях теоремы замкнуты все многозначные отображения $p\mapsto\tilde{\mathcal{D}}_i^q(p)$, откуда в силу определения $\tilde{E}^q$ и будет вытекать искомая замкнутость этого соответствия. Рассмотрим произвольную сходящуюся последовательность $p_m\to p$ из Q и допустим, что $z_m\to z$, где $z_m\in\tilde{\mathcal{D}}_i^q(p_m)$ при всех $m=1,\ldots$ Ввиду непрерывности функции d_i имеем $z\in\in\tilde{B}_i^q(p)$. Допуская наличие $\tilde{z}\in\tilde{B}_i'^q(p)$, удовлетворяющего условию $u_i(\tilde{z})>u_i(z)$, на основании непрерывности функций u_i и d_i получаем $\tilde{z}\in\tilde{B}_i'^q(p_m)\cap\mathcal{P}_i(z_m)$ для всех достаточно больших m. Но последние соотношения противоречат предположению $z_m\in\tilde{\mathcal{D}}_i^q(p_m)$, $m=1,\ldots$ Таким образом, многозначные отображения $\tilde{\mathcal{D}}_i^q$ замкнуты, что и означает искомую замкнутость отображения $\tilde{E}^q$.

На основании вышесказанного и предположения 2, отображение $\tilde{E}^q$ удовлетворяет всем условиям леммы Гейла – Никайдо – Дебре. Применяя эту лемму, получаем: существуют $\bar{p}\in Q$, $\bar{x}'^i$, $\bar{x}''^i$ и $\Delta\in-\mathbb{R}^l_+$ такие, что

$$(\bar{x}'^i,x''^i,\bar{y}^i)\in\tilde{\mathcal{D}}_i^q(\bar{p}),\quad i\in N,\tag{9}$$

$$\sum_N(\bar{x}'^i+\bar{x}''^i-\bar{y}^{(i)})=\Delta\quad,\tag{10}$$

$$\bar{p}\cdot\Delta\leq 0.\tag{11}$$

Ясно, что ввиду ненасыщаемости предпочтений (условие (д) предположения 4) имеют место равенства

$$q\cdot\bar{x}''^{i}+\bar{p}\cdot\bar{x}'''^{i}=d_i(\bar{y}^i,\bar{p})+(\bar{p}-q)^+\cdot(\beta_i(\bar{y}^i)-\bar{x}''^i)+\frac{1-\|\bar{p}\|_1}{n}.$$

Последние (добавляя к каждой из частей $(\bar{p}-q)\cdot\bar{x}''^{i}$) можно переписать в следующем виде:

$$\bar{p}\cdot(\bar{x}''^{i}+\bar{x}'''^{i})=\left[d_{(i)}(\bar{y}^i,\bar{p})-(\bar{p}-q)^-\cdot x''^{i}\right]+\frac{1-\|\bar{p}\|_1}{n},\quad i\in N.$$

Суммируя получившиеся равенства и учитывая (I0) и предположение I, имеем

$$\bar{p}\cdot\sum_N\bar{y}^{(i)}+\bar{p}\cdot\Delta\geqslant\bar{p}\cdot\sum_N\bar{y}^{(i)}+\left[(q-\bar{p})\cdot\sum\beta_i(\bar{y}^i)+\right.$$

$$\left.+(\bar{p}-q)^+\cdot\sum_N\beta_i(\bar{y}^i)-(\bar{p}-q)^-\cdot\sum_N\bar{x}''^{i}\right]+(1-\|\bar{p}\|_1)=$$

$$=(1-\|\bar{p}\|_1)+\left[\bar{p}\cdot\sum_N y^{(i)}+(\bar{p}-q)^-\cdot\left(\sum_N\beta_i(y^i)-\sum_N\bar{x}''^{i}\right)\right].$$

Отсюда

$$(\bar{p}-q)^-\cdot\left[\sum_N(\beta_i(\bar{y}^i)-\bar{x}''^{i})\right]+1-\|\bar{p}\|_1\leq\bar{p}\cdot\Delta, \tag{I2}$$

