Выпуск 42(59) ОПТИМИЗАЦИЯ 1988 г.

Выпуклый анализ и смежные вопросы

УДК 517.518.8

ЗАДАЧИ НАИЛУЧШЕГО РАВНОМЕРНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ОБОБЩЕННЫМИ ПОЛИНОМАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathfrak{N}$ - ОГРАНИЧЕННЫХ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Г.Я.Ярахмедов

Аналогичные задачи для вещественнозначных функций были изучены Г.Ш.Рубинштейном в [1]. Однако переход к комплекснозначным функциям, как и в классическом случае приближения непрерывных функций, потребовал существенной модификации соответствующих конструкций. Основные результаты статьи, анонсированные в [2], объединяют и дополняют соответствующие предложения для более узких классов равномерного приближения в пространствах непрерывных и почти везде ограниченных вещественнозначных и комплекснозначных функций (см.[3-12]).

1. Общая характеристика исследуемых задач

Рассмотрим непустое множество T, в котором выделено некоторое непустое семейство $\mathfrak{N}$ так называемых несущественных подмножеств, которое не содержит T, является наследственным (с каждым N включает 2^N) и замкнутым относительно счетных объединений. При этом множества $e \in 2^T \setminus \mathfrak{N}$ будем называть существенными. Среди последних особо выделим так называемые $\mathfrak{N}$-атомы, которые характеризуются тем, что при любом существенном $e' \in 2^e$ множество $e \setminus e'$ является несущественным. Важными примерами $\mathfrak{N}$-атомов являются множества, представимые в виде $e = e' \cup e''$, где $e' \in \mathfrak{N}$, а $e'' \notin \mathfrak{N}$ - некоторое одноточечное множество.

Для каждой функции $f : T \to \mathbb{C}$ при любом $T' \in 2^T$ положим

$$\mathfrak{N}-\sup_{t\in T'}|f(t)| = \min_{N\in\mathfrak{N}(T')} \sup_{t\in T'\setminus N} |f(t)|, \qquad (I)$$

где $\mathfrak{N}(T')=\mathfrak{N}\cap 2^{T'}$, а супремум при $T'\setminus N=\emptyset$ принимается равным нулю. Последнее означает, в частности, что при $T'\in\mathfrak{N}$ для всех $f: T\to\mathbb{C}$ имеем

$$\mathfrak{N}-\sup_{t\in T'}|f(t)|=0.$$

Определенные на $\mathbb{C}^T$ функционалы (I) позволяют выделить в $\mathbb{C}^T$ преднормированное комплексное векторное подпространство $\mathcal{B}_{\mathfrak{N}}(T;\mathbb{C})$ так называемых $\mathfrak{N}$-ограниченных функций, для которых

$$\|f\|_{\mathfrak{N}}=\mathfrak{N}-\sup_{t\in T}|f(t)|<+\infty.$$

При этом, вместо формального перехода к соответствующему нормированному фактор-пространству, мы будем говорить об отождествлении в $\mathcal{B}_{\mathfrak{N}}(T;\mathbb{C})$ функций, которые при некоторых $N\in\mathfrak{N}$ имеют одинаковые сужения на $T\setminus N$. Получаемую таким образом сходимость соответствующих классов или, что то же, их представителей естественно называть равномерной $\mathfrak{N}$-сходимостью. Другими словами, про последовательность функций $f_n\in\mathcal{B}_{\mathfrak{N}}(T;\mathbb{C})$ будем говорить, что она сходится к функции $f\in\mathcal{B}_{\mathfrak{N}}(T;\mathbb{C})$, если для любого $\varepsilon>0$ найдутся такие $n_0\in\mathbb{N}$ и $N_0\in\mathfrak{N}$, что $|f_n(t)-f(t)|<\varepsilon$ при всех $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0$ и $t\in T\setminus N_0$. Используя стандартные рассуждения, легко убедиться в том, что построенное нормированное пространство является полным. Оно является конечномерным только в вырожденном случае, когда множество T несущественно отличается от некоторого конечного объединения $\mathfrak{N}$-атомов. Предполагая $\mathcal{B}_{\mathfrak{N}}(T;\mathbb{C})$ более чем n-мерным, зафиксируем в нем некоторое n-мерное подпространство P так называемых обобщенных полиномов и рассмотрим семейство экстремальных задач, отвечающих различным $f\in\mathcal{B}_{\mathfrak{N}}(T;\mathbb{C})$.

ЗАДАЧА (f). Определить экстремальное значение $\nu^*(f)$, равное инфимуму по всем $p\in P$ неотрицательных величин

$$\nu(f,p)=\|f-p\|_{\mathfrak{N}},$$

а также охарактеризовать множество $P(f)$ обобщенных полиномов $p\in P$, для которых $\nu(f,p)=\nu^*(f)$.

В классическом анализе приведенные задачи наилучшего равномерного $\mathfrak{N}$-приближения исследуются в более узкой постановке. В качестве семейства несущественных множество обычно принимается

$$\mathfrak{N}=\{e\in 2^T \mid \mu(e)=0\},$$

где μ - фиксированная полная мера на T. Кроме того, пространство $\mathcal{B}_{\mathfrak{N}}(T;\mathbb{C})$ заменяется подпространством всех μ-измеримых почти везде ограниченных на T функций. Поэтому соответствующие задачи обычно называют задачами наилучшего равномерного приближения почти везде (за исключением множеств нулевой меры). Случаю $\mathfrak{N}=\{\emptyset\}$ отвечают задачи наилучшего равномерного приближения ограниченных (на всем T) комплекснозначных функций.

