УДК 51.330.115

АСИМПТОТИКА ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ МОДЕЛЕЙ, ЗАДАННЫХ РАЗЛОЖИМЫМИ СУПЕРЛИНЕЙНЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ

А.Ж.Жафяров

Для указанного вида моделей доказана теорема о магистрали в сильной форме, в которой существенно используется сходимость последовательности итераций суперлинейных отображений. Заметим, что связь между явлением сильной магистральности и сходимости последовательности итераций суперлинейных отображений к собственному множеству установил впервые В.Л.Макаров [1].

Пусть имеется совокупность S экономических ячеек (заводов, фирм, стран и т.д.) $N_1,\dots,N_S$ и S групп продуктов[ж)] $\Gamma_1,\dots,\Gamma_S$. Будем считать, что каждая ячейка N_i потребляет только продукты группы Γ_i, но может производить продукты групп $\Gamma_i, \Gamma_{i+1},\dots,\Gamma_S$. Все продукты группы Γ_i, производимые в экономических ячейках совокупности, в конце рассматриваемого промежутка времени поступают в ячейку N_i, $1\le i\le S$. Через b_{ji} обозначим технологическое отображение экономической ячейки N_i, описывающее производство продуктов группы Γ_j, $1\le i\le j\le S$. Тогда технология этой ячейки N_i определяется вектор-отображением $(0,\dots,b_{ii}, b_{i+1,i},\dots, b_{Si})$. Технологическое отображение b, характеризующее функционирование всей системы, состоящей из указанных S ячеек, представимо в виде:

ж) В работе используется терминология, принятая в [2].

$$b = \begin{pmatrix} b_1 & & & \\ b_{21} & b_2 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_s \end{pmatrix} \qquad (\mathrm{I})$$

Здесь $b_i = b_{ii}$, $1 \le i \le s$. Отображение b может быть линейным или суперлинейным. В первом случае представление матрицы линейного оператора в виде равенства (I) называют нормальным [3, с.372]. Если $s > 1$, то отображение b является разложимым.

Заметим, что отображение b называют неразложимым (в каждой точке $x \in R^+_n$) [4, с.228], если нельзя разделить все n продуктов на два взаимно-дополняющих не пустых подмножества так, что для всех номеров первого подмножества координаты $(x)^i$ и $(y)^i$ векторов x и y, $y \in b(x)$, равны нулю, а для всех номеров j второго подмножества координаты $(x)^j$ и $(y)^j$ положительны.

Не нарушая общности, в дальнейшем будем считать отображение b_i, $1 \le i \le s$, неразложимым.

Опишем годовой цикл модели Z, определяемой отображением b. Пусть $x_t = (x_t^1, \ldots, x_t^s)$ – состояние этой модели в начале года t, где x_t^i – набор продуктов группы Γ_i, характеризующий состояние экономической ячейки N_i, $1 \le i \le s$, $t = 0, 1, \ldots$ Тогда система в начале года $t+1$ переходит в состояние $x_{t+1} = (x^1_{t+1}, \ldots, x^s_{t+1})$, где $x^i_{t+1} = \sum\limits_{k \le i} b_{ik}(x_t^k)$, $1 \le i \le s$.

Таким образом, если x_t – состояние модели в момент t, то множество состояний этой модели в момент времени $t+1$ представимо в виде:

$$b(x_t) = (b_1(x_t^1),\ b_{21}(x_t^1) + b_2(x_t^2), \ldots, \sum_{k \le i} b_{sk}(x_t^k)). \qquad (2)$$

В дальнейшем важную роль играет следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Будем говорить, что индексы i и j, $1 \le i < j \le s$, имеют m-шаговую неотрицательную связь $\sigma_m = (b_{l_{f+1}, l_f})_{f=0}^{m-1}$, если $l_0 = i$, $l_m = j$ и $b_{l_{f+1}, l_f} \ne 0$, т.е. отображение b_{l_{f+1}, l_f} не является тождественным нулем для любого f, $0 \le f \le m-1$.