Учитывая соотношение (II) и неотрицательность каждого из слагаемых в левой части неравенства (I2), получаем $\|\bar{p}\|_1=1$, $\bar{p}\cdot\Delta=0$ и, кроме того,

$$(\bar{p}-q)^-\cdot\left[\sum_N(\beta_i(\bar{y}^i)-\bar{x}''^{i})\right]=0. \tag{I3}$$

Поскольку $\|\bar{p}\|_1=1$, из определения $\widetilde{B}_i^q(p)$ вытекают включения: $\bar{z}\in B_i^q(p)$ $(i\in N)$. Покажем, что $\mathcal{P}_i(\bar{z}^i)\cap B_i^q(\bar{p})=\emptyset$ при всех $i\in N$. Допустим, что такое соотношение не выполняется для каких-либо $j\in N$. Поскольку $\bar{p}\in S$, в силу предположения 3 найдется элемент $a^j\in B_j^q(p)$ такой, что $a^j\in\widetilde{B}_j'^q(\bar{p})$. Но тогда, ввиду непрерывности u_j и вогнутости d_j при достаточно малом $t>0$ элемент $\bar{z}^j+t(a^j-\bar{z}^j)$ принадлежит пересечению $\mathcal{P}_j(\bar{z}^j)\cap\widetilde{B}_j'^q(\bar{p})$, что противоречит включению $\bar{z}^j\in\widetilde{D}_j^q(\bar{p})$.

Итак, $\bar{z}^i$ – максимальные элементы множеств $B_i^q(\bar{p})$. Для завершения доказательства теоремы I остается убедиться в том, что распределение $\bar{z}$ сбалансировано. С этой целью отметим, что ввиду условия (г) предположения 4 цены $\bar{p}_k$ строго положительны для всех $k=1,\dots,\ell$. Действительно, так как $\bar{p}\neq 0$, найдется индекс k, для которого $\bar{p}_k>0$. Допуская, что $\bar{p}_r=0$ $(r\neq k)$ и учитывая непрерывность и строгую монотонность u_{i_0} по переменным x'''^{i_0}, можно сконструировать состояние

$\tilde{z}^{i_0}=(\bar{x}^{\prime i_0},\bar{x}^{\prime\prime i_0}+\delta e^{r},\bar{y}^{i_0})$ такое, что $\delta > 0$ и $\tilde{z}^{i_0}\in\mathcal{P}_{i_0}(\bar{z}^{i_0})\cap B_i^q(\bar{p})$. Здесь e^r – соответствующий орт из $\mathbb{R}^{\ell}$, а δ^{i_0} достаточно мало, чтобы обеспечить включение $\tilde{z}^{i_0}\in Z_{i_0}$. Поскольку соотношение $\mathcal{P}_{i_0}(\bar{z}^{i_0})\cap B_i^q(\bar{p})\neq\emptyset$ противоречит максимальности $\bar{z}^{i_0}$ в $B_i^q(\bar{p})$, получим $\bar{p}\gg 0$. Отсюда, ввиду неположительности компонент вектора Δ и на основании равенства $\bar{p}\cdot\Delta=0$, имеем $\Delta=0$. Но это и означает сбалансированность распределения $\bar{z}$. Теорема I доказана.

Замечание 5. Использованная выше схема доказательства непустоты $W_q(\mathcal{E})$ проходит и для рассматривавшейся в [I] иной формы предположения I:

$$\sum_N d_i(y^i,p)=p\cdot\sum_N y^{(i)}-(p-q)^{\tau}\cdot\sum_N \beta_i(y^i),\ p\in Q,\ (y^i)_N\in Y$$

(при дополнительном требовании строгой монотонности функции u_i по переменным $x^{\prime i}$, $x^{\prime\prime i}$ и зависимости их лишь от суммы этих переменных). Упрощающим обстоятельством в этой ситуации является автоматическое выполнение предположения 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Как вытекает из равенства (I3), справедливого для всех состояний из $W^q(\mathcal{E})$ и в самом общем случае, для любого согласованного распределения $\bar{z}$ и ассоциированных с ним цен $\bar{p}$ выполняется достаточно естественное условие

$$q_k>\bar{p}_k\Rightarrow\forall i\in N[\bar{x}_k^{\prime i}=\beta_{ik}(\bar{y}^i)]. \qquad (I4)$$

Другими словами, если согласованная цена некоторого продукта оказалась ниже стабильной, никто из участников не занимается реализацией этого продукта на втором рынке.