2. Компактификация задачи равномерного $\mathfrak{N}$-приближения

Для исследования поставленной задачи можно, не умаляя общности, считать, что исходное подпространство реализовано в виде некоторого n-мерного подпространства P в пространстве $\mathbb{C}^T$. При этом для каждого множества A в комплексном векторном пространстве под $K(A)$ понимается объединение множеств $e^{i\theta}\cdot A$ по всем $\theta\in[0,2\pi[$, а для каждого линейного функционала $q\in P^*$ совокупность всех его окрестностей обозначается через $\mathcal{G}_q$. Далее рассматриваются следующие объекты: отображение $\mathfrak{a}$, сопоставляющее каждому $t\in T$ линейный функционал $\hat{t}\in P^*$, при котором $\hat{t}(p)=p(t), p\in P$; отвечающее каждому $T'\in 2^T$ множество

$$Q_{T'}=\{q\in P^*\mid T'\cap \mathfrak{a}^{-1}(G)\notin\mathfrak{N} \quad \text{при всех } G\in\mathcal{G}_q\};$$

отвечающее каждой функции $f\in\mathcal{B}_{\mathfrak{N}}(T;\mathbb{C})$ отображение $[f]$ множества $Q=Q_T$ в $2^{\mathbb{C}}$, определяемое равенством

$$[f](q)=\bigcap_{G\in\mathcal{G}_q}\bigcap_{N\in\mathfrak{N}}\overline{f(\mathfrak{a}^{-1}(G)\setminus N)},$$

где черта сверху означает замыкание в $\mathbb{C}$; множество $C_{\mathfrak{N}}(T;\mathbb{C})$ так называемых P-непрерывных функций $f\in\mathcal{B}_{\mathfrak{N}}(T;\mathbb{C})$, для которых $\operatorname{card}[f](q)=1$ при всех $q\in Q$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. *Для каждого $T'\in 2^T$ множество $Q_{T'}$ компактно. При этом $Q_{T'}=\emptyset$ в том и только в том случае, если T' является несущественным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $q\in Q_{T'}$ найдется $t\in T$ такое, что $\|q-\hat{t}\|<1$. Поэтому $Q_{T'}$ ограничено. Кроме того, если $q\in\overline{Q}_{T'}$ и $G\in\mathcal{G}_q$ произвольны, то для некоторых

$q' \in Q_{T'} \cap G$ и $G' \in \mathcal{Y}_{q'}$, $G' \subset G$, будет $T' \cap \varkappa^{-1}(G) \notin \mathcal{N}$, и, следовательно, при всех $G \in \mathcal{Y}_q$ множество $T' \cap \varkappa^{-1}(G)$ существенно, т.е. $q \in Q_{T'}$. Таким образом, $Q_{T'}$ компактно.

Второе утверждение предложения I очевидно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Каков бы ни был функционал $q \in Q$, множество $[f](q)$ не пусто при всех $f \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}(T;\mathbb{C})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $q \in Q$ и $G \in \mathcal{Y}_q$. Семейство множеств $(\overline{f(\varkappa^{-1}(G) \setminus N)})_{N \in \mathcal{N}}$ является, очевидно, центрированным. Тогда центрировано и семейство $(\bigcap_{N \in \mathcal{N}} \overline{f(\varkappa^{-1}(G) \setminus N)})_{G \in \mathcal{Y}_q}$. Отсюда, в силу компактности множества $\overline{f(T)}$ в $\mathbb{C}$, следует, что $[f](q) \neq \emptyset$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $\mathcal{N}$-ограниченные функции f и g эквивалентны (т.е. $N_0 = \{t \in T \,|\, f(t) = g(t)\} \in \mathcal{N}$), то $[f] = [g]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $q \in Q$. Так как

$$\bigcap_{N \in \mathcal{N}} \overline{\psi(\varkappa^{-1}(G) \setminus N)} = \bigcap_{\substack{N \in \mathcal{N} \\ N \supset N_0}} \overline{\psi(\varkappa^{-1}(G) \setminus N)}$$

при всех $\psi \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}(T;\mathbb{C})$ и $G \in \mathcal{Y}_q$, то

$$[f](q) = \bigcap_{G \in \mathcal{Y}_q} \bigcap_{\substack{N \in \mathcal{Y} \\ N \supset N_0}} \overline{f(\varkappa^{-1}(G) \setminus N)} = \bigcap_{G \in \mathcal{Y}_q} \bigcap_{\substack{N \in \mathcal{N} \\ N \supset N_0}} \overline{g(\varkappa^{-1}(G) \setminus N)} =$$

$$= \bigcap_{G \in \mathcal{Y}_q} \bigcap_{N \in \mathcal{N}} \overline{g(\varkappa^{-1}(G) \setminus N)} = [g](q),$$

что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Легко привести примеры, подтверждающие необратимость предложения 3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. При любых $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}(T;\mathbb{C})$ и $q \in Q$ имеем

$$[\lambda f + \mu g](q) \subset \lambda [f](q) + \mu [g](q).$$

В этом включении достигается равенство, если хотя одна из функций f и g является P-непрерывной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение следует из простейших свойств алгебраических операций над компактными множествами. Для

доказательства второго утверждения положим, что $card\,[g](q)=1$ при всех $q\in Q$. Тогда если $c\in\lambda[f](q)+\mu[g](q)$, то существует $a\in\lambda[f](q)$ такое, что $c=a+\mu[g](q)$. Далее, для любого $N\in\mathfrak{N}$ можно указать последовательность $(t_n)_n$, $t_n\in T$, такую, что $\{t_n\,|\,n\in N\}\cap N=\emptyset$, $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=q$ и $\lambda\lim\limits_{n\to\infty}f(t_n)=a$. Для той же последовательности $\mu\lim\limits_{n\to\infty}g(t_n)=\mu[g](q)$. Таким образом, для произвольного $N\in\mathfrak{N}$ существует последовательность $(t_n)_n$ точек $t_n\in T\setminus N$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=q$ и $c=\lambda\lim\limits_{n\to\infty}f(t_n)+\mu\lim\limits_{n\to\infty}g(t_n)$. Это означает, что $c\in[\lambda f+\mu g](q)$ и, в силу произвольности c, $\lambda[f](q)+\mu[g](q)\subset[\lambda f+\mu g](q)$ при всех $q\in Q$. Остальное ясно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Отображение $\chi: f\to[f]$ является линейной изометрией векторных нормированных пространств $C_{\mathfrak{N}}(T;\mathbb{C})$ и $C(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим сначала инъективность отображения χ. В силу предложения 4, достаточно проверить, что если $[f]=\mathbb{O}$, то функция f $\mathfrak{N}$-эквивалентна нулевой функции. Не умаляя общности, можно считать множество $\overline{f(T)}$ компактным. Очевидно, $0\in\overline{f(T)}$. Если $c\in\overline{f(T)}\setminus\{0\}$, то, в силу определения отображения $[f]$, для каждого $q\in Q$ можно указать такие $N_q\in\mathfrak{N}$, $G_q\in\mathcal{G}_q$ и $U_q=]c-\delta,c+\delta[,\delta>0$, что

