Численные методы

УДК 519.853

ГЛОБАЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ НЕТОЧНОГО МЕТОДА НЬЮТОНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ

В.В.Калашников, Н.И.Калашникова

Рассмотрим нелинейную задачу дополнительности (НЗД): найти вектор $x \in R^n$ такой, что

$$x \geqslant 0, \quad f(x) \geqslant 0, \quad x^T f(x) = 0, \tag{I}$$

где $f: R^n \to R^n$ и $f \in C^1(R^n)$. Методом Ньютона ищут решение задачи (I) следующим образом [I]: имея текущее приближение x^k, определяют x^{k+1} как (точное) решение линейной задачи дополнительности (ЛЗД):

$$x \geqslant 0, \quad w \equiv f(x^k) + f'(x^k)(x - x^k) \geqslant 0, \quad x^T w = 0. \tag{2}$$

При определенных предположениях [2] последовательность $\{x^k\}$ корректно определена и локально сходится к решению задачи (I) с квадратичной скоростью. Для исследования поведения неточного метода Ньютона нам понадобятся некоторые оценки для меры ошибки $\|h(x)\|$, где $h(x) = min(x, f(x))$ – покомпонентный минимум векторов x и $f(x)$.

ЛЕММА I. Пусть отображение $f \in C^1(R^n)$ является сильно монотонным, т.е. существует скаляр $\mu > 0$ такой, что

$$(f(x) - f(y), x - y) \geqslant \mu \|x - y\|^2 \tag{3}$$

для любых x, y из R^n. Тогда для всякого ограниченного выпуклого множества $V \subset R^n$ найдутся величины $\lambda_V > 0$, $\delta_V > 0$ такие, что для

любых x, y из V имеют место неравенства

$$\lambda_V \|x-y\| \leqslant \|h(x)-h(y)\| \leqslant \delta_V \|x-y\|. \tag{4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольной точки $x \in R^n$ определим $\chi(x) = x - h(x)$, $\tau(x) = f(x) - h(x)$. Нетрудно видеть, что $\chi(x) \geqslant 0, \tau(x) \geqslant 0$ и $\chi^T \tau = 0$ для любых $x \in R^n$. Рассмотрим скалярное произведение

$$(f(x)-h(x)-f(y)+h(y),\, x-h(x)-y+h(y)) =$$

$$= (f(x)-f(y), x-y) - (h(x), x-y) + (h(y), x-y) -$$

$$- (f(x)-f(y), h(x)) + (f(x)-f(y), h(y)) + \|h(x)\|^2 +$$

$$+ \|h(y)\|^2 - 2(h(x), h(y)) = (f(x)-f(y), x-y) -$$

$$- (h(x)-h(y), x-y) - (f(x)-f(y), h(x)-h(y)) +$$

$$+ \|h(x)-h(y)\|^2 \geqslant \mu \|x-y\|^2 - (h(x)-h(y), x-y) -$$

$$- (f(x)-f(y), h(x)-h(y)) + \|h(x)-h(y)\|^2.$$

С другой стороны, исходное выражение можно переписать в виде

$$(\tau(x)-\tau(y), \chi(x)-\chi(y)) = \chi^T(x)\tau(x) -$$

$$- \chi^T(x)\tau(y) - \chi^T(y)\tau(x) + \chi^T(y)\tau(y) =$$

$$= -\chi^T(x)\tau(y) - \chi^T(y)\tau(x) \leqslant 0.$$

Объединяя эти две цепочки, получим соотношение

$$\mu \|x-y\|^2 + \|h(x)-h(y)\|^2 \leqslant (h(x)-h(y), x-y) +$$

$$+ (f(x)-f(y), h(x)-h(y)) \leqslant \|h(x)-h(y)\| \cdot \|x-y\| +$$

$$+ \|f(x)-f(y)\| \cdot \|h(x)-h(y)\|. \tag{5}$$

Далее, в силу условия $f \in C^1(R^n)$ можем для любого ограниченного множества $V \subset R^n$ определить величину

$$L_V = \max_{x \in \overline{V}} \|f'(x)\| > 0.$$

Тогда

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L_V \cdot \|x-y\| \tag{6}$$

для любых x , y из V . Используя (6) в цепочке (5), окончательно получим для x , y из V , что

$$\|h(x)-h(y)\|^2 - (L_V+1)\cdot\|x-y\|\cdot\|h(x)-h(y)\| +$$

$$+\mu\cdot\|x-y\|^2 \leq 0.$$

Выполнение этого неравенства влечет оценки

$$\frac{\mu}{L_V+1}\cdot\|x-y\| \leq \|h(x)-h(y)\| \leq (L_V+1)\cdot\|x-y\|.$$

Положив $\lambda_V = \dfrac{\mu}{L_V+1}$, $\delta_V = (L_V+1)$, получим утверждение леммы.

СЛЕДСТВИЕ I. Если x^* – решение НЗД (I) с сильно монотонным отображением $f \in C^1(R^n)$, то для произвольного ограниченного выпуклого множества $V \subset R^n$, содержащего x^*, найдутся скаляры $\lambda_V > 0$, $\delta_V > 0$ такие, что для любого $x \in V$ имеют место неравенства

$$\lambda_V\cdot\|x-x^*\| \leq \|h(x)\| \leq \delta_V\cdot\|x-x^*\|. \tag{7}$$

Доказательство прямо следует из леммы I, поскольку $h(x^*)=0$.