Ясно, что свойство (I4) является следствием предположения I, гарантирующего суммарное потребление максимального объема рационируемых продуктов по стабильным ценам q.

3. Завершая этот параграф, рассмотрим условия, обеспечивающие не только эффективность, но и коалиционную устойчивость согласованных распределений. С этой целью сформулируем применительно к рассматриваемой ситуации понятия ядра и нечеткого ядра модели $\mathcal{E}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что коалиция $S\subseteq N$ блокирует распределение $z\in Z(N)$, если найдется $\tilde{z}\in Z(N)$ такое, что $u_i(\tilde{z}^i)>u_i(z^i)\ (i\in S)$, $\sum_S(\tilde{x}^{\prime i}+\tilde{x}^{\prime\prime i}-\tilde{y}^{(i)})=0$.

Множество сбалансированных распределений, не блокируемых никакой коалицией S, обозначим через $C^{\beta}(\mathcal{E})$ и будем называть ядром модели $\mathcal{E}$.

Далее наряду с обычными будем рассматривать и нечеткие коалиции $t=(t_1,\ldots,t_n)\in[0,1]^K\setminus\{\emptyset\}$. Естественным обобщением определения 3 является следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что нечеткая коалиция $t=(t_1,\ldots,t_n)$ блокирует распределение $z\in Z(N)$, если найдется состояние $\tilde{z}\in\prod_N Z_i(\beta)$ такое, что

$$u_i(\tilde{z}^i)>u_i(z^i),\ i\in \operatorname{supp} t, \tag{15}$$

$$\sum_N t_i(\tilde{x}^{\prime i}+\tilde{x}^{\prime\prime i})=\sum_N t_i\tilde{y}(i), \tag{16}$$

где $\operatorname{supp} t=\{i\,|\,t_i>0\}$.

Множество сбалансированных распределений, не блокируемых никакой нечеткой коалицией t, обозначим через $C_F^\beta(\mathcal{E})$ и будем называть нечетким ядром модели $\mathcal{E}$.

Выделим класс моделей, в которых согласованные распределения устойчивы относительно введенных коалиционных блокирований.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 5. Для всех $i\in N$, $p\in Q$ и $y^i\in Y_i$ справедливы неравенства

$$d_i(y^i,p)\geq q\cdot\beta_i(y^i)+p\cdot(y^{(i)}-\beta_i(y^i)). \tag{17}$$

Ясно, что условия (17) являются "индивидуализированной" формой предположения 1: не только совокупность N в целом, но и каждый из участников в отдельности располагает основным доходом, гарантирующим приобретение максимально возможного для него объема рационирумых благ по стабильным ценам q и покупку оставшейся части произведенных продуктов по гибким ценам p.

ТЕОРЕМА 2. Если модель $\mathcal{E}$ удовлетворяет предположению 5, то каждое согласованное распределение является элементом нечеткого ядра $C_F^\beta(\mathcal{E})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для проверки справедливости вложения

$$W^q(\mathcal{E})\subseteq C_F^\beta(\mathcal{E}) \tag{18}$$

рассмотрим произвольное распределение $z\in W^q(\mathcal{E})$ и допустим, что оно блокируется некоторой нечеткой коалицией $t=(t_1,\ldots,t_n)$. Согласно определению 4, найдется состояние $\tilde{z}=(\tilde{x}^{\prime i},\tilde{x}^{\prime\prime i},\tilde{y}^i)_N\in\prod_N Z_i(\beta)$, для которого выполняются соотношения (15), (16). Поскольку $z\in W^q(\mathcal{E})$, из условия (15) вытекают неравенства

$$q\cdot\tilde{x}^{\prime i}+p\cdot\tilde{x}^{\prime\prime i}>d_i(\tilde{y}^i,p)+(p-q)^T\cdot(\beta_i(\tilde{y}^i)-\tilde{x}^{\prime i}),\ i\in\operatorname{supp} t,$$