$$U_q\cap f(\varkappa^{-1}(G_q)\setminus N_q)=\emptyset.$$

Пусть $\{G_{q_i}\}_{i=1}^{m}$ – конечное открытое покрытие компакта Q. Тогда, используя предложение I, нетрудно показать, что множество $T_0=T\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{m}(\varkappa^{-1}(G_{q_i})\setminus N_{q_i})$ является несущественным. Если $U=\bigcap\limits_{i=1}^{m}U_{q_i}$, то, очевидно, $U\cap f(T\setminus T_0)=\emptyset$. Итак, если $c\in\overline{f(T)}\setminus\{0\}$, то существуют окрестность U_c точки c и $T_c\in\mathfrak{N}$ такие, что $U_c\cap f(T\setminus T_c)=\emptyset$. Положим

$$T_n=\{t\in T\,|\,|f(t)|>\tfrac{1}{n}\}\ (n=1,2,\ldots),\quad T_\infty=\{t\in T\,|\,f(t)\neq 0\}.$$

Каждое множество $\overline{f(T_n)}$, очевидно, компактно и не содержит нуля. Поэтому, используя приведенное выше рассуждение, можно указать конечное число точек $c_1,c_2,\ldots,c_k$ таких, что

$\overline{f(T_n)} \subset \bigcup_{j=1}^{k} u_{c_j}$,

$u_{c_j} \cap f(T_n \setminus T_{c_j}) = \emptyset$, где $T_{c_j} \in \mathcal{N}$ $(j=1,\dots,k)$.

Пусть $u_0 = \bigcup_{j=1}^{k} u_{c_j}$, $N_0 = \bigcup_{j=1}^{k} T_{c_k}$. Тогда $u_0 \cap f(T_n \setminus N_0) = \emptyset$. Так как $\overline{f(T_n)} \subset u_0$, то $f(T_n \setminus N_0) = \emptyset$. Это означает, что $T_n \subset N_0$, т.е. $T_n \in \mathcal{N}$. Тогда из равенства $T_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$ следует несущественность множества T_∞, т.е. f $\mathcal{N}$-эквивалентна нулевой функции, и χ взаимно однозначно.

Докажем, что χ – наложение. Пусть $\psi_0 \in C(Q)$, а ψ – непрерывное продолжение ψ_0 на все пространство P^*, сохраняющее верхнюю грань ψ_0. Рассмотрим функцию

$$f : T \to \mathbb{C}, \quad f(t) = \psi(\hat{t}).$$

Очевидно, что $f \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}(T;\mathbb{C})$. При этом

$$[f](q) = \bigcap_{G \in \mathcal{G}_q} \bigcap_{N \in \mathcal{N}} \overline{\psi(\varkappa(\varkappa^{-1}(G) \setminus N))} \subset \bigcap_{G \in \mathcal{G}_q} \overline{\psi(G)} = \{\psi(q)\} =$$

$$= \{\psi_0(q)\}.$$

В силу непустоты множества $[f](q)$, необходимо $[f](q) = \{\psi_0(q)\}$. Таким образом, $[f] = \psi_0 = \chi(f)$, и χ есть изоморфизм векторных пространств $C_{\mathcal{N}}(T;\mathbb{C})$ и $C(Q)$.

Равенство $\|f\|_{\mathcal{N}} = \|[f]\|_{C(Q)}$ будет установлено ниже (см. замечание 2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Подпространство обобщенных полиномов P содержится в $C_{\mathcal{N}}(T;\mathbb{C})$, причем $[p](q) = q(p)$ при всех $p \in P$ и $q \in Q$.

Это предложение очевидно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Для каждой функции $f \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}(T;\mathbb{C})$ определяемое ею отображение $[f] : Q \to 2^{\mathbb{C}}$ ограничено и полунепрерывно сверху, причем

$$\|f\|_{\mathcal{N}} = \max_{q \in Q} \max |[f](q)|. \qquad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко понять, что при всех $q \in Q$, $N \in \mathcal{N}$ и $G \in \mathcal{G}_q$

$$\sup_{t \in \varkappa^{-1}(G) \setminus N} |f(t)| \geq \max |[f](q)|.$$

Это означает, что

$$\alpha_q = \inf_{G \in \mathcal{G}_q} \inf_{N \in \mathcal{N}} \sup_{t \in \varkappa^{-1}(G) \setminus N} |f(t)| = \max |[f](q)| \quad (q \in Q).$$

Теперь докажем, что $\|f\|_{\mathcal{N}} = \sup_{q \in Q} \alpha_q$, чем будет установлено основное равенство (2). Пусть $\varepsilon > 0$, $q \in Q$. Тогда найдется окрестность G_q точки q такая, что $\alpha_q > \mathcal{N} - \sup_{t \in \varkappa^{-1}(G_q)} |f(t)| - \varepsilon$, и, следовательно, $\sup_{q \in Q} \mathcal{N} - \sup_{t \in \varkappa^{-1}(G_q)} |f(t)| \leq \sup_{q \in Q} \alpha_q$.

С другой стороны, используя компактность множества Q, легко установить противоположное неравенство. Таким образом,

$$\|f\|_{\mathcal{N}} = \sup_{q \in Q} \alpha_q = \sup_{q \in Q} \max |[f](q)|.$$

Отсюда, в частности, следует ограниченность отображения $[f]$. Полунепрерывность сверху отображения $[f]$ проверяется непосредственно, исходя из его определения. Предложение 7 полностью доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $f \in C_{\mathcal{N}}(T; \mathbb{C})$, то $[f](q)$ одноэлементно при каждом $q \in Q$. Поэтому в этом случае

$$\|f\|_{\mathcal{N}} = \max_{q \in Q} |[f](q)| = \|[f]\|_{C(Q)}.$$

Тем самым завершено и доказательство предложения 5.