Содержательный смысл введенного понятия неотрицательной связи состоит в том, что оно описывает производственную связь экономических ячеек, т.е. поставки товаров из одной ячейки в другую. Если индексы i и j имеют m-шаговую ненулевую связь $\sigma_m=(b_{l_{f+1},l_f})_{f=0}^{m-1}$, то за m промежутков времени из продуктов x_t^i группы Γ_i производятся продукты группы Γ_j, причем за первый промежуток времени получаем продукты группы Γ_{l_1}, описываемые множеством $b_{l_1,i}(x_t^i)$, за второй промежуток времени – продукты группы Γ_{l_2}, описываемые множеством $b_{l_2,l_1}(b_{l_1,i}(x_t^i))=(b_{l_2,l_1}\circ b_{l_1,i})(x_t^i)$, и т.д., наконец, через m промежутков времени – продукты группы Γ_j, описываемые множеством $b_{j,l_{m-1}}\circ\ldots\circ b_{l_1,i})(x_t^i)$.

В этой работе не учитываются затраты, связанные с перевозкой продуктов из одной ячейки в другую, и время, необходимое на эти перевозки. Эти вопросы и другие важные проблемы, связанные с материально-техническим снабжением, подробно и обстоятельно исследованы в докторской диссертации С.А.Ашманова (см. также [5] и [6]).

Пусть α_i – неймановский темп роста [2, с.108] отображения b_i, $\alpha=\max\limits_{1\leq i\leq s}\alpha_i$; $\mathcal{J}(\alpha)=\{j\in\{1,\ldots,s\}:\alpha_j=\alpha\}$; $\bar{\mathcal{J}}(\alpha)=\{1,\ldots,s\}\setminus\mathcal{J}(\alpha)$; $\mathcal{J}^*$ – множество всех таких номеров множества $\bar{\mathcal{J}}(\alpha)$, каждое из которых имеет неотрицательную связь хотя бы с одним предшествующим ему индексом $j\in\mathcal{J}(\alpha)$.

На модель Z наложим следующие ограничения.

O_I) Для любого номера $j\in\mathcal{J}(\alpha)$ найдется телесный выпуклый компакт ξ_j, $\alpha\xi_j=b_j(\xi_j)$, такой, что имеет место равенство $\lim\limits_{t\to\infty}\alpha^{-t}b_j^t(x_0^j)=\mu_j(x_0^j)\,\xi_j$, где $x_0^j\in R_{n_j}^+$, $R_{n_j}^+$ – грань конуса R_n^+, натянутая на орты с теми номерами, какие имеют продукты группы Γ_j; $\mu_j: R_{n_j}^+\to R_1^+$ – аддитивная непрерывная функция, принимающая на ненулевых векторах положительные значения.

O_2) Любые два интекса множества $\mathcal{J}(\alpha)$ не имеют неотрицательной связи.

O_3) Для любого $i\in\mathcal{J}^*$ отображение b_i является примитивным.

Дадим краткую интерпретацию введенным ограничениям.

Ограничения O_I и O_2 обеспечивают существование предела

$\lim\limits_{t\to\infty} \alpha^{-t} b^t(x_0)$, без которого даже при $S=1$ теорема о магистрали в сильной форме не имеет места (соответствующие примеры приведены в [2, с.248]. Содержательный смысл ограничения O_2 состоит в том, что если индексы i и j, $i<j$, принадлежат множеству $\mathcal{J}(\alpha)$, то нет необходимости поступления товаров из ячейки N_i в N_j. Это естественно, так как нетрудно доказать, что, с одной стороны, α - темп роста экономики этих ячеек, а с другой - развиваться с темпом, большим α, не может ни одна ячейка системы.

Ограничение O_3 гарантирует возможность положительного выпуска продуктов из ненулевого вектора затрат при технологическом отображении b_i, $i \in \mathcal{J}^*$, что позволяет ячейке N_i развиваться с наибольшим для всей системы темпом роста α.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Модель Неймана - Гейла, определяемая отображением b вида (I) и удовлетворяющая ограничениям O_1–O_3, назовем моделью иерархической структуры. Обозначим ее через M.