ЛЕММА 2. Пусть $f \in C^1(R^n)$ – сильно монотонное отображение с параметром $\mu>0$. Тогда для любых x, y из R^n найдется единственный вектор $z(x,y)$, решающий возмущенную ЛЗД:

$$z \geq 0\ , \quad w = f(x) - y + f'(x)(z - x) \geq 0\ , \quad z^T w = 0. \tag{8}$$

При этом для любых x, y_1, y_2 из R^n выполнено неравенство

$$\|z(x, y_1) - z(x, y_2)\| \leq \frac{1}{\mu}\|y_1 - y_2\|. \tag{9}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого фиксированного $x \in R^n$ и произвольного $u \in R^n$ можно выписать цепочку

$$u^T f'(x) u = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x + tu) - f(x)\ , u) =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t^2}(f(x + tu) - f(x), tu) \geq \mu \|u\|^2.$$

Значит, для любого $x \in R^n$ матрица $f'(x)$ положительно определена, откуда следует существование для любых x, y из R^n единственного решения $z(x, y)$ возмущенной задачи (8). Зафиксируем произвольное $x \in R^n$ и рассмотрим $z_1 = z(x, y_1)$, $z_2 = z(x, y_2)$ – решения задачи (8) для некоторых y_1, $y_2 \in R^n$. Имеют место соотношения

$$\begin{aligned} &z_1 \geq 0\ , \quad P z_1 \equiv f(x) + f'(x)(z_1 - x) \geq y_1\ , \quad z_1^T P z_1 = z_1^T y_1\ ; \\ &z_2 \geq 0\ , \quad P z_2 \equiv f(x) + f'(x)(z_2 - x) \geq y_2\ , \quad z_2^T P z_2 = z_2^T y_2\ . \end{aligned} \tag{10}$$

Неравенства из (10) влекут неравенства

$$-z_1^T P z_2 \leq -z_1^T y_2 \quad , \quad -z_2^T P z_1 \leq -z_2^T y_1\ ,$$

которые в совокупности с равенствами из (10) дают соотношение

$$(z_1 - z_2)^T (P z_1 - P z_2) \leq (z_1 - z_2)^T (y_1 - y_2)\ .$$

Левая часть здесь равна в точности $(z_1 - z_2)^T f'(x)(z_1 - z_2)$. Поэтому из положительной определенности $f'(x)$ вытекает неравенство $\mu\|z_1 - z_2\|^2 \leq \|z_1 - z_2\| \cdot \|y_1 - y_2\|$, из которого следует требуемая оценка (9). Лемма доказана.

1. Глобальная сходимость метода Ньютона

Рассмотрим условия, гарантирующие сходимость метода Ньютона при любом начальном приближении $x^0 \in R^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [3]. Квадратная матрица $A \in \mathcal{L}(R^n)$ называется M-матрицей, если $a_{ij} \leq 0$ при $i \neq j$, A – неособенная, и $A^{-1} \geq 0$.

ТЕОРЕМА I. Пусть отображение $f: R^n \to R^n$, $f \in C^1(R^n)$, сильно монотонно, покомпонентно выпукло, и в любой точке $x \in R^n_+$ матрица $f'(x)$ является M-матрицей. Тогда для любого начального приближения $x^0 \in R^n$ последовательность $\{x^k\}$, построенная с помощью метода Ньютона, сходится к x^* - единственному решению задачи (I). Если, кроме того, $f \in C^2(R^n)$, то сходимость будет квадратичной, т.е. найдется константа $C > 0$ такая, что справедливы оценки

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leqslant C \cdot \|x^k - x^*\|^2, \quad k = 0,1,2,\ldots \qquad (II)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x^0 \in R^n$ произвольное. Точным методом Ньютона x^1 находится как решение задачи

$$x \geqslant 0, \quad w = f(x^0) + f'(x^0)(x - x^0) \geqslant 0, \quad x^T \cdot w = 0.$$

Поэтому $x^1 \geqslant 0$, и $f(x^1) \geqslant f(x^0) + f'(x^0)(x^1 - x^0) \geqslant 0$ в силу выпуклости f. Аналогично показывается, что неравенства

$$x^k \geqslant 0 \quad , \quad f(x^k) \geqslant 0 \qquad (I2)$$

выполнены для всех $k = 1, 2, \ldots$

Рассмотрим x^{k+1} при некотором $k \geqslant 0$ и сформируем множество $\alpha_k = \{i : 1 \leqslant i \leqslant n, x_i^{k+1} > 0\}$. Отметим, что если $\alpha_k = \emptyset$, то в силу (I2) процесс завершен: $x^{k+1} = 0 = x^*$ - решение задачи (I). Пусть $\alpha_k \neq \emptyset$. Так как x^{k+1} - решение ЛЗД (2), существование и единственность которого следуют из сильной монотонности f, то справедливы равенства

$$\begin{aligned} &x_j^{k+1} = 0, \quad j \notin \alpha_k, \\ &w_i^{k+1} \equiv f_i(x^k) + f'(x^k)(x^{k+1} - x^k) = 0, \quad i \in \alpha_k. \end{aligned} \qquad (I3)$$

Обозначив для краткости $\alpha = \alpha_k$, $\bar{\alpha} = \{1, \ldots, n\} \setminus \alpha$, перепишем (I3) в векторном виде

$$\begin{aligned} &x_{\bar{\alpha}}^{k+1} = 0_{\bar{\alpha}}; \\ &w_\alpha^{k+1} \equiv f_\alpha(x^k) + f'_{\alpha\alpha}(x^k)(x_\alpha^{k+1} - x_\alpha^k) + f'_{\alpha\bar{\alpha}}(x^k)(x_{\bar{\alpha}}^{k+1} - x_{\bar{\alpha}}^k) = 0_\alpha. \end{aligned} \qquad (I4)$$

Известно [4, гл.6, теоремы 2.3 и 2.4], что всякая главная подматрица M -матрицы также является M -матрицей. Следовательно, имеют место неравенства

$$[f'_{\alpha\alpha}(x^k)]^{-1} \geqslant 0, \qquad f'_{\alpha\bar\alpha}(x^k) \leqslant 0. \tag{I5}$$

Умножим обе части (I4) на $[f'_{\alpha\alpha}(x^k)]^{-1}$ слева и учтем, что $x^{k+1}_{\bar\alpha} = 0_{\bar\alpha}$. В итоге получим равенство

$$0_\alpha = [f'_{\alpha\alpha}(x^k)]^{-1} f_\alpha(x^k) + x^{k+1}_\alpha - x^k_\alpha - [f'_{\alpha\alpha}(x^k)]^{-1} f'_{\alpha\bar\alpha}(x^k) x^k_{\bar\alpha},$$

из которого выразим x^{k+1}_α:

$$x^{k+1}_\alpha = x^k_\alpha - [f'_{\alpha\alpha}(x^k)]^{-1} \cdot f(x^k) + [f'_{\alpha\alpha}(x^k)]^{-1} f'_{\alpha\bar\alpha}(x^k) x^k_{\bar\alpha}. \tag{I6}$$