Используя предложения 4,6 и 7, легко проверить, что отвечающие функциям $f \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}(T; \mathbb{C})$ и $p \in P$ величины $\nu(f, p)$ могут быть вычислены по формуле

$$\nu(f,p) = \max_{q \in Q} \max |q(p) - [f](q)|. \qquad (3)$$

Это означает, что рассматриваемая нами задача (f) сводится к равномерному приближению на некотором компакте полунепрерывного сверху отображения $[f]$ элементами n-мерного подпространства $\{[p] / p \in P\}$ пространства $C(Q)$.

Далее, для каждого $z' \in \mathbb{C}$ функция

$$\psi_{z'} : q \longrightarrow \max |z' - [f](q)|,$$

определенная на Q, полунепрерывна сверху. Поэтому функция

$$q \to \inf_{z' \in \mathbb{C}} \max |z' - [f](q)|,$$

будучи нижней огибающей семейства $(\psi_{z'})_{z'\in\mathbb{C}}$, также полунепрерывна сверху. Из неравенства

$$\max|q(p)-[f](q)|\geqslant\inf_{z'\in\mathbb{C}}\max|z'-[f](q)|\ (q\in Q)$$

и из того, что каждое множество $[f](q)\ (q\in Q)$ обладает чебышевским центром, следует, что

$$\nu(f,p)\geqslant\max_{q\in Q}\min_{z'\in\mathbb{C}}\max|z'-[f](q)|,$$

каков бы ни был обобщенный полином p. Следовательно, для каждой $\mathcal{H}$-ограниченной функции f экстремальное значение $\nu^*(f)$ в задаче (f) ограничено снизу неотрицательной величиной

$$\delta(f)=\max_{q\in Q}\min_{z'\in\mathbb{C}}\max|z'-[f](q)|.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В случае P-непрерывных функций f указанные нижние оценки, очевидно, равны нулю, и они достигаются для обобщенных полиномов и только для них.

3. Геометрическая интерпретация

Продолжая изучение рассматриваемой задачи, приведем ее геометрическую интерпретацию в $(n+1)$-мерном комплексном пространстве $P^*\times\mathbb{C}$. Подобные интерпретации ранее встречались в работах [3-5] и других.

Для дальнейшего сделаем одно замечание относительно терминологии. Пусть A и B – подмножества комплексного векторного пространства E. Будем говорить, что гиперплоскость H в пространстве E, задаваемая уравнением $\varphi(x)=\xi$, где $x\in E$, $\varphi\in E^*$, $\xi\in\mathbb{C}$, строго отделяет от A множество B, если либо $\mathrm{Re}\,\varphi(A)\leqslant\mathrm{Re}\,\xi$ и $\mathrm{Re}\,\varphi(B)>\mathrm{Re}\,\xi$, либо $\mathrm{Re}\,\varphi(A)\geqslant\mathrm{Re}\,\xi$ и $\mathrm{Re}\,\varphi(B)<\mathrm{Re}\,\xi$. Далее, гиперплоскость H опорна к множеству A, если $\mathrm{Re}\,\varphi(A)\leqslant\mathrm{Re}\,\xi$ (или $\mathrm{Re}\,\varphi(A)\geqslant\mathrm{Re}\,\xi$) и $H\cap A\neq\varnothing$.

Возьмем конкретную функцию $f\in\mathcal{B}_{\mathcal{H}}(T;\mathbb{C})$ и каждому обобщенному полиному p сопоставим гиперплоскость в $P^*\times\mathbb{C}$:

$$H(p)=\{(u,z)\in P^*\times\mathbb{C}\,|\,u(p)+z=\nu(f,p)\}.$$

Рассмотрим также множество $K(\Gamma(f))$, где

$$\Gamma(f)=\{(q,-z)\in Q\times\mathbb{C}\,/\,z\in[f](q)\}$$

– график отображения $-[f]$, для каждого $\tau\in\mathbb{R}$ – открытый луч $\mathcal{L}_\tau=\{(\mathbb{O},\tau')\in P^*\times\mathbb{C}\,/\,\tau'\in\mathbb{R},\ \tau'>\tau\}$ с вершиной в точке $(\mathbb{O},\tau)$. Множество $K(\Gamma(f))$, очевидно, ограничено. Если $(e^{i\theta_k}(q_k,-z_k))_{k\in N}$ – произвольная последовательность точек в $K(\Gamma(f))$, сходящаяся к некоторому $e^{i\theta_0}(q_0,-z_0)\in P^*\times\mathbb{C}$, где $q_0=\lim\limits_{k\to\infty}q_k$, $z_0=\lim\limits_{k\to\infty}z_k$, $e^{i\theta_0}=\lim\limits_{k\to\infty}e^{i\theta_k}$, то, в силу полунепрерывности сверху отображения $[f]$, будет $z_0\in[f](q)$. Поэтому необходимо $e^{i\theta_0}(q_0,-z_0)\in K(\Gamma(f))$, т.е. $K(\Gamma(f))$ замкнуто. Это означает, что множество

$$W(f)=\operatorname{conv}K(\Gamma(f))$$

является выпуклым компактом в $P^*\times\mathbb{C}$. Из определения множества $K(\Gamma(f))$ сразу следует, что $W(f)$ абсолютно выпукло, так что всегда $(\mathbb{O},0)\in W(f)$. Если при этом для некоторого $\mu\in\mathbb{R}$ точка $(\mathbb{O},\mu)$ принадлежит множеству $W(f)$, то ему принадлежат также точки $(\mathbb{O},|\mu|)$ и $(\mathbb{O},\operatorname{Re}\mu)$.

Пусть $\rho\in P$. Так как при всех $q\in Q$, $\theta\in[0,2\pi[$ и $z\in[f](q)$ имеем

$$\operatorname{Re}(e^{i\theta}q(\rho)-e^{i\theta}z)\le|q(\rho)-z|\le\nu(f,\rho),$$

а при всех $\tau\in]\nu(f,\rho),+\infty[$ имеем

$$\operatorname{Re}(\mathbb{O}(\rho)+\tau)>\nu(f,\rho),$$

то гиперплоскость $H(\rho)$ строго отделяет от $W(f)$ открытый луч $\mathcal{L}_{\nu(f,\rho)}$. Заметим также, что гиперплоскость $H(\rho)$ пересекает вещественную прямую $\{\mathbb{O}\}\times\mathbb{R}$ в точке $(\mathbb{O},\nu(f,\rho))$.