Отметим наиболее важные свойства этой модели, являющиеся следствиями принятых ограничений. Предварительно введем следующие определения и обозначения.

Ячейку N_i, $1\le i\le S$, системы M назовем доминирующей, если $\alpha_i=\alpha$. Ячейку N_f, $1\le f\le S$, назовем ячейкой со слабой экономикой, если $\alpha_f<\alpha$. Число α назовем темпом роста ячейки N_i, $1\le i\le S$, если $\bar{x}^i>0$ для некоторого равновесного вектора $\bar{x}=(\bar{x}^1,\dots,\bar{x}^S)$, $\alpha\bar{x}\in b(\bar{x})$.

Пусть $\sigma_m=(b_{l_{f+1},l_f})_{f=0}^{m-1}$ - неотрицательная связь индексов $i=l_0$ и $j=l_m$. Если для любого f, $0\le f\le l_{m-1}$, $l_f\notin \mathcal{J}(\alpha)$, то через $K_{ji}(\sigma_m)$ обозначим отображение, определяемое равенством

$$K_{ji}(\sigma_m)=b_{j,l_{m-1}}(\alpha e-b_{l_{m-1}})^{-1}\dots b_{l_1,i}(\alpha e-b_i)^{-1}.$$

Сумму всех отображений $K_{ji}(\sigma_m)$, вычисленных по всем неотрицательным связям индексов i и j, $i<j$, обозначим через K_{ji}. Для любого $x_0^i\in R_{n_i}^+$ положим

$$\lambda_j(x_0^i)=\max_{y\in K_{ji}(x_0^i)} \mu_j(y),\quad j\in\mathcal{J}(\alpha),\quad i\in R(j),$$

где $R(j)$ - множество всех индексов i, $1\le i<j$, которые имеют неотрицательную связь с индексом j. Далее будем считать, что $R(1,j)=\{j\}\cup R(j)$, $j\in\mathcal{J}(\alpha)$. Для любого $i\in\mathcal{J}^*$

обозначим через $\mathcal{J}(i)$ множество всех индексов $j \in \mathcal{J}(\alpha)$, $1 \le j < i$, которые имеют неотрицательную связь с индексом i. Если $j \in \mathcal{J}(\alpha)$, $i \in \mathcal{J}^*$, $\sigma_m = (b_{l_{f+1}, l_f})_{f=0}^{m-1}$ – неотрицательная связь индексов j и i, $1 \le j < i \le S$, то множество $\xi_i(\xi_j, \sigma_m)$, определяемое формулой

$$\xi_i(\xi_j, \sigma_m) = (\alpha e - b_i)^{-1} b_{i, l_{m-1}} \ldots (\alpha e - b_{l_1})^{-1} b_{l_1, j} (\xi_j),$$

назовем множеством, порожденным выпуклым компактом ξ_j и связью σ_m. Множество $\xi_i(\xi_j, \sigma_m)$ является выпуклым телесным компактом конуса $R^+_{n_i}$. Если указанные индексы имеют несколько неотрицательных связей, то через ξ_{ij} обозначим множество

$$\xi_{ij} = \sum_{\sigma_m} \xi_i(\xi_j, \sigma_m).$$

Сформулируем основные свойства модели M.

СВОЙСТВО I. Число α является неймановским темпом роста:

а) модели M;

б) экономической ячейки N_i, $1 \le i \le S$, тогда и только тогда, когда $i \in \mathcal{J}^* \cup \mathcal{J}(\alpha)$;

в) всех экономических ячеек иерархической структуры M тогда и только тогда, когда $\mathcal{J}^* = \bar{\mathcal{J}}(\alpha)$.