Из (I2), (I5) и (I6) вытекают неравенства $x^{k+1}_\alpha \leqslant x^k_\alpha$ при $k \geqslant 1$. А так как $x^{k+1}_{\bar\alpha} = 0_{\bar\alpha} \leqslant x^k_{\bar\alpha}$, то справедлива цепочка неравенств $0 \leqslant x^{k+1} \leqslant x^k \leqslant \ldots x^1$ при $k = 1, 2, \ldots$ Следовательно, $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ – монотонно невозрастающая ограниченная последовательность, имеющая предел $x^* \geqslant 0$. Кроме того, очевидно, что $\alpha_{k+1} \subseteq \alpha_k$, $k = 0, 1, \ldots$ Поэтому, начиная с некоторого $k_0 \in N$, все $\alpha_k = \alpha_{k_0} = \alpha$. Если $\alpha = \varnothing$, то $x^{k_0} = 0 = x^*$ – решение задачи (I). Если же $\alpha \neq \varnothing$, то, перейдя к пределу в (I6) при $k \to \infty$ и учитывая, что $x^*_{\bar\alpha} = 0_{\bar\alpha}$, получим соотношение

$$0_\alpha = -[f'_{\alpha\alpha}(x^*)]^{-1} \cdot f_\alpha(x^*) + [f'_{\alpha\alpha}(x^*)]^{-1} f'_{\alpha\bar\alpha}(x^*) x^*_{\bar\alpha} =$$

$$= -[f'_{\alpha\alpha}(x^*)]^{-1} f_\alpha(x^*),$$

из которого следует, что $f_\alpha(x^*) = 0_\alpha$. В итоге получаем, что

$$x^* \geqslant 0, \quad f(x^*) \geqslant 0, \quad (x^*)^T f(x^*) = 0,$$

т.е. x^* – решение задачи (I). Его единственность следует из сильной монотонности f.

Для исследования скорости сходимости рассмотрим скалярное произведение

$$(x^{k+1} - x^*)^T (w^{k+1} - w^*) = -(x^{k+1})^T w^* - (x^*)^T w^{k+1} \leqslant 0.$$

С другой стороны,

$$(x^{k+1}-x^*)^T(w^{k+1}-w^*) = (x^{k+1}-x^*)^T[f(x^k)-f(x^*)+$$

$$+f'(x^k)(x^{k+1}-x^k)] = (x^{k+1}-x^*)^T(f(x^{k+1})-f(x^*))-$$

$$-(x^{k+1}-x^*)^T[f(x^{k+1})-f(x^k)-f'(x^k)(x^{k+1}-x^k)] \geq$$

$$\geq \mu\|x^{k+1}-x^*\|^2 - (x^{k+1}-x^*)^T[f(x^{k+1})-f(x^k)-$$

$$-f'(x^k)(x^{k+1}-x^k)].$$

Объединяя эти две цепочки, получим неравенство

$$\mu\|x^{k+1}-x^*\|^2 \leq \|x^{k+1}-x^*\|\cdot\|f(x^{k+1})-f(x^k)-f'(x^k)(x^{k+1}-x^k)\|,$$

откуда следует оценка

$$\|x^{k+1}-x^*\| \leq \frac{1}{\mu}\|f(x^{k+1})-f(x^k)-f'(x^k)(x^{k+1}-x^k)\|. \quad (17)$$

Если $f \in C^2(R^n)$, то, как известно, для любого ограниченного выпуклого множества $V \subset R^n$ существует скаляр $\tau_V > 0$ такой, что

$$\|f(x)-f(y)-f'(y)(x-y)\| \leq \tau_V\|x-y\|^2$$

для любых $x, y \in V$. Рассмотрим в качестве V шар с центром в точке 0 и радиусом $\rho = \|x^1\|$. Из вышеизложенного следует, что $x^k \in V$, $k=1,2,\dots$ Тогда из (17) получаем оценку

$$\|x^{k+1}-x^*\| \leq \frac{\tau_V}{\mu}\|x^{k+1}-x^k\|^2,$$

которая влечет требуемое неравенство (11) с $C = \frac{\tau_V}{\mu}$, так как $\|x^{k+1}-x^k\| \leq \|x^*-x^k\|$, $k=1,2,\dots$, в силу монотонности последовательности $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь более конкретный класс отображений f, представляющий интерес для практических целей.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $x^* \in R^n_+$ – решение задачи (1) с $f(x) = Ax + \varphi(x)$, где $A \in \mathcal{L}(R^n)$ – положительно определенная матрица с параметром $\mu > 0$ (т.е. $u^TAu \geq \mu\cdot\|u\|^2$ для всех $u \in R^n$),

а отображение $\varphi: R^n \to R^n$ является непрерывно дифференцируемым с ограниченной производной:

$$\|\varphi'(x)\| \leqslant q \cdot \mu \qquad \text{для всех } x \in R^n; \tag{18}$$

здесь $0 < q < 1/3$. Тогда для любого начального $x^0 \in R^n$ последовательность $\{x^k\}$, построенная по методу Ньютона, сходится к x^* – единственному решению задачи (I). Если, кроме того, $\varphi \in C^2(R^n)$, то сходимость будет квадратичной, т.е. выполнена оценка (II) с некоторой константой $C > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно убедиться, что условие (18) является достаточным для того, чтобы отображение f было сильно монотонным. Действительно, для произвольных x, y из R^n справедлива цепочка

$$(f(x)-f(y), x-y) = (x-y)^T A (x-y) + (\varphi(x)-\varphi(y), x-y) \geqslant$$

$$\geqslant \mu \|x-y\|^2 - \|\varphi(x)-\varphi(y)\| \cdot \|x-y\| \geqslant \mu(1-q) \cdot \|x-y\|^2.$$

Отсюда, как известно [5], вытекает существование и единственность решения $x^* \in R^n$. Далее, корректно определена (в силу положительной определенности матрицы $f'(x) = A + \varphi'(x)$ для любых $x \in R^n$) последовательность $\{x^k\}$, построенная методом Ньютона. Именно, $x^0 \in R^n$ – произвольно; если имеется $x^k \in R^n$, то строится $x^{k+1} \in R^n$ как (точное) решение ЛЗД:

$$x \geqslant 0, \quad w(x) \equiv Ax + \varphi(x^k) + \varphi'(x^k)(x - x^k) \geqslant 0, \quad x^T w(x) = 0.$$