С другой стороны, если $q_0\in Q$ и $z_0\in[f](q_0)$ таковы, что $|q_0(\rho)-z_0|=\nu(f,\rho)$ (см. замечание 2), то $H(\rho)\cap W(f)\neq\emptyset$.

Таким образом, гиперплоскость $H(\rho)$ пересекает прямую $\{\mathbb{O}\}\times\mathbb{R}$, опорна к $W(f)$ и строго отделяет от $W(f)$ луч $\mathcal{L}_{\nu(f,\rho)}$.

Обратно, пусть H – произвольная опорная к $W(f)$ гиперплоскость в $P^*\times\mathbb{C}$, пересекающая прямую $\{\mathbb{O}\}\times\mathbb{R}$ в некоторой точке $(\mathbb{O},\tau_0)$ и строго отделяющая от $W(f)$ луч $\mathcal{L}_{\tau_0}$. Допустим, что H имеет уравнение

$$u(\rho_0)+z\cdot z_0=c_0,$$

где $\rho_0 \in P$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $c_0 \in \mathbb{C}$. Так как $(0,\tau_0) \in H$, то $c_0 = \tau_0 \cdot z_0$. Из условия строгого отделения от $W(f)$ луча Λ_{τ_0} следует, что $z_0 \neq 0$. Поэтому уравнение гиперплоскости H приводится к виду

$$u(\rho) + z = \tau_0,$$

где $\rho = \frac{1}{z_0}\rho_0 \in P$.

Легко проверить, что $\tau_0 = \nu(f,\rho)$. В самом деле, из условия строгого отделения следует, что при всех $\theta \in [0,2\pi[$, $q \in Q$ и $z \in [f](q)$ будет

$$\mathcal{R}e\,(e^{i\theta}(q(\rho) - z)) \leq \tau_0.$$

Следовательно,

$$|q(\rho) - z| = \max_{\theta \in [0,2\pi]} (\mathcal{R}e\, e^{i\theta}(q(\rho) - z)) \leq \tau_0$$ при всех $q \in Q$ и $z \in [f](q)$

или, что то же, $\nu(f,\rho) \leq \tau_0$. С другой стороны, так как гиперплоскость H опорна к $W(f)$, то найдутся $\theta_1 \in [0,2\pi[$, $q_1 \in Q$ и $z_1 \in [f](q_1)$ такие, что $e^{i\theta_1}(q_1, -z_1) \in H$, т.е. $\tau_0 = e^{i\theta_1}(q_1(\rho) - z_1) \leq \nu(f,\rho)$. Тем самым, $H = H(\rho)$.

Сказанное означает, что отображение $\rho \to H(\rho)$ подпространства P во множество всех опорных к $W(f)$ гиперплоскостей в $P^* \times \mathbb{C}$, пересекающих вещественную прямую $\{0\} \times \mathbb{R}$ и строго отделяющих соответствующие лучи от $W(f)$, является биективным.

Таким образом, задача (f) сводится к разысканию минимального числа $\tau_0 \geq 0$, при котором через точку $(0,\tau_0)$ можно провести опорную к $W(f)$ гиперплоскость, строго отделяющую от $W(f)$ луч Λ_{τ_0}.

Легко понять, что $\tau_0 = \nu^*(f)$. При этом обобщенный полином ρ является решением задачи (f) в том и только в том случае, если гиперплоскость с уравнением $u(\rho) + z = \nu^*(f)$ опорна к $W(f)$.

4. Обоснование двойственных отношений

Из компактности множества $W(f)$ сразу следует, что числовое множество $\{\mu \in \mathbb{R} \mid (0,\mu) \in W(f)\}$ также является компактным. Пусть $\mu^*(f) = \max\{\mu \in \mathbb{R} \mid (0,\mu) \in W(f)\}$. Поскольку гиперплоскость $H(\rho)$ строго отделяет луч $\Lambda_{\nu(f,\rho)}$ от $W(f)$, каков бы ни был обобщенный полином ρ, то $\mu^*(f) \leq \nu(f,\rho)$ при всех $\rho \in P$. Это приводит к неравен-

ству $\mu^*(f) \le \nu^*(f)$. Докажем, что неравенство $\mu^*(f) < \nu^*(f)$ невозможно. В самом деле, в противном случае компакт $W(f)$ не пересекается с замкнутым множеством $\mathcal{L}_{\nu^*(f)} = \{\mathbb{O}\} \times [\nu^*(f), +\infty[$, и потому по известной теореме отделимости найдутся $\bar{p} \in P$, $\bar{z} \in \mathbb{C}$ и $\bar{c} \in \mathbb{C}$ такие, что гиперплоскость в $P^* \times \mathbb{C}$, определяемая уравнением $u(\bar{p}) + z \cdot \bar{z} = \bar{c}$, строго отделяет от $W(f)$ луч $\mathcal{L}_{\nu^*(f)}$. Строгое отделение было бы невозможно при $\bar{z} = 0$. Поэтому, не умаляя общности, можно считать $\bar{z} = 1$. Так как при всех $\theta \in [0, 2\pi[$, $q \in Q$ и $z \in [f](q)$ имеем $e^{i\theta}(q, -z) \in W(f)$, то необходимо выполняется неравенство (см. (2))

$$\nu(f, \bar{p}) = \max_{q \in Q} \max_{z \in [f](q)} \max_{\theta \in [0, 2\pi[} \mathcal{R}e\,(e^{i\theta}(q(\bar{p}) - z)) \le$$

$$\le \mathcal{R}e\,\bar{c} < \nu^*(f),$$

что невозможно.