СВОЙСТВО 2. Пусть отображение b нормально и выполнены ограничения 0_1–0_3. Тогда для любого $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^s) \in R^+_n$ последовательность итераций $(\alpha^{-t} b^t(x_0))$ сходится к множеству $\mathcal{Q}(x_0) = (\mathcal{Q}_1, \ldots, \mathcal{Q}_s)$, определяемому равенствами:

а) $\mathcal{Q}_j = (\mu_j(x_0^j) + \sum\limits_{i \in R(j)} \lambda_j(x_0^i)) \xi_j$, $j \in \mathcal{J}(\alpha)$;

б) $\mathcal{Q}_q = \sum\limits_{j \in \mathcal{J}(q)} (\mu_j(x_0^j) + \sum\limits_{i \in R(j)} \lambda_j(x_0^i)) \xi_{qj}$, $q \in \mathcal{J}^*$;

в) $\mathcal{Q}_i = 0$, $i \in \bar{\mathcal{J}}(\alpha) \setminus \mathcal{J}^*$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Здесь и далее для упрощения формул считаем, что $\mathcal{J}(\alpha) = \mathcal{J}(\alpha, x_0)$, где $\mathcal{J}(\alpha, x_0) = \{j \in \mathcal{J}(\alpha) : \mathcal{J}(x_0) \cap R(1, j) \ne \emptyset\}$, $\mathcal{J}(x_0) = \{i : x_0^i \ne 0,\ 1 \le i \le s\}$.

В противном случае вместо множеств $\mathcal{J}(\alpha)$ и $\mathcal{J}(q)$ следует рассматривать соответственно множества $\mathcal{J}(\alpha, x_0)$ и $\mathcal{J}(\alpha, x_0) \cap \mathcal{J}(q)$.

СВОЙСТВО 3. Пусть отображение b нормально и выполнены ограничения O_I–O_3. Тогда существует предел последовательности $(\alpha^{-t} b^t(x_0))$. Этот предел $\bar{b}(x_0) = (\bar{b}_{ij}(x_0^j))_{i,j=1}^{s}$ является суперлинейным отображением и определяется равенствами:

а) $\bar{b}_{jj}(x_0^j) = \bar{b}_j(x_0^j) = \mu_j(x_0^j)\xi_j$, $j \in \mathcal{J}(\alpha)$;

б) $\bar{b}_{ji}(x_0^i) = \lambda_j(x_0^i)\xi_j$, $j \in \mathcal{J}(\alpha)$, $i \in R(j)$;

в) $\bar{b}_{fj}(x_0^j) = \mu_j(x_0^j)\xi_{fj}$, $f \in \mathcal{J}^*$, $j \in \mathcal{J}(f)$;

г) $\bar{b}_{fi}(x_0^i) = \sum\limits_{j \in \mathcal{J}(f)} \lambda_j(x_0^i)\xi_{fj}$, $f \in \mathcal{J}^*$; $j \in \mathcal{J}(f)$, $i \in R(j)$, $1 \le i < j < f \le s$;

д) остальные составляющие отображения $\bar{b}$ – тождественные нули.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из свойства 3 как частный случай получается теорема А.Н.Колмогорова [7, с.10] о пределе степеней правильных стохастических матриц.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Свойства 2 и 3 доказываются с помощью лемм, аналогичных леммам 2–4, приведенным в [8].

Прежде чем сформулировать свойство 4, введем следующие обозначения. Из свойства 2 следует, что для начального состояния $x_0 \in R_n^+$ составляющая Ω_i множества $\Omega(x_0) = (\Omega_1, \ldots, \Omega_s)$, $\Omega(x_0) = \lim\limits_{t\to\infty} \alpha^{-t} b^t(x_0)$, либо равна нулю, либо представляет собой телесный выпуклый компакт конуса $R_{n_i}^+$. Обозначим $\xi = \xi(x_0) = \rho r_\Gamma\, \Omega(x_0)$, где Γ – грань конуса R_n^+, натянутая на орты всех граней $R_{n_i}^+$ с номерами i, для которых Ω_i представляет собой телесный выпуклый компакт в $R_{n_i}^+$. Пусть $c = b/_\Gamma$ – сужение отображения b на грань Γ. Положим

$$æ(\xi) = \{x \in \xi : \alpha^{-t} \|b^t(x_0)\|_\xi = 1,\ t = 0, 1, \ldots\},$$