Для решения x^* задачи (I) выполнены соотношения

$$x^* \geqslant 0, \quad w^* = Ax^* + \varphi(x^*) \geqslant 0, \quad (x^*)^T w^* = 0.$$

Положим $w^{k+1} = w(x^{k+1})$. Тогда $(x^{k+1} - x^*)^T (w^{k+1} - w^*) = -(x^{k+1})^T w^* - (x^*)^T w^{k+1} \leqslant 0$. С другой стороны,

$$(x^{k+1}-x^*)^T(w^{k+1}-w^*) = (x^{k+1}-x^*)^T[A(x^{k+1}-x^*) +$$

$$+\varphi(x^k)-\varphi(x^*)+\varphi'(x^k)(x^{k+1}-x^k)] \geqslant$$

$$\geqslant \mu\cdot\|x^{k+1}-x^*\|^2 + (x^{k+1}-x^*)^T[\varphi(x^k)-\varphi(x^*)+$$

$$+\varphi'(x^k)\cdot(x^{k+1}-x^k)].$$

Объединяя эти два неравенства, получим оценку

$$\mu\cdot\|x^{k+1}-x^*\|^2 \leqslant (x^{k+1}-x^*)^T[\varphi(x^*)-\varphi(x^k)-\varphi'(x^k)(x^{k+1}-x^k)],$$

из которой следует, что

$$\|x^{k+1}-x^*\| \leqslant \frac{1}{\mu}\cdot\|\varphi(x^*)-\varphi(x^k)-\varphi'(x^k)(x^{k+1}-x^k)\|. \tag{19}$$

Из условия (18) вытекают неравенства

$$\|\varphi(x^*)-\varphi(x^k)\| \leqslant q\cdot\mu\|x^k-x^*\|,\ \|\varphi'(x^k)\cdot(x^{k+1}-x^k)\| \leqslant q\cdot\mu\cdot\|x^{k+1}-x^k\|.$$

Отсюда и из (19) следует оценка

$$\|x^{k+1}-x^*\| \leqslant q\cdot\|x^k-x^*\| + q(\|x^{k+1}-x^*\|+\|x^k-x^*\|) =$$

$$= 2q\cdot\|x^k-x^*\| + q\cdot\|x^{k+1}-x^*\|.$$

После приведения подобных получаем

$$\|x^{k+1}-x^*\| \leqslant \frac{2q}{1-q}\cdot\|x^k-x^*\|\ ,\quad k=0,1,\ldots, \tag{20}$$

откуда вытекает сходимость последовательности $\{x^k\}$ к x^*, ибо $2q/(1-q)<1$ при $0<q<1/3$.

Наконец, если $\varphi\in C^2(R^n)$, то для всякого ограниченного выпуклого множества $V\subset R^n$ существует скаляр $z_V>0$ такой, что

$$\|\varphi(x)-\varphi(y)-\varphi'(y)(x-y)\| \leqslant z_V\cdot\|x-y\|^2 \quad \text{для любых } x,y\in V.$$

Возьмем в качестве V шар с центром в точке x^* и радиусом $\rho=\|x^0-x^*\|$. Тогда из (20) следует, что $x^k\in V$, $k=0,1,\ldots$ Значит, $\|\varphi(x^*)-\varphi(x^k)-\varphi'(x^k)(x^*-x^k)\| \leqslant z_V\cdot\|x^k-x^*\|^2$, $k=0,1,\ldots$, и из (19) окончательно получаем

$$\| x^{k+1} - x^* \| \leqslant \frac{\tau_\gamma}{\mu} \cdot \| x^k - x^* \|^2 + q \cdot \| x^{k+1} - x^* \|,$$

откуда следует требуемая оценка (II) с $C = \dfrac{\tau_\gamma}{\mu(1-q)}$. Теорема доказана.

2. Неточный метод Ньютона

Опишем один из вариантов метода. Пусть $x^k \in R^n$ – текущая итерация, $k \geqslant 0$. Построим x^{k+1} в соответствии с правилом

$$\| h_k(x^{k+1}) \| \leqslant \delta_k = \xi_k \cdot \| h(x^k) \|, \ \xi_k > 0, \tag{21}$$

где $h_k(x) = \min(x, f(x^k) + f'(x^k)(x - x^k))$, а $\{\xi_k\}$ – последовательность положительных чисел.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $x^* \in R^n_+$ – решение задачи (I) с отображением $f(x) = Ax + \varphi(x)$, удовлетворяющим условиям теоремы 2. Тогда для любого начального $x^0 \in R^n$ последовательность $\{x^k\}$, построенная по правилу (21):

(а) сходится к x^*, если

$$\xi_k \cdot (1 + \| A + \varphi'(x^k) \|) \cdot (1 + \| A \| + q \cdot \mu) \leqslant \mu(1 - q - \varepsilon) - (2 - \varepsilon) \| \varphi'(x^k) \|, \tag{22}$$

$k = 0, 1, \ldots,$

для некоторого $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \dfrac{1-3q}{1-q}$;

(б) если к тому же $\varphi \in C^2(R^n)$ и $\xi_k \to 0$ при $k \to \infty$, то сходимость будет сверхлинейной, т.е.

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\| x^{k+1} - x^* \|}{\| x^k - x^* \|} = 0\ ; \tag{23}$$

(в) если вдобавок, начиная с некоторого $k_0 \in N$, выполнено соотношение $\xi_k \leqslant \varkappa \cdot \| h(x^k) \|$, $\varkappa > 0$, то сходимость будет квадратичной, т.е. справедливо неравенство (II) с некоторой константой $C > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим последовательность $\{x^k\}$, построенную в соответствии с правилом (21), начиная с произволь-

ного $x^0 \in R^n$. Пусть x^{k+1} и ξ_k удовлетворяют условиям (21) и (22). Обозначим через y^{k+1} точное решение следующей ЛЗД:

$$y \geqslant 0\ ,\ w_k(y) \equiv Ay + \varphi(x^k) + \varphi'(x^k)(y - x^k) \geqslant 0,\ y^T w_k(y) = 0 \qquad (24)$$