где p - согласованные цены, отвечающие распределению z. Умножая каждое из этих неравенств на соответствующую компоненту вектора t и суммируя получившиеся соотношения, с учетом предположения 5, имеем $q\cdot\sum_N t_i\tilde{x}^{\prime i}+p\cdot\sum_N t_i\tilde{x}^{\prime\prime i}>q\cdot\sum_N t_i\beta_i(\tilde{y}^i)+ +p\cdot\sum_N t_i(\tilde{y}^i-\beta_i(\tilde{y}^i))+(p-q)^+\cdot\sum_N t_i(\beta_i(\tilde{y}^i)-\tilde{x}^{\prime i})$. Добавляя к каждой из частей величину $(p-q)\cdot\sum_N t_i\cdot\tilde{x}^{\prime i}$, получившееся неравенство можно переписать в следующем виде:

$$p\cdot\sum_N t_i(\tilde{x}^{\prime i}+\tilde{x}^{\prime\prime i})>p\cdot\sum_N t_i\tilde{y}^{(i)}+(p-q)^-\cdot\sum_N t_i(\beta_i(\tilde{y}^i)-\tilde{x}^{\prime i}).$$

Отсюда, учитывая условие (I6), имеем $(p-q)^-\cdot\sum_N t_i(\beta_i(\tilde{y}^i)-\tilde{x}^{\prime i})<0$, что противоречит неотрицательности вектора $(p-q)^-$ и неравенствам $\tilde{x}^{\prime i}\leq\beta_i(\tilde{y}^i)$, вытекающим из условия $\tilde{z}\in\prod_N Z_i(\beta)$.

Полученное противоречие и завершает доказательство вложения (I8).

СЛЕДСТВИЕ I. В условиях предположения 5 справедливо вложение $W^q(\mathcal{E})\subseteq\subseteq C^q(\mathcal{E})$.

Для того чтобы установить более тонкую верхнюю оценку множества согласованных распределений, рассмотрим ассоциированную с $\mathcal{E}$ "стандартную часть" этой модели

$$\mathcal{E}_0=\langle N,\{Z_i(\beta),u_i,w^i\}_N,Q\rangle.$$

Последняя отличается от $\mathcal{E}$ по двум пунктам: во-первых, на обоих рынках действуют гибкие цены $p\in Q$; во-вторых функции полного дохода имеют стандартный вид: $\bar{d}_i(x^{\prime i},y^i,p)=p\cdot y^i+p\cdot w^i$. Множество сбалансированных распределений в этой модели совпадает с множеством сбалансированных распределений модели (I), а бюджетные множества $B_i(p)$ имеют вид:

$$B_i(p)=\{z^i\in Z_i(\beta)\,/\,p\cdot(x^{\prime i}+x^{\prime\prime i})\leq p\cdot y^{(i)}\},\quad i\in N.$$

Соответствующее изменение претерпевает и понятие "согласованности".

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Распределение $\bar{z}\in Z(N)$ называется равновесным распределением модели $\mathcal{E}_0$, если существует вектор цен $\bar{p}\in Q$ такой, что $\bar{z}^i\in B_i(\bar{p})$ для всех $i\in N$ и при этом выполняются соотношения: $B_i(p)\cap\mathcal{P}_i(\bar{z}^i)=\phi$, $i\in N$.

Множество равновесных распределений модели $\mathcal{E}_0$ будем обозначать через $W(\mathcal{E}_0)$.

Как обычно, будем говорить, что предпочтения u_i ненасыщаемы, если для всех $z\in Z(N)$ выполняются соотношения: $\mathcal{P}_i(z^i)\neq\phi$, $i\in N$.