где

$$\|b^t(x_0)\|_\xi = max\{\|y\|_\xi : y \in b^t(x_0)\},$$

$$\|x\|_\xi = inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda\xi\}.$$

Множество $æ(\xi)$ является непустым, замкнутым и состоящим из всех точек $x \in \xi$, из которых исходит хотя бы одна бесконечная ξ -оптимальная траектория. Траектория (x_t) называется [9, с.126] ξ -оптимальной, если $x_0 \in \xi$ и $\|x_t\|_{c^t(\xi)} = 1$ при всех t, $t = 0, 1, \ldots$

Через Γ_j^1 обозначим грань конуса R_n^+, натянутую на орты всех граней $R_{n_i}^+$ с номерами $i \in R(1, j)$.

СВОЙСТВО 4 (Теорема о магистрали в сильной форме). Пусть отображение β нормально и выполнены ограничения 0_1–0_3. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся натуральные числа L_1 и L_2 такие, что для каждой ξ-оптимальной траектории $\chi = (x_t)_{t=0}^T$, $T > L_1 + L_2$, модели M выполняется неравенство $\rho(\|y_t\|_\xi^{-1} y_t, æ(\xi)) < \varepsilon$ для всех значений t, $L_1 < t < T - L_2$, где $y_t = pr_\Gamma x_t$, $1 \leq t \leq T$, $\xi = \xi(x)$, $x_0 \in R_n^+$ – начальное состояние, из которого исходят оптимальные траектории.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть вектор $x_0 \in R_n^+$ такой, что для любого $j \in \mathcal{J}(\alpha)$ проекция $Pr_{\Gamma_1}(x_0) \neq 0$. Тогда в модели M для любого $\varepsilon > 0$ найдутся номера L_1 и L_2 такие, что для любой ξ-оптимальной траектории $\chi = (x_t)_{t=0}^T$, $T > L_1 + L_2$, исходящей из x_0, неравенство $\rho(\|y_t\|_\xi^{-1} y_t, æ(\xi)) < \varepsilon$ верно для всех t, $L_1 < t < T - L_2$, тогда и только тогда, когда $\mathcal{J}^* = \bar{\mathcal{J}}(\alpha)$.

Доказательство свойства 4. Полное доказательство свойства 4 слишком объемно, поэтому приведем лишь его схему. Для упрощения формул будем считать $\alpha = 1$.

1. Если множество $\mathcal{J}(x_0)$ содержит только элементы множества $\mathcal{J}(\alpha)$, то доказателство этого свойства ничем не отличается от доказательства теоремы 14.6 [9, с.129]. Заметим, что этот случай раскрывает лишь сущность влияния потока продуктов из доминирующих ячеек в ячейки со слабой экономикой. Из свойства 4 следует, что в этой ситуации все доминирующие ячейки и все подшефные ячейки (т.е. ячейки со слабой экономикой, но имеющие производственные связи с предшествующими им

доминирующими ячейками) стабильно развиваются с максимально возможным в модели M темпом роста.

Однако еще не исследован вопрос о влиянии потока продуктов из ячеек со слабой экономикой в доминирующие ячейки. Иначе говоря, предстоит доказать истинность свойства 4 для случая, когда $\mathcal{J}(x_0)$ содержит не только элементы множества $\mathcal{J}(\alpha)$.

2. Не нарушая общности, будем считать, что $\mathcal{J}(x_0)$ содержит элементы $R(1,j)$ только для одного номера $j \in \mathcal{J}(\alpha)$, причем хотя бы для одного номера $f \in R(j)$ вектор $x_0^f \neq 0$.