Отметим, как и в доказательстве теоремы 2, что в силу (18) отображение f сильно монотонно с константой $\nu \equiv \mu\cdot(1-q)$ и, кроме того, удовлетворяет условию Липшица на R^n с константой $L = \|A\| + q\cdot\mu$. Аналогично, аффинное отображение $w_k(y)$ сильно монотонно с параметром $\nu_k = \mu - \|\varphi'(x^k)\|$ и удовлетворяет условию Липшица на R^n с константой $L_k = \|A + \varphi'(x^k)\|$. Поэтому мы можем применить следствие из леммы I к задаче (24) и получить неравенство

$$\|x^{k+1} - y^{k+1}\| \leqslant \frac{1 + \|A + \varphi'(x^k)\|}{\mu - \|\varphi'(x^k)\|}\cdot\|h_k(x^{k+1})\|. \qquad (25)$$

Далее, используя оценку (19) из доказательства теоремы 2, имеем соотношение

$$\|y^{k+1} - x^*\| \leqslant \frac{1}{\mu}\cdot\|\varphi(x^*) - \varphi(x^k) - \varphi'(x^k)(y^{k+1} - x^k)\|.$$

Снова с помощью условия (18) получаем, что $\|\varphi(x^*) - \varphi(x^k)\| \leqslant$ $\leqslant q\cdot\mu\cdot\|x^k - x^*\|$, и так как $\|\varphi'(x^k)(y^{k+1} - x^k)\| \leqslant \|\varphi'(x^k)\| \times$ $\times \|x^k - y^{k+1}\|$, приходим к неравенству

$$\|y^{k+1} - x^*\| \leqslant q\cdot\|x^k - x^*\| + \frac{\|\varphi'(x^k)\|}{\mu}\cdot(\|y^{k+1} - x^*\| + \|x^k - x^*\|).$$

Приводя подобные, имеем оценку

$$\|y^{k+1} - x^*\| \leqslant \frac{\|\varphi'(x^k)\| + q\cdot\mu}{\mu - \|\varphi'(x^k)\|}\cdot\|x^k - x^*\|.$$

Далее, из (21), (25) и следствия леммы I получаем, что

$$\|y^{k+1} - x^{k+1}\| \leqslant \frac{1 + \|A + \varphi'(x^k)\|}{\mu - \|\varphi'(x^k)\|}\cdot\xi_k\cdot\|h(x^k)\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(1 + \|A\| + q\cdot\mu)\cdot(1 + \|A + \varphi'(x^k)\|)}{\mu - \|\varphi'(x^k)\|}\cdot\xi_k\cdot\|x^k - x^*\|.$$

Используя неравенство треугольника и условие (22) на величину ξ_k, выводим оценку

$$\|x^{k+1}-x^*\| \leqslant \|x^{k+1}-y^{k+1}\|+\|y^{k+1}-x^*\| \leqslant \left[\frac{\mu(1-q-\varepsilon)-(2-\varepsilon)\|\varphi'(x^k)\|}{\mu-\|\varphi'(x^k)\|}+\right.$$

$$\left.+\frac{\|\varphi'(x^k)\|+q\cdot\mu}{\mu-\|\varphi'(x^k)\|}\right]\cdot\|x^k-x^*\| = (1-\varepsilon)\|x^k-x^*\|, \qquad (26)$$

из которой следует сходимость $\{x^k\}$ к x^*.

Если $\varphi\in C^2(R^n)$, то для всякого ограниченного выпуклого множества $V\subset R^n$ существует такой скаляр $\tau_V>0$, что

$\|\varphi(x)-\varphi(y)-\varphi'(y)(x-y)\|\leqslant \tau_V\cdot\|x-y\|^2$ для любых $x,y\in V$.

Возьмем в качестве V шар с центром x^* и радиусом $\rho=\|x^0-x^*\|$. Тогда из (26) вытекает, что все x^k лежат в V, $k=0,1,2,\ldots$, и, следовательно, справедливо неравенство

$$\|y^{k+1}-x^*\| \leqslant \frac{\tau_V}{\mu}\cdot\|x^k-x^*\|^2+q\cdot\|y^{k+1}-x^*\|,$$

или

$$\|y^{k+1}-x^*\| \leqslant \frac{\tau_V}{\mu(1-q)}\cdot\|x^k-x^*\|^2.$$

Но если $\xi_k\to 0$ при $k\to\infty$, то в силу ограниченности последовательности $\{\|\varphi'(x^k)\|\}_{k=0}^{\infty}$ величины

$$\beta_k=\frac{(1+\|A+\varphi'(x^k)\|)\cdot(1+\|A\|+q\cdot\mu)}{\mu-\|\varphi'(x^k)\|}\cdot\xi_k$$

стремятся к нулю при $k\to\infty$. Следовательно,

$$\frac{\|x^{k+1}-x^*\|}{\|x^k-x^*\|}\leqslant\frac{\tau_V}{\mu(1-q)}\cdot\|x^k-x^*\|+\beta_k\to 0 \quad \text{при } k\to\infty.$$

Наконец, если $\xi_k\leqslant\varkappa\cdot\|h(x^k)\|$, $\varkappa>0$, при $k\geqslant k_0$, то, используя оценки для $\|h(x^k)\|$ из следствия леммы I, получим неравенство

$$\|x^{k+1}-x^*\|\leqslant C\cdot\|x^k-x^*\|^2, \quad k\geqslant k_0,$$

где в качестве константы можно взять

$$C = \frac{z_v + \varkappa \cdot (1 + \|A\| + q \cdot \mu)^3}{\mu (1-q)} .$$

Теорема доказана.

В заключение рассмотрим еще один вариант неточного метода Ньютона. Пусть имеются последовательности положительных чисел $\{\varepsilon_k\}$ и $\{\xi_k\}$. Тогда, начиная с произвольного $x^0 \in R^n$, построим последовательность точек $\{x^k\}$ следующим образом. Если имеется $x^k \in R^n$, находим x^{k+1} из условия

$$\| h_k (x^{k+1}) \| \leqslant \gamma_k = \min (\varepsilon_k , \xi_k \cdot \| h(x^k) \|). \tag{27}$$

Известно, что если матрица A положительно определена, то ЛЗД

$$x \geqslant 0 , \quad w \equiv q + Ax \geqslant 0 , \quad x^T w = 0 \tag{28}$$

обладает, и притом единственным, решением. Для исследования указанного варианта неточного метода Ньютона нам потребуется непрерывная зависимость этого решения от матрицы **A** и свободного члена q. Предварительно отметим очевидный факт: если последовательность положительно определенных матриц $\{A_k\}$ сходится к положительно определенной матрице A, то параметры μ_k и μ, характеризующие положительную определенность указанных матриц, можно выбрать так, чтобы $\mu_k \to \mu$ при $k \to \infty$.