ТЕОРЕМА 3.3. Если модель $\mathcal{E}$ удовлетворяет предположению 5 и при этом множества Z_i выпуклы, функции $d_{(i)}$ непрерывны, β_{ik} вогнуты, а u_i вогнуты и ненасыщаемы, то каждое согласованное распределение $\mathcal{E}$ является равновесным распределением модели $\mathcal{E}_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{z}$ – произвольный элемент множества $W(\mathcal{E})$, а $\bar{p}$ – отвечающие ему согласованные цены. Покажем, что в условиях теоремы 3 выполняются соотношения

$$\bar{z}^i \in B_i(\bar{p}),\ i \in N, \tag{19}$$

$$B_i(\bar{p}) \subseteq B_i^q(\bar{p}). \tag{20}$$

Действительно, нетрудно проверить, что для всех $i \in N$ справедливы равенства

$$q\bar{x}^{ii} + \bar{p}\bar{x}^{iii} = d_{(i)}(\bar{y}^i, \bar{p}) - (\bar{p}-q)^+ \cdot \bar{x}^{ii}. \tag{21}$$

Допуская противное для некоторого $i \in N$, ввиду включения $\bar{z}^i \in B_i^q(\bar{p})$, имеем $q\bar{x}^{ii} + \bar{p}\cdot\bar{x}^{iii} < d_{(i)}(\bar{y}^i, \bar{p}) - (\bar{p}-q)^+ \bar{x}^{ii}$. В силу ненасыщаемости u_i существует $\tilde{z}^i \in Z_i(\beta)$ такой, что $u_i(\tilde{z}^i) > u_i(\bar{z}^i)$. Далее, на основании вогнутости функций u_i и β_{ik} получаем : $z_\lambda^i = \bar{z}^i + \lambda(\tilde{z}^i - \bar{z}^i) \in Z_i(\beta)$, $u_i(z_\lambda^i) > u_i(\bar{z}^i)$ для всех $\lambda \in (0,1]$. Отсюда, учитывая непрерывность функции $d_{(i)}$, при достаточно малом $\lambda \in (0,1]$ имеем $z_\lambda^i \in B_i^q(\bar{p}) \cap \mathcal{P}_i(\bar{z}^i)$, что противоречит согласованности распределения $\bar{z}$.

Итак, для всех $i \in N$ выполняются равенства (21). Добавляя к обеим частям этих равенств величины $(\bar{p}-q)\cdot\bar{x}^{ii}$ и используя предположение 5, получаем

$$\bar{p}\cdot(\bar{x}^{ii} + \bar{x}^{iii}) \geq \bar{p}\cdot\bar{y}^{(i)} + (\bar{p}-q)^-(\beta_i(\bar{y}^i) - \bar{x}^{ii}),\ i \in N. \tag{22}$$

Суммируя эти неравенства и учитывая материальный баланс, устанавливаем соотношение: $(\bar{p}-q)^- \cdot \sum_N (\beta_i(\bar{y}^i) - \bar{x}^{ii}) \leq 0$. Отсюда, ввиду неотрицательности векторов $(\bar{p}-q)^-$, $\beta_i(\bar{y}^i) - \bar{x}^{ii}$, получаем $(\bar{p}-q)^- (\beta_i(\bar{y}^i) - \bar{x}^{ii}) = 0$ для всех $i \in N$. Но тогда, учитывая неравенства (22) и сбалансированность $\bar{z}$, имеем $\bar{p}\cdot(\bar{x}^{ii} + \bar{x}^{iii}) = \bar{p}\cdot\bar{y}^{(i)} (i \in N)$, что и доказывает включение (19).

Что касается соотношения (20), то, допуская справедливость неравенства $\bar{p}\cdot(x^{ii} + x^{iii}) \leq \bar{p}\cdot y^{(i)}$ для некоторого $(x^{ii}, x^{iii}, y^i) \in Z_i(\beta)$ в силу предположения 5 имеем $\bar{p}\cdot y^{(i)} \leq d_i(y^i, \bar{p}) + (\bar{p}-q)\beta_i(y^i)$. Отсюда, учитывая очевидное неравенство $(\bar{p}-q) \times \beta_i(y^i) \leq (\bar{p}-q)^+ \beta_i(y^i) - (\bar{p}-q)^- \cdot x^{ii}$, вытекающее из соотношения $x^{ii} \leq$

$\le \beta_i(y^i)$, имеем $\bar{p}\cdot y^{(i)} \le d_i(y^i,\bar{p}) + (\bar{p}-q)^+(\beta_i(y^i)-x^{\prime i}) + (\bar{p}-q)\cdot x^{\prime\prime i}$. Следовательно, на основании неравенства $\bar{p}\cdot(x^{\prime i}+x^{\prime\prime i}) \le \bar{p}\cdot y^{(i)}$, получаем

$$q x^{\prime i} + p x^{\prime\prime i} \le d_i(y^i;\bar{p}) + (\bar{p}-q)^+(\beta_i(y^i)-x^{\prime i}),$$

что и завершит проверку вложения (20).