а) Имеют место равенства

$$\lim_{t\to\infty} c^t(z_0) = \lim_{t\to\infty} Pr_r\, b^t(x_0) = \xi(x_0) = \xi,$$

$$z_0 = (x_0^j + \sum_{i\in R(j)} K_{ji}(x_0^i),\ 0, \ldots, 0),$$

нули соответствуют граням $R^+_{n_i}$ с номерами $i \in \hat{R}(j)$, $\hat{R}(j)$ - множество всех номеров $i \in \mathcal{J}^{\dagger i}$, имеющих неотрицательную связь с j.

б) из соотношений $x_t = (x_t^1, y_t, x_t^3) \in \Delta^+ b^t(x_0) \to (0, \Delta^+\xi, 0)$ следует, что $y_t \in Pr_r\, \Delta^+ b^t(x_0) \subset \Delta^+ c^t(z_0) + \varepsilon S$ для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших значений t, где S - единичный шар; $\Delta^+ \Omega = \{x \in \Omega : \exists\, \lambda > 1,\ \lambda x \in \Omega\}$.

в) Для любых натуральных чисел t и k множество

$$c_t^k = Pr_r\, (b^{-k}(\Delta^+ b^{t+k}(x_0)) \cap b^t(x_0)$$

состоит из проекций $y = Pr_r\, x$ тех векторов $x \in b^t(x_0)$, для которых найдется $t+k$ -шаговая оптимальная исходящая из x_0 траектория такая, что $x_t = x$.

Так как $b^t(x_0) \xrightarrow[t\to\infty]{} (0,\xi,0)$, то тем более $b^{t+k}(x) \xrightarrow[t\to\infty]{} (0,\xi,0)$. Тогда $\Delta^+ b^{t+k}(x) \xrightarrow[t\to\infty]{} (0,\Delta^+\xi,0)$. Следовательно, множество

$$c_t^k \xrightarrow[t\to\infty]{} Pr_r\,(b^{-k}(0,\Delta^+\xi,0)\cap(0,\xi,0)) = (c^{-k}(\Delta^+\xi))\cap\xi = \varkappa_k(\xi).$$

Последнее равенство следует из определения множества $\varkappa_k(\xi)$ [9, с.126]. Предыдущее доказывается как обычное равенство двух множеств.

г) $\varkappa_k(\xi) \xrightarrow[k\to\infty]{} \varkappa(\xi)$.

Доказательство непосредственно следует из определений $\varkappa_k(\xi)$ и $\varkappa(\xi)$. Тогда, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, найдется номер k_0 такой, что $C_t^{k_0} \subset \mathscr{X}(\xi) + \varepsilon S$.

д) Для указанного в предыдущем пункте числа ε найдется число $\delta \in (0,1)$ такое, что если $\rho(\|y_t\|_\xi^{-1} y_t, \mathscr{X}(\xi)) \geq \varepsilon$, то $S(y_t) < (1-\delta) S(y_{t-1})$, где S -равновесный (в смысле α) функционал [9, с.119], определенный формулой

$$S(x) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\|c^t(x)\|_\xi}{\alpha^t \cdot 2^{t+1}} \quad (x \geq 0, \|c^t(x)\|_\xi = \max_{y \in c^t(x)} \|y\|_\xi).$$

Доказательство проводится так же, как и леммы 13.1 из [2. с.232].

е) Для указанных в пункте д) чисел $\varepsilon > 0$ и $\delta \in (0,1)$ имеем, что:

$е_1$) справедливо равенство $\lim\limits_{t \to \infty} Q(\delta, t) = Q(\delta)$, где

$$b_t = Pr_{\Gamma} \, b^t(x_0); \quad Q(\delta) = \{x \in \xi : S(x) \geq (1-\delta) \max_{y \in \xi} S(y)\};$$

$$Q(\delta, t) = \{x \in b_t : S(x) \geq (1-\delta) \max_{y \in b_t} S(y)\};$$

$е_2$) справедливы включения

$$\mathscr{X}(\xi) \subset Q(\delta), \quad (Q(\delta, t) + \varepsilon S) \cap b_t \subset Q(\delta^2, t);$$

$е_3$) найдется номер k_0, для которого

$$C_t^{k_0} \subset (\mathscr{X}(\xi) + \varepsilon S) \cap b_t \subset (Q(\delta) + \varepsilon S) \cap b_t \subset Q(\delta^2, t).$$

Доказательство проводится так же, как и в [2, с.244-247].