Итак, установлено двойственное соотношение

$$\nu^*(f) = \mu^*(f) = \max\{\mu \in \mathbb{R} \mid (\mathbb{O}, \mu) \in W(f)\}.$$

Желая конкретизировать указанное соотношение, рассмотрим совокупность $\mathcal{A}$ так называемых минимальных множеств $A \subset K(Q)$, удовлетворяющих условию

$$\mathbb{O} \in \operatorname{conv} A \setminus \bigcup_{a \in A} \operatorname{conv}(A \setminus \{a\}).$$

С помощью элементарных рассуждений можно убедиться в том, что каждое минимальное множество вещественно аффинно-независимо, а каждое истинное подмножество минимального множества вещественно линейно-независимо. Отсюда, в частности, следует, что для каждого $A \in \mathcal{A}$ существует только одна функция $h_A : A \to]0, +\infty[$, удовлетворяющая условиям

$$\sum_{a \in A} h_A(a) = 1, \quad \sum_{a \in A} h_A(a)\, a = \mathbb{O}.$$

Это позволяет, полагая $\langle A \rangle = \{(\theta, q) \in [0, 2\pi[\times Q \mid e^{i\theta} q \in A\}$ для произвольного $A \in 2^{K(Q)}$, на декартовом произведении $\mathcal{A} \times \mathcal{B}_{\pi}(T; \mathbb{C})$ определить многозначное отображение

$$\mu(A, f) = -\sum_{(\theta, q) \in \langle A \rangle} h_A(e^{i\theta} q)\, e^{i\theta} [f](q).$$

Если $z \in \mu(A,f)$, то для каждой пары $(\theta,q) \in \langle A \rangle$ можно указать комплексное число $z(\theta,q) \in [f](q)$ такое, что

$$z = -\sum_{(\theta,q)\in\langle A\rangle} h_A(e^{i\theta}q)\, e^{i\theta} z(\theta,q).$$

Поэтому

$$(\mathbb{O}, z) = \sum_{(\theta,q)\in\langle A\rangle} h_A(e^{i\theta}q)\,(q, -z(\theta,q)) \in W(f).$$

А тогда абсолютно выпуклое множество $W(f)$ содержит также точки $(\mathbb{O}, |z|)$ и $(\mathbb{O}, \mathcal{R}e\, z)$. Следовательно,

$\max \mathcal{R}e\, \mu(A,f) \le \mu^*(f) = \nu^*(f)$ при всех $A \in \mathcal{A}$,

т.е. $\max\limits_{A\in\mathcal{A}} \max \mathcal{R}e\, \mu(A,f) \le \nu^*(f)$.

С другой стороны, так как $(\mathbb{O}, \nu^*(f)) \in W(f)$, то точка $(\mathbb{O}, \nu^*(f))$ принадлежит внутренности некоторого симплекса с вершинами в точках $e^{i\theta}(q_j, -z_j)$ $(j=0,1,\dots,m)$, где $z_j \in [f](q_j)$ $(j=0,1,\dots,m)$. Поэтому существует однозначно определенный набор положительных чисел $h_0, h_1, \dots, h_m$, $\sum\limits_{j=0}^{m} h_j = 1$, такой, что

$$(\mathbb{O}, \nu^*(f)) = \sum_{j=0}^{m} h_j\, e^{i\theta_j}(q_j, -z_j).$$

Множество $\{e^{i\theta_j} q_j\}_{j=0}^{m}$ является минимальным. Действительно, иначе, кроме представления $\mathbb{O} = \sum\limits_{j=0}^{m} h_j e^{i\theta_j} q_j$, вытекающего из последнего равенства, существует также представление

$$\mathbb{O} = \sum_{j=0}^{m} h_j' e^{i\theta_j} q_j, \qquad h_j' \in \mathbb{R}\ (j=0,1,\dots,m),\ \sum_{j=0}^{m} h_j' = 1,$$

отличное от предыдущего. Так как при всех $p \in P$ будет

$$\nu^*(f) = -\sum_{j=0}^{m} h_j e^{i\theta_j} z_j = \sum_{j=0}^{m} h_j e^{i\theta_j}(q_j(p) - z_j) = \sum_{j=0}^{m} h_j\, \mathcal{R}e\,(e^{i\theta_j}(q_j(p) - z_j)),$$

то для $\bar p \in P(f)$ выполняются равенства

$$e^{i\theta_j}(q_j(\bar p) - z_j) = \mathcal{R}e\,(e^{i\theta_j}(q_j(\bar p) - z_j)) = \nu^*(f) \quad (j=0,1,\dots,m).$$

Следовательно,

$$(\mathbb{O}, \nu^*(f)) = (\mathbb{O}, \sum_{j=0}^{m} h_j' e^{i\theta_j}(q_j(\bar{p}) - z_j)) = \sum_{j=0}^{m} h_j' e^{i\theta_j}(q_j, -z_j),$$

что противоречит вещественной аффинной независимости множества $\{e^{i\theta_j}(q_j, -z_j)\}_{j=0}^{m}$.

Таким образом, существуют $A_0 \in \mathcal{A}$ и числа $z(\theta, q) \in [f](q)$ $((\theta, q) \in \langle A_0 \rangle)$ такие, что

$$\nu^*(f) = -\sum_{(\theta,q)\in\langle A\rangle} h_{A_0}(e^{i\theta} q)\, e^{i\theta} z(\theta, q).$$

Поэтому $\nu^*(f) \leq \max \mathcal{R}e\, \mu(A_0, f)$. Сравнивая это неравенство с непосредственно предыдущим, полученное ранее двойственное соотношение можно переписать в виде

$$\nu^*(f) = \max_{A\in\mathcal{A}} \max \mathcal{R}e\, \mu(A, f).$$

Отсюда, в частности, следует, что для всех $\mathcal{N}$-ограниченных функций f непустыми являются множества

$$\mathcal{A}(f) = \{A \in \mathcal{A} \mid \nu^*(f) = \max \mathcal{R}e\, \mu(A, f)\}.$$

5. Признак наилучшего равномерного $\mathcal{N}$-приближения

В этом пункте приводятся условия, характеризующие решение задачи (f), а также дается характеризация вырожденного случая, когда $\nu^*(f) = \delta(f)$ для всех функций $f \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}(T; \mathbb{C})$.