Итак, ввиду (19), (20) справедливы соотношения $\bar{z}^i \in B_i(\bar{p})$, $B_i(\bar{p}) \cap P_i(\bar{z}^i) = \emptyset \quad (i \in N)$, что и означает искомую равновесность распределения $\bar{z}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Повторяя (с надлежащими упрощениями) аргументацию доказательства теоремы 2, можно показать, что для любой модели $\mathcal{E}$ справедливо вложение

$$W(\mathcal{E}_0) \subseteq C_F^*(\mathcal{E}). \tag{23}$$

Поэтому установленное в условиях теоремы 3 вложение

$$W^q(\mathcal{E}) \subseteq W(\mathcal{E}_0) \tag{24}$$

является более тонкой верхней оценкой множества $W^q(\mathcal{E})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Как видно из доказательства, теоремы 2,3 остаются справедливыми и в том случае, когда неравенства (17) выполняются лишь для согласованных цен. В таком виде предположение 5 близко к необходимому условию равновесности согласованных распределений.

В заключение приведем некоторые условия, при которых оценки (18) и (24) совпадают, а также укажем достаточно широкий класс моделей, согласованные распределения которых допускают исчерпывающую характеризацию в терминах нечеткого блокирования.

Введем обозначения

$$X_i(y^i) = \{x \in \mathbb{R}^\ell \mid \exists x^{\prime i}, x^{\prime\prime i}\, [(x = x^{\prime i} + x^{\prime\prime i}) \,\&\, ((x^{\prime i}, x^{\prime\prime i}, y^i) \in Z_i(\beta))]\},$$

$$\tilde{Y}_i = Pr_{Y_i}\, Z(N);$$

$$\tilde{Z}_i = Pr_{Z_i}\, Z(N).$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 6. Для всех $i \in N$ выполняются условия: (а) $X_i(y^i) \subseteq \mathbb{R}^\ell_+$ для любого $y^i \in \tilde{Y}_i$; (б) для любого ненулевого $x \in X_i(y^i)$ существует $\hat{x} \in X_i(y^i)$ такой, что $\hat{x} < x$; (в) для любого $(x^{\prime i}, x^{\prime\prime i}, y^i) \in \tilde{Z}_i$ существует окрестность

нуля U_0, для которой $(x^{li}, x^{lli}+u, y^i) \in Z_i(\beta)$ при всех $u \in U_0$ таких, что $x^{li}+x^{lli}+u \in \mathbb{R}^{\ell}_{+}$; (г) $Z_i(\beta)$ выпуклы и при этом $(\mathbb{0}, w^i, \mathbb{0}) \in Z_i(\beta)$, $w^i \neq \mathbb{0}$; (д) u_i непрерывные, вогнутые и строго возрастающие по x^{lli}; (е) $\sum_N \tilde{Y}_i \subseteq \operatorname{int} \mathbb{R}^{\ell}_{+}$.

Справедлива следующая кооперативная характеризация равновесных рапределений стандартной части модели $\mathcal{E}$.