ж) Пусть

$$d_t = \max\{S(y) : y \in b_t\},$$

$$d = \max\{S(y) : y \in \xi\} = 1.$$

Так как $b_t \to \xi$, то $d_t \to d = 1$. Поэтому найдется натуральное число T_0 такое, что при $t > T_0$ и при любом $\delta \in (0,1)$ справедливо неравенство $d_{t-1} \leq (1+\delta) d_t$.

з) Пусть $\varepsilon > 0$ - произвольное число, δ - число, определенное в пункте д), $\chi = (x_t)_{t=0}^{T}$ - оптимальная траектория модели M, $T > T_0 + k_0$. Покажем, что для любого t, $T_0 < t < T - k_0$, имеет место неравенство $\rho\left(\frac{y_t}{\|y_t\|_\xi}, \mathscr{X}(\xi)\right) < \varepsilon$.

Предполагая противное, получим, что для некоторого t, $T_0 < t < T - k_0$, $\rho\left(\frac{y_{t-1}}{\|y_{t-1}\|_\xi}, \mathscr{X}(\xi)\right) \geq \varepsilon$. Тогда из пункта д) следует, что

$$s(y_t) < (1-\delta) s(y_{t-1}) \leq (1-\delta^2) d_t .$$

Следовательно, $y_t \notin Q(\delta^2, t)$, $y_t \notin C_t^{k_0}$. Так как $y_t \in$ $\in Pr_{\Gamma}(\beta^t(x_0))$, то $y_t \notin Pr_{\Gamma}\beta^{-k_0}(\Delta^+ \beta^{t+k_0}(x_0))$. Отсюда следует, что из точки x_t не исходит k_0-шаговая траектория, элементы которой были бы составляющими $t+k_0$-шаговой оптимальной траектории, исходящей из x_0. Поэтому данная траектория $\chi = (x_t)_{t=0}^{T}$ не является оптимальной. Полученное противоречие завершает доказательство свойства 4.

ЗАМЕЧАНИЕ. Экономическая ячейка N_i, $1 \leq i \leq S$, входящая в иерархическую структуру M, в свою очередь может иметь сложную структуру и представлять собой производственное объединение некоторого числа предприятий, заводов и т.д., преимущественно функционирующих в одной отрасли. Такие модели можно назвать моделями горизонтальной структуры. Эта ситуация возникает, если экономическая ячейка N_i специализируется на выпуске, например, сложного изделия. Пусть в производстве сложного изделия задействованы k предприятий $\Pi_1, \dots, \Pi_k$. Пусть $d_j : R_n^+ \to \Pi(R_n^+)$ – технологическое отображение предприятия Π_j, $1 \leq j \leq k$. Далее, пусть для подготовки одного изделия необходимо b_{ij} единиц i-го продукта предприятия Π_j, $1 \leq j \leq k$, $1 \leq i \leq n$. Тогда число изделий $Q(x)$ при затратах $x \in R_n^+$ определяется формулой

$$Q(x) = \min_{1 \leq i \leq n} \min_{1 \leq j \leq k} b_{ij}^{-1} \cdot (z)^i , \quad z \in d_j(x). \tag{3}$$

Рассмотрим конус

$$Z = \{(x, y) \in R_n^+ \times R_n^+ ,\ (y)^i = \min_{1 \leq j \leq k} b_{ij}^{-1} \cdot (z)^i ; \\ z \in d_j(x),\ 1 \leq i \leq n\}. \tag{4}$$

Этот конус задает технологию экономической ячейки N_i, $1 \leq i \leq S$. Его используем для вычисления числа изделий $Q(x)$.