ЛЕММА 3. Пусть A, $A_k \in \mathcal{L}(R^n)$, $k=1,2,\dots$, – положительно определенные матрицы с параметрами $\mu > 0$, $\mu_k > 0$ соответственно, а q, q_k, $k=1,2,\dots$, – векторы из R^n такие, что $A_k \to A$, $q_k \to q$, $k \to \infty$. Тогда если x^* – решение задачи (28), а x^k – решение ЛЗД

$$x \geqslant 0, \; w_k \equiv A_k x + q_k \geqslant 0, \; x^T w_k = 0, \; k = 1, 2, \dots , \tag{29}$$

то $x^k \to x^*$ при $k \to \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что x^* является решением ЛЗД:

$$x \geqslant 0 , \; w \equiv A_k x - (A_k - A) x^* - (q_k - q) + q_k \geqslant 0, \; x^T w = 0,$$

которая представляет собой возмущенную задачу (29) с возмущением

$$y = (A_k - A) x^* + (q_k - q).$$

Следовательно, можно применить лемму 2 и получить оценку

$$\|x^k - x^*\| \leq \frac{1}{\mu_k} \cdot \|y\|,$$

из которой следует неравенство

$$\| x^k - x^* \| \leq \frac{1}{\mu_k} \cdot \left(\|A - A_k\| \cdot \|x^*\| + \|q - q_k\| \right).$$

И так как мы можем выбрать μ и μ_k такими, что $\mu_k \to \mu$, $k \to \infty$, то найдется номер k_0 такой, что при $k \geqslant k_0$ имеет место оценка

$$\|x^k - x^*\| \leq \frac{2}{\mu} \left(\|q - q_k\| + \|A - A_k\| \cdot \|x^*\| \right),$$

из которой следует утверждение леммы.

ТЕОРЕМА 4. Пусть отображение $f: R^n \to R^n$ сильно монотонно с параметром $\mu > 0$, покомпонентно выпукло и непрерывно дифференцируемо. Кроме того, пусть производная f' удовлетворяет условию Липшица на R^n с константой $Q > 0$, и в любой точке $x \in R^n$ матрица $f'(x)$ является M-матрицей. Пусть, далее, последовательность $\{x^k\}$, построенная с помощью правила (27) с произвольным начальным $x^0 \in R^n$, удовлетворяет условиям:

(а) существует положительное число S такое, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^2 \cdot (1 + \|f'(x^k)\|)^2 \leq S;$$

(б) для всех $k = 0, 1, \ldots$ выполнены ограничения $\xi_k \cdot (\mu + \|I - f'(x^k)\|) \leq \xi$, где $0 < \xi < \frac{\mu}{L+1}$; здесь $L = \sup_{x \in W} \|f'(x)\|$, а множество $W \subset R^n$ представляет собой шар с центром в начале координат O и радиусом $\rho = \|y^1\| + \frac{Q \cdot S}{\mu^3} + \frac{\sqrt{S}}{\mu}$ (вектор y^1 однозначно определен как точное решение ЛЗД (2) при $k = 0$). В этом случае последовательность $\{x^k\}$ сходится к $x^* \in R_+^n$ – единствен-

ному решению задачи (I).

Если, кроме того, $\xi_k \to 0$ при $k \to \infty$, то сходимость эта будет сверхлинейной, т.е. выполнено равенство (23).

Наконец, если для достаточно больших k имеет место соотношение

$$\xi_k \leqslant \varkappa \cdot \| h(x^k) \| \quad , \quad \varkappa > 0,$$

то сходимость квадратичная, т.е. справедлива оценка (II) с некоторой константой $C > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Исследуем k-й шаг процесса. Пусть имеется $x^k \in R^n$, $k \geqslant 0$. Рассмотрим ЛЗД

$$y \geqslant 0, \quad w \equiv f(x^k) + f'(x^k)(y - x^k) \geqslant 0, \quad y^T w = 0, \tag{30}$$

приближенным решением которой, согласно (27) является x^{k+1}, а ее точное решение обозначим через $y^{k+1} \geqslant 0$ (оно существует и единственно в силу положительной определенности матрицы $f'(x^k)$). Из выпуклости f также получаем, что

$$f(y^{k+1}) \geqslant f(x^k) + f'(x^k)(y^{k+1} - x^k) \geqslant 0.$$

Применив следствие из леммы I к задаче (30), получаем для $k = 0, 1, \ldots$ неравенство

$$\frac{\mu}{1 + \| f'(x^k) \|} \cdot \| x^{k+1} - y^{k+1} \| \leqslant \| h_k (x^{k+1}) \| ,$$

а так как в соответствии с правилом (27)

$$\| h_k (x^{k+1}) \| \leqslant \varepsilon_k \ , \quad k = 0, 1, \ldots ,$$

окончательно получаем оценку

$$\| x^{k+1} - y^{k+1} \| \leqslant \frac{\varepsilon_k (1 + \| f'(x^k) \|)}{\mu} \ , \quad k = 0, 1, \ldots \tag{31}$$

Рассмотрим множество $\alpha_k = \alpha \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ такое, что $y_j^{k+1} = 0$ при $j \notin \alpha$ и $y_i^{k+1} > 0$ при $i \in \alpha$. Тогда, как мы знаем из доказательства теоремы I,

$$y_\alpha^{k+1} = x_\alpha^k - [f'_{\alpha\alpha}(x^k)]^{-1} \cdot f_\alpha(x^k) + [f'_{\alpha\alpha}(x^k)]^{-1} \cdot f'_{\alpha\bar{\alpha}}(x^k) \cdot x_{\bar{\alpha}}^k .$$

Преобразуем последнее выражение к виду

$$y_\alpha^{k+1} = y_\alpha^k - [f'_{\alpha\alpha}(x^k)]^{-1} \cdot f_\alpha(y^k) +$$
$$+ [f'_{\alpha\alpha}(x^k)]^{-1} \cdot f'_{\alpha\bar\alpha}(x^k) \cdot y_{\bar\alpha}^k + R_\alpha(x^k, y^k), \tag{32}$$