ТЕОРЕМА 4. В условиях предположения 6 множество равновесных распределений модели $\mathcal{E}_c$ совпадает с нечетким ядром $C^{\beta}_{F}(\mathcal{E})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже отмечалось (замечание 7), включение $W(\mathcal{E}_0) \subseteq C^{\beta}_{F}(\mathcal{E})$ выполняется без каких-либо дополнительных предположений относительно модели $\mathcal{E}_0$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно убедиться в справедливости соотношения

$$C^{\beta}_{F}(\mathcal{E}) \subseteq W(\mathcal{E}_0). \qquad (25)$$

Рассмотрим произвольное распределение $\bar{z} \in C^{\beta}_{F}(\mathcal{E})$ и для каждого $i \in N$ определим множества

$$M_i(\bar{z}^i) = \{x^{li} + x^{lli} - y^{(i)} \mid z^i = (x^{li}, x^{lli}, y^i) \in Z_i(\beta),\ u_i(z^i) > u_i(\bar{z}^i)\}.$$

Далее положим $M(\bar{z}) = \operatorname{co} \bigcup_N M_i(\bar{z}^i)$. Ясно, что $M(\bar{z})$ не содержит нулевого вектора. Действительно, допуская противное и учитывая выпуклость множеств $M_i(\bar{z}^i)$, вытекающую из условий (г) и (д) предположения 6, имеем $\mathbb{0} = \sum_N \lambda_i \Delta z^i$, где $\lambda_i \geq 0$, $\sum_N \lambda_i = 1$, а $\Delta z^i = x^{li} + x^{lli} - y^{(i)}$ – некоторые элементы из $M_i(\bar{z}^i)$. Поскольку приведенное соотношение эквивалентно равенству $\sum_N \lambda_i (x^{li} + x^{lli}) = \sum_N \lambda y^{(i)}$, на основании определения множеств $M_i(\bar{z}^i)$ имеем: $\bar{z}$ блокируется нечеткой коалицией $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Но это противоречит исходному предположению $\bar{z} \in C^{\beta}_{F}(\mathcal{E})$.

Итак, $\mathbb{0} \notin M(\bar{z})$. Поскольку $M(\bar{z})$ выпукло, на основании теоремы отделимости найдется ненулевой вектор $\bar{p} \in \mathbb{R}^{\ell}$, такой, что

$$\bar{p} \cdot \Delta z \geq 0 \quad (\Delta z \in M(\bar{z})). \qquad (26)$$

В частности, $\bar{p} \cdot \Delta z^i \geq 0$ для всех $\Delta z^i \in M_i(\bar{z}^i)$. Учитывая, что $\bar{z} \in Z(N)$, из условий (а), (в) предположения 6 и из

строгой монотонности u_i по $x^{''i}$ предельным переходом получаем: $\bar{p}\cdot(\bar{x}^{'i}+\bar{x}^{''i}-\bar{y}^{(i)})\geq 0$ для всех $i\in N$. Последние неравенства вместе с условием $\sum_N(\bar{x}^{'i}+\bar{x}^{''i}-\bar{y}^{(i)})=\mathbb{0}$ означают справедливость соотношений

$$\bar{p}\cdot(\bar{x}^{'i}+\bar{x}^{''i})=\bar{p}\cdot(\bar{y}^{i}+w^{i}),\quad i\in N. \qquad (27)$$

Заметим теперь, что $\bar{p}\geq\mathbb{0}$. Действительно, в противном случае, еще раз учитывая включение $\bar{z}\in Z(N)$, а также условие (в) предположения 6 и строгую монотонность функций u_i по $x^{''i}$ на основании (27) можно получить противоречие с неравенствами (26). Покажем, что на самом деле вектор $\bar{p}$ строго положителен. Действительно, пусть $\bar{p}_k=0$ для некоторого k. Поскольку $\bar{p}\neq\mathbb{0}$, найдется t такое, что $\bar{p}_t>0$. Далее, в силу условия (е) найдется $i\in N$, для которого $(\bar{x}^{'i}+\bar{x}^{''i})_t>0$. Ввиду непрерывности u_i и условия (в) найдутся δ_1, $\delta_2>0$ такие, что $u_i(\bar{x}^{'i},\bar{x}^{''i}+\delta_1 e^k-\delta_2 e^t,\bar{y}^i)>u_i(\bar{z}^i)$. Отсюда, учитывая включение $\bar{z}^i\in B_i(\bar{p})$ и строгую положительность $\bar{p}_t$, получаем противоречие с (26).