Формула (4) имеет простой вид в некоторых специальных случаях. Рассмотрим два таких наиболее естественных случая.

СЛУЧАЙ I. Пусть для любого j, $1 \leq j \leq k$, отображение d_j нормально и $b_{ij} = b_j > 0$ для любого i, $1 \leq i \leq k$. Тогда искомый конус Z имеет вид

$$Z = \bigcap_{1 \leq j \leq k} Z_j , \tag{5}$$

где Z_j - график отображения $\ell_j^{-1} d_j$.

СЛУЧАЙ 2. Пусть отображение d_j является линейным и определяется $n \times m$ неотрицательной матрицей A_j, $1 \le j \le k$. В этом случае конус Z, заданный формулой (4), имеет вид:

$$Z = \{(x, y) : x \in R_n^+, (y)^i = \min_{1 \le j \le k} (B_j x)^i, 1 \le i \le n\}, \quad (6)$$

где матрица B_j составлена из строчек $a_1, \ldots, a_n$ матрицы A_j, деленных соответственно на $\ell_{1j}, \ldots, \ell_{nj}$.

Модели, заданные конусами (5) и (6), имеют ряд общих свойств. Отметим здесь некоторые из них.

Пусть:

I) $\alpha_Z, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ - неймановские темпы роста моделей Z, $Z_1, \ldots, Z_k$, где Z_j - конус, определяемый отображением $\ell_j^{-1} d_j$ в случае I или матрицей B_j в случае 2, $1 \le j \le k$. Далее, для определенности будем считать, что $\alpha_1 = \min \alpha_j$, $1 \le j \le k$. Положим

$$X_1 = \{\bar{x} \in R_n^+ : (\bar{x}, \bar{y}) \in Z_1, \ \bar{y} \ge \alpha_1 \bar{x}\}.$$

Тогда модели, определяемые равенствами (5) или (6), обладают следующими свойствами:

I) $\alpha_Z \le \alpha_1$;

2) $\alpha_Z < \alpha_1$ тогда и только тогда, когда найдется номер S, $1 \le s \le k$, такой, что для любых векторов $\bar{x}$ и $\bar{z}$, $\bar{x} \in X_1$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z_s$, верно неравенство $(\bar{z})^i < \alpha_1 (\bar{x})^i$ при некотором $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Из этих свойств следует, что модель Z, вообще говоря, не сохраняет "наследственные признаки" (в смысле темпа роста, магистрали). Поэтому исследование таких типов моделей (моделей горизонтальных структур) сводится к изучению моделей Неймана или Неймана - Гейла. Модели горизонтальных структур могут представлять и иерархическую структуру рассмотренного вида, но только на более низком уровне. Отсюда следует, что функционирование многих реальных производственных объединений, фирм и т.д. сводится к изучению структур иерархического (вертикального) и горизонтального типа. Поэтому модели иерархических и вертикальных структур представляют собой важное звено в теории моделей экономической динамики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Макаров В.Л. Асимптотическое поведение оптимальных траекторий линейных моделей экономики // Сиб. мат. журн. - 1966. - Т.7, № 4. - С.832-853.
2. Макаров В.Л., Рубинов А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. - М.: Наука, 1973.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1966.
4. Моришима М. Равновесие, устойчивость, рост. - М.: Наука, 1972.
5. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. - М.: Наука, 1984.
6. Ашманов С.А. Математические модели и методы в экономике. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980.
7. Колмогоров А.Н. Цепи Маркова со счетным множеством возможных состояний // Бюллетень МГУ (А). - 1937. - Вып.3. - 14 с.
8. Жафяров А.Ж. Теоремы эргодичности в дискретных моделях // Оптимизация. - 1983. - Вып. 33(50). - С.95-110.
9. Рубинов А.М. Суперлинейные многозначные отображения и их приложения к экономико-математическим задачам. - Л.: Наука, 1980.

Поступила в ред.-изд. отдел
10.12.1986 г.