ТЕОРЕМА I (признак оптимальности). Следующие соотношения равносильны:

1) $p \in P(f)$;

2) совокупность $\mathcal{A}(f, p)$ минимальных множеств, удовлетворяющих условию

$$\nu(f, p) \in e^{i\theta}(q(p) - [f](q)) \text{ при всех } e^{i\theta} q \in A,$$

совпадает с $\mathcal{A}(f)$;

3) $\mathcal{A}(f, p) \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $A \in \mathcal{A}(f)$. Тогда $\nu(f, p) = \nu^*(f) = \max \mathcal{R}e\, \mu(A, f) = \mathcal{R}e\, z_0$, где z_0 – некоторый элемент компакта $\mu(A, f)$. Существуют числа $z(\theta, q) \in [f](q)$ $((\theta, q) \in \langle A \rangle)$ такие, что

$$z_0 = -\sum_{(\theta,q)\in\langle A\rangle} h_A(e^{i\theta}q)\, e^{i\theta} z(\theta,q),$$

и потому

$$v(f,\rho) = \sum_{(\theta,q)\in\langle A\rangle} h_A(e^{i\theta}q)\, \mathcal{R}e\,(e^{i\theta}(q(\rho) - z(\theta,q))).$$

Отсюда ясно, что $e^{i\theta}(q(\rho) - z(\theta,q)) = v(f,\rho)$ при всех $(\theta,q)\in\langle A\rangle$, т.е. $A\in\mathcal{A}(f,\rho)$.

Обратно, пусть $A\in\mathcal{A}(f,\rho)$. Тогда при некоторых $z(\theta,q)\in[f](q)\ ((\theta,q)\in\langle A\rangle)$ будет

$$e^{i\theta}(q(\rho) - z(\theta,q)) = v(f,\rho).$$

Следовательно,

$$v(f,\rho) = \sum_{(\theta,q)\in\langle A\rangle} h_A(e^{i\theta}q) e^{i\theta}(q(\rho) - z(\theta,q)) = -\sum_{(\theta,q)\in\langle A\rangle} h_A(e^{i\theta}q) e^{i\theta} z(\theta,q) \in \mathcal{R}e\,\mu(A,f)$$

и, в силу двойственного соотношения, $v(f,\rho)\le \max \mathcal{R}e\,\mu(A,f) = v^*(f)$. Это означает, что $A\in\mathcal{A}(f)$.

2) $\Longrightarrow$ 3). Это сразу следует из непустоты множества $A(f)$.

3) $\Longrightarrow$ I). Пусть $A\in\mathcal{A}(f,\rho)$. Повторяя доказательство включения $\mathcal{A}(f,\rho)\subset\mathcal{A}(f)$ из I) $\Longrightarrow$ 2), находим, что $v(f,\rho) = v^*(f)$, что и требовалось доказать.

В формулируемых ниже предложениях часто встречаются множества

$$\mathcal{B}^0_{\mathfrak{N}}(T;\mathbb{C}) = \{f\in\mathcal{B}_{\mathfrak{N}}(T;\mathbb{C}) \mid v^*(f) > \delta(f)\},$$

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \setminus \bigcup_{q\in Q} \mathcal{A}_q,$$

где $\mathcal{A}_q$ – совокупность тривиальных минимальных множеств, образованных при участии только одного функционала $q\in Q$.

ТЕОРЕМА 2. Следующие условия равносильны:

I) $\mathbb{O}\notin Q$ и $\mathcal{A}_0 = \varnothing$;

2) $\mathcal{B}^0_{\mathfrak{N}}(T;\mathbb{C}) = \varnothing$;

3) $\mathbb{O}\notin Q$ и для каждого замк-

нутого множества $A \subset K(Q)$, при котором $2^A \cap (\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_0) = \emptyset$, найдется обобщенный полином ρ такой, что $\mathrm{Re}\,(e^{i\theta} q(\rho)) > 0$ при всех $(\theta, q) \in \langle A \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\Longrightarrow$ 2). Если выполнено 1), то $\sum_{(\theta,q)\in\langle A\rangle} h_A(e^{i\theta}q)e^{i\theta} = 0$ для всякого $A \in \mathcal{A}$. Поэтому для всех $f \in \mathcal{B}_\pi(T;\mathbb{C})$ и $z' \in \mathbb{C}$ будет

$$\max \mathrm{Re}\,\mu(A,f) = \max \mathrm{Re}\,(-\sum_{(\theta,q)\in\langle A\rangle} h_A(e^{i\theta}q)e^{i\theta}[f](q)) =$$

$$= \max \sum_{(\theta,q)\in\langle A\rangle} h_A(e^{i\theta}q)\,\mathrm{Re}\,(e^{i\theta}(z' - [f](q))) \leqslant \max_{z\in[f](q)} |z' - z|,$$

где q – единственный функционал, определяемый минимальным множеством A. В частности,

$$\max \mathrm{Re}\,\mu(A,f) \leqslant \min_{z'\in\mathbb{C}} \max_{z\in[f](q)} |z' - z| \quad (A \in \mathcal{A}).$$

Это означает, что

$$\nu^*(f) = \max_{A\in\mathcal{A}} \max \mathrm{Re}\,\mu(A,f) \leqslant \delta(f).$$

Так как всегда $\nu^*(f) \geqslant \delta(f)$, то $\nu^*(f) = \delta(f)$ и, в силу произвольности $f \in \mathcal{B}_\pi(T;\mathbb{C})$, тогда $\mathcal{B}^0_\pi(T;\mathbb{C}) = \emptyset$.