Таким образом, $\bar{p}>>\mathbb{0}$. Зафиксируем некоторый элемент $i\in N$ и покажем, что $\bar{p}\cdot\Delta z^i>0$ для всех $\Delta z^i\in M_i(\bar{z}^i)$. Пусть Δz^i – произвольный элемент из $M_i(\bar{z}^i)$. На основании (26) имеем $\bar{p}\cdot\Delta z^i\geq 0$. Допуская, что $\bar{p}\cdot\Delta z^i=0$ и учитывая условия (а) и (г) предположения (6), не уменьшая общности, можем считать, что $x^{'i}+x^{''i}\neq\mathbb{0}$. Действительно, в силу непрерывности u_i и условия $w^i\neq\mathbb{0}$ при необходимости вместо $z^i=(x^{'i},x^{''i},y^i)$ можно взять подходящую выпуклую комбинацию $z^i+\lambda[(\mathbb{0},w,\mathbb{0})-z^i]$. Ввиду условия (б) найдется $\tilde{z}^i=(\tilde{x}^{'i},\tilde{x}^{''i},\tilde{y}^i)\in Z_i(\beta)$ такой, что $\tilde{x}^{'i}+\tilde{x}^{''i}<x^{'i}+x^{''i}$. Но тогда, в силу непрерывности u при достаточно малом $\lambda>0$ для элемента $z_0^i=z^i+\lambda(\tilde{z}^i-z^i)$ тоже выполняется неравенство $u_i(z_0^i)>u_i(\bar{z}^i)$, и при этом $x_0^{'i}+x_0^{''i}<x^{'i}+x^{''i}$. Последнее соотношение влечет неравенство $\bar{p}\cdot\Delta z_0^i<\bar{p}\cdot\Delta z^i$, что, ввиду $\bar{p}\cdot\Delta z^i=0$, противоречит условию (26).

Полученное противоречие вместе с равенствами (27) и показывает, что для всех $i\in N$ элементы $\bar{z}^i$ доставляют максимум функциям u_i на множествах $B_i(\bar{p})$. Следовательно, $\bar{z}\in W(\mathcal{E}_0)$, что и требовалось установить.

Отметим, что характеризация согласованных распределений, содержащаяся в теоремах 2–4, не зависит от конкретного вида правой части неравенств, определяющих бюджетное множество

$\beta_i^q(p)$. Поэтому дальнейшие уточнения верхней оценки $W^q(\mathcal{E}) \subseteq C_F^\beta(\mathcal{E})$ требуют дополнительной информации о ценах q, функциях основного дохода (оплаты труда) d_i и о некоторых других параметрах модели $\mathcal{E}$. Простейший пример уточнений такого рода дает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\mathcal{E}$ удовлетворяет условиям предположения 6, причем $d_i(y^i,p) = q\cdot\beta_i(y^i) + p(y^{(i)} - \beta_i(y^i))\,(i\in N)$ и $q \leq \bar{p}$ для всех равновесных цен $\bar{p}$ модели $\mathcal{E}_0$. Тогда справедливо равенство $W^q(\mathcal{E}) = C_F^\beta(\mathcal{E})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Макаров В.Л., Васильев В.А., Козырев А.Н., Маракулин В.М. О некоторых проблемах и результатах современной математической экономики // Оптимизация. - 1982. - Вып. 30(46).- С.5-86.
2. Макаров В.Л., Васильев В.А., Козырев А.Н., Маракулин В.М. Равновесие, рационирование и устойчивость // Оптимизация.- 1986. - Вып.38(55). - С.5-120.
3. Васильев В.А. Об одной модели взаимодействия гибких цен и механизма рационирования // Всесоюз. конф. по региональным проблемам экономики, организации и управления научно-техническим прогрессом: Тез. докл. - М., 1986. - С.61-64.
4. Канторович Л.В., Катышев П.К., Кирута А.Я., Полтерович В.М. О некоторых направлениях исследований в математической экономике // Современные проблемы математики. - Т.19 (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР). - М., 1982. - С.3-22.
5. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика.- М., Мир, 1972.
6. Васильев В.А. Модели экономического обмена и кооперативные игры. - Новосибирск: изд. НГУ, 1984.

Поступила в ред.-изд. отдел
15.II.1987 г.