где

$$R_\alpha(x^k, y^k) = (x_\alpha^k - y_\alpha^k) + [f'_{\alpha\alpha}(x^k)]^{-1} \times$$
$$\times [f_\alpha(y^k) - f_\alpha(x^k) - f'_{\alpha\bar\alpha}(x^k)(y_{\bar\alpha}^k - x_{\bar\alpha}^k)].$$

Таким образом,

$$R_\alpha(x^k, y^k) = [f'_{\alpha\alpha}(x^k)]^{-1} \cdot \{f_\alpha(y^k) - f_\alpha(x^k) - [f'(x^k)(y^k - x^k)]_\alpha\} \geqslant 0_\alpha$$

в силу выпуклости f и неотрицательности матрицы $[f'_{\alpha\alpha}(x^k)]^{-1}$. Кроме того, из формулы (32) ввиду неположительности $f'_{\alpha\bar\alpha}(x^k)$, неотрицательности $f_\alpha(y^k)$ и y_α^k (при $k \geqslant 1$) следует неравенство $y_\alpha^{k+1} \leqslant y_\alpha^k + R_\alpha(x^k, y^k)$. Далее, очевидно, что

$$y_{\bar\alpha}^{k+1} = 0_{\bar\alpha} \leqslant y_{\bar\alpha}^k \qquad \text{при} \quad k \geqslant 1.$$

Поэтому справедливы двусторонние оценки

$$0 \leqslant y^{k+1} \leqslant y^k + R(x^k, y^k), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где

$$R(x^k, y^k) = \begin{bmatrix} R_\alpha(x^k, y^k) \\ \hdashline 0_{\bar\alpha} \end{bmatrix}$$

Отсюда получаем, что

$$0 \leqslant y^{k+1} \leqslant y^1 + \sum_{\ell=1}^{k} R(x^\ell, y^\ell). \tag{33}$$

Используя липшицевость f' с константой $Q > 0$, оценим

$$\| R_\alpha(x^k, y^k) \| \leqslant \| [f'_{\alpha\alpha}(x^k)]^{-1} \| \cdot \| f_\alpha(y^k) - f_\alpha(x^k) -$$
$$- [f'(x^k) \cdot (y^k - x^k)]_\alpha \| \leqslant Q \cdot \| [f'_{\alpha\alpha}(x^k)]^{-1} \| \cdot \| x^k - y^k \|^2.$$

Известно, что любая главная подматрица $A_{\alpha\alpha}$ положительно определенной матрицы A также положительно определена. Кроме того, для положительно определенной матрицы A с параметром $\mu > 0$ (т.е. $u^T A u \geqslant \mu \|u\|^2$ для всех $u \in R^n$) справедлива оценка $\|A\| \leqslant 1/\mu$. Следовательно, из положительной определенности матрицы $f'(x^k)$ и из оценки (31) вытекает неравенство

$$\| R(x^k, y^k) \| = \| R_\alpha (x^k, y^k) \| \leqslant \frac{Q}{\mu^3} \cdot \varepsilon_{k-1}^2 \cdot (1 + \| f'(x^{k-1}) \|)^2.$$

Значит, если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^2 \cdot (1 + \| f'(x^k) \|)^2$ сходится, то из оценок (33) вытекает ограниченность последовательности $\{ y^k \}$, а значит, и последовательности $\{ x^k \}$. В самом деле, из (31) и стремления к нулю общего члена сходящегося ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^2 (1 + \| f'(x^k) \|)^2$ следует, что

$$\| x^k - y^k \| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{34}$$

Выберем произвольную сходящуюся подпоследовательность $\{ y^{k_\ell} \}_{\ell=1}^{\infty}$ и обозначим $\bar{x}^1 = \lim\limits_{\ell\to\infty} y^{k_\ell}$. Одновременно, в силу (34), имеем $\lim\limits_{\ell\to\infty} x^{k_\ell} = \bar{x}^1 \geqslant 0$. Тогда по непрерывности f и f' получаем $\lim\limits_{\ell\to\infty} f(x^{k_\ell}) = f(\bar{x}^1)$ и $\lim\limits_{\ell\to\infty} f'(x^{k_\ell}) = f'(\bar{x}^1)$. Но $y^{k_\ell + 1}$ является точным решением ЛЗД:

$$y \geqslant 0, \quad w \equiv f(x^{k_\ell}) + f'(x^{k_\ell})(y - x^{k_\ell}) \geqslant 0, \quad y^T \cdot w = 0.$$

Следовательно, по лемме 3 $\{ y^{k_\ell + 1} \}$ сходится при $\ell \to \infty$ к $\bar{x}^2 \geqslant 0$ – решению ЛЗД:

$$x \geqslant 0, \quad w \equiv f(\bar{x}^1) + f'(\bar{x}^1)(x - \bar{x}^1) \geqslant 0, \quad x^T \cdot w = 0.$$

Но тогда, в силу (34), и $x^{k_\ell + 1} \to \bar{x}^2$ при $\ell \to \infty$. Рассуждая аналогично и далее, мы получаем разбиение последовательностей $\{ y^k \}$ и $\{ x^k \}$ на счетное множество подпоследовательностей $\{ \{ y^{k_\ell + m} \}_{\ell=1}^{\infty} \}_{m=0}^{\infty}$ и $\{ \{ x^{k_\ell + m} \}_{\ell=1}^{\infty} \}_{m=0}^{\infty}$. При фиксированном $m \in N$ подпоследовательности $\{ y^{k_\ell + m} \}$ и $\{ x^{k_\ell + m} \}$ сходятся при $\ell \to \infty$ к $\bar{x}^{m+1}$ – решению ЛЗД:

Но из теоремы I мы знаем, что последовательность $\{\bar{x}^m\}$ итераций, полученных точным методом Ньютона, при сделанных предположениях сходится к x^* – единственному решению задачи (I) – при $m \to \infty$. Следовательно, для любого начального приближения $x^0 \in R^n$ и любой окрестности V точки x^* найдется номер $k_0 \in N$ такой, что $x^{k_0} \in V$. Для завершения доказательства теоремы мы, следуя в основном [2], построим такую окрестность V точки x^*, попадание в которую при соблюдении ограничений (6) на параметры ξ_k, гарантирует сходимость последовательности $\{x^k\}$ к x^*. Для этого снова рассмотрим k-й шаг процесса, заключающийся в построении x^{k+1} в соответствии с правилом (27). Обозначив $u^{k+1} = h_k(x^{k+1})$, $v^{k+1} = x^{k+1} - u^{k+1}$, мы видим, что v^{k+1} удовлетворяет условиям

$$v^{k+1} \geqslant 0, \quad w^{k+1} \equiv f(x^k) - (I - f'(x^k))u^{k+1} +$$

$$+ f'(x^k)(v^{k+1} - x^k) \geqslant 0, \qquad (v^{k+1})^T \cdot w^{k+1} = 0.$$

Аналогично, если введем обозначение

$$t^k = f(x^*) - f(x^k) - f'(x^k)(x^* - x^k),$$

то x^*, очевидно, удовлетворяет соотношениям

$$x^* \geqslant 0, \quad w^* \equiv f(x^k) + t^k + f'(x^k)(x^* - x^k) \geqslant 0, \quad (x^*)^T \cdot w^* = 0.$$

Другими словами, в обозначениях леммы 2,

$$\| v^{k+1} - x^* \| \leqslant \frac{1}{\mu} \cdot \| (I - f'(x^k)) u^{k+1} + t^k \|.$$

Таким образом, по лемме 2 справедливо неравенство

$$\| v^{k+1} - x^* \| \leqslant \frac{1}{\mu} \| (I - f'(x^k)) u^{k+1} + t^k \|. \qquad (35)$$

По неравенству треугольника

$$\| v^{k+1} - x^* \| = \| x^{k+1} - x^* - u^{k+1} \| \geqslant \| x^{k+1} - x^* \| - \| u^{k+1} \|.$$

Отсюда и из неравенства (35) следует цепочка

$$\| x^{k+1} - x^* \| \leqslant \| u^{k+1} \| + \| v^{k+1} - x^* \| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\mu + \| I - f'(x^k) \|}{\mu} \cdot \| u^{k+1} \| + \frac{1}{\mu} \| t^k \|.$$

Из липшицевости производной f' мы получим, что $\| t^k \| \leqslant$ $\leqslant Q \cdot \| x^k - x^* \|^2$, и поскольку по правилу (27)

$$\|u^{k+1}\| \leqslant \gamma_k \leqslant \xi_k \cdot \|h(x^k)\| \ , \quad k=0,1,\dots ,$$

то из вышеизложенного вытекает оценка

$$\|x^{k+1}-x^*\| \leqslant \frac{Q}{\mu}\cdot\|x^k-x^*\|^2+\frac{\mu+\|I-f'(x^k)\|}{\mu}\cdot\gamma_k \ . \qquad (36)$$

Далее, из оценки (33) и сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k^2(1+\|f'(x^k)\|)^2$ мы заключаем, что последовательность $\{y^k\}$ целиком содержится в шаре с центром в точке 0 и радиусом $\rho_0=\|y^1\|+\frac{Q\cdot S}{\mu^3}$. Тогда, как следует из (34), начиная с некоторого $k_1\in N$, последовательность $\{x^k\}$ содержится в множестве $W\subset R^n$, определенном в пункте (б) условия теоремы. Тогда, используя введенную там же константу $L>0$, можем записать более грубую оценку

$$\|x^{k+1}-x^*\| \leqslant \frac{Q}{\mu}\cdot\|x^k-x^*\|^2+\frac{\mu+1+L}{\mu}\cdot\gamma_k \ ,$$

или

$$\|x^{k+1}-x^*\| \leqslant \tilde{\mathcal{L}}\cdot\|x^k-x^*\|^2+\tilde{M}\cdot\gamma_k \ ,$$

где $\tilde{\mathcal{L}}=Q/\mu$, $\tilde{M}=(1+L+\mu)/\mu$.

Наконец, заметим, что в силу правила (27) и следствия леммы I

$$\gamma_k \leqslant \xi_k\cdot\|h(x^k)\| \leqslant \xi_k\cdot(1+L)\cdot\|x^k-x^*\| , \quad k=0,1,\dots$$

Поэтому если

$$\xi_k\cdot(\mu+\|I-f'(x^k)\|)\leqslant\xi , \quad k=0,1,\dots ,$$

то из (36) очевидна сходимость последовательности $\{x^k\}$ к x^*, если для какого-то номера $m_0\in N$ будет выполнено неравенство $\|x^{m_0}-x^*\|<\delta$, где $\delta>0$ таково, что

$$\frac{Q}{\mu}\cdot\delta+\xi\cdot\frac{1+L}{\mu}=\sigma<1 .$$

Но, во-первых, ясно, что $\delta>0$, удовлетворяющее последнему условию, существует, так как $\xi<\mu/(1+L)$, а во-вторых, как мы показали ранее, для любого фиксированного $\delta>0$ такой номер m_0 , что $\|x^{m_0}-x^*\|<\delta$, обязательно найдется.

Если дополнительно $\xi_k\to 0$ при $k\to\infty$, то сходимость,

как это следует из (36), будет сверхлинейной. Если же, наконец, для достаточно больших k имеет место соотношение $\xi_k \leqslant \varkappa \cdot \|h(x^k)\|$, $\varkappa > 0$, то из более грубой оценки легко получить неравенство квадратичной сходимости (II) для достаточно больших k; здесь в качестве константы C можно взять величину

$$C = \frac{Q + \varkappa \cdot (1+L)^2 (1+L+\mu)}{\mu} .$$

Теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

I. Pang J.-S., Chan D. Iterative methods for variational and complementarity problems // Math. Programming.- I982. - V.24, N 3. - P.284-3I3.

2. Pang J.-S. Inexact Newton methods for complementarity problem // Math. Programming. - I986. - V.36, N I. - P.54-7I.

3. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных уравнений со многими неизвестными. - М.: Мир, I975.

4. Berman A., Plemmons R.L. Nonnegative matrices in the mathematical sciences. - N.Y. - San Francisco - London: Acad. Press, I979.

5. Karamardian S. The nonlinear complementarity problem with applications. Part I// J. Optimiz. Theory and Applic. - I969.- V.4, N 2. - P.87-98.

Поступила в ред.-изд. отдел
I2.I0.I987 г.