2) $\Longrightarrow$ 1). Равенство $\nu^*(f) = \delta(f)$ имеет место для всех $f \in \mathcal{B}_\pi(T;\mathbb{C})$ и, в частности, для всех $f \in C_\pi(T;\mathbb{C})$. Но для P-непрерывных функций $\delta(f) = 0$. Поэтому легко понять, что

$$\sum_{(\theta,q)\in\langle A\rangle} h_A(e^{i\theta}q)e^{i\theta}[f](q) = 0 \text{ при всех } f \in C_\pi(T;\mathbb{C}) \text{ и } A \in \mathcal{A}. \quad (*)$$

Отсюда сразу ясно, что $0 \notin Q$. Выберем произвольно $A \in \mathcal{A}$ и для каждого $q \in \rho^z_Q\langle A\rangle$ положим $I_q = \{\theta \in [0, 2\pi[\,/\, e^{i\theta}q \in A\}$. Тогда

$$\sum_{(\theta,q)\in\langle A\rangle} h_A(e^{i\theta}q)e^{i\theta}[f](q) = \sum_{q\in\rho^z_Q\langle A\rangle} (\sum_{\theta\in I_q} h_A(e^{i\theta}q)e^{i\theta})[f](q) = 0.$$

Если $\mathrm{card}\,\rho^z_Q\langle A\rangle \geqslant 2$, то, в силу минимальности A,

$$\sum_{\theta\in I_q} h_A(e^{i\theta}q)e^{i\theta} \neq 0 \quad \text{при всех } q \in \rho^z_Q\langle A\rangle.$$

Учитывая это, выберем некоторое $q_0 \in \rho^z_Q\langle A\rangle$ и определим непрерывную на Q функцию ψ следующим образом в точках множества $\rho^z_Q\langle A\rangle$:

$$\psi(q_0)=[f](q_0)+1, \quad \psi(q)=[f](q) \; (q \in \rho r_Q\langle A\rangle \setminus \{q_0\}).$$

Согласно предложению 5 существует функция $g \in C_{\mathcal{H}}(T; \mathbb{C})$ такая, что $[g]=\psi$. Для нее

$$\sum_{(\theta,q)\in\langle A\rangle} h_A(e^{i\theta}q)e^{i\theta}[g](q) \neq 0,$$

что противоречит (*). Полученное противоречие показывает, что $\mathrm{card}\, \rho r_Q\langle A\rangle = 1$. Пусть $\rho r_Q\langle A\rangle=\{q\}$. Так как $q \neq \mathbf{0}$, то необходимо

$$\sum_{\theta\in I_q} h_A(e^{i\theta}q)e^{i\theta} = \sum_{(\theta,q)\in\langle A\rangle} h_A(e^{i\theta}q)e^{i\theta} = 0.$$

Из вещественной аффинной независимости множества A следует вещественная аффинная независимость числового множества $\{e^{i\theta} | \theta \in I_q\}$. Следовательно $\mathrm{card}\, I_q \leq 3$, $A \in \mathcal{A}_q$ и $\mathcal{A}_0 = \emptyset$, т.е. 2) $\Longrightarrow$ 1).

1) $\Longrightarrow$ 3). Пусть $A \in 2^{K(Q)}$ и $2^A \cap \bigcup_{q\in Q} \mathcal{A}_q = \emptyset$. В силу 1), A не содержит минимальных подмножеств, так что $\mathbf{0} \notin \mathrm{conv}\, A$. Пусть $u(p)=c$ – уравнение гиперплоскости в P^*, строго отделяющей $\mathbf{0}$ и компактное выпуклое множество $\mathrm{conv}\, A$. Можно, очевидно, считать $\mathrm{Re}\, c > 0$. Следовательно, $\mathrm{Re}(e^{i\theta}q(p)) > \mathrm{Re}\, c > 0$ при всех $(\theta,q)\in\langle A\rangle$.

3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $\mathcal{A}_0 \neq \emptyset$ и $A \in \mathcal{A}_0$. В силу 3), существует $p \in P$, удовлетворяющий неравенствам $\mathrm{Re}(e^{i\theta}q(p))>0$ ($(\theta,q)\in\langle A\rangle$). Следовательно,

$$0=\mathrm{Re}\Big(\sum_{(\theta,q)\in\langle A\rangle} h_A(e^{i\theta}q)e^{i\theta}q(p)\Big)=\sum_{(\theta,q)\in\langle A\rangle} h_A(e^{i\theta}q)\,\mathrm{Re}(e^{i\theta}q(p))>0,$$

что абсурдно.

6. Чебышевский ранг подпространства обобщенных полиномов

Займемся теперь исследованием вопроса о чебышевском ранге подпространства P для $\mathcal{H}$-ограниченных комплекснозначных функций. Соответствующие результаты в классическом непрерывном случае и в случае приближения $\mathcal{H}$-ограниченных вещественных функций см. в [1,3,5,7,9].

Учитывая геометрическую интерпретацию (п.3), нетрудно убедиться в том, что для любой $\mathfrak{N}$-ограниченной функции f размерность $z(f)$ множества ее наилучших приближений совпадает с дефектной размерностью аффинного многообразия $M(f)$ в $P^* \times \mathbb{C}$, являющегося пересечением всех тех комплексных гиперплоскостей $u(p)+z=\nu^*(f)$, которые являются опорными к $W(f)$. Под чебышевским рангом $\rho(P)$ подпространства P понимаем максимальную размерность множеств $P(f)$, отвечающих функциям $f \in \mathcal{B}^0_{\mathfrak{N}}(T;\mathbb{C})$. Это определение, очевидно, является естественным обобщением классического определения чебышевского ранга (см. замечание 3), причем всегда $0 \leq \rho(P) \leq n$.

ЛЕММА I. Для каждого $A \in \mathcal{A}_0$ существуют числа $\theta_q \in [0,2\pi[$ $(q \in pz_0\langle A\rangle)$ такие, что

$$\inf_{p \in P} \max_{q \in pz_0\langle A\rangle} \mathcal{R}e\,(e^{i\theta_q} q(p)) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\sum_{q \in pz_0\langle A\rangle} \Big(\sum_{\theta \in I_q} h_A(e^{i\theta} q) e^{i\theta}\Big) q = 0,$$

где $I_q = \{\theta \in [0,2\pi[\,/\, e^{i\theta} q \in A\}$ $(q \in pz_0\langle A\rangle)$. В силу минимальности множества A и того факта, что $A \in \mathcal{A}_0$, каждая сумма $\sum_{\theta \in I_q} h_A(e^{i\theta} q) e^{i\theta}$ $(q \in pz_0\langle A\rangle)$ отлична от нуля. Поэтому

$$\sum_{q \in pz_0\langle A\rangle} t_q (e^{i\theta_q} q) = 0,$$

где

$$\theta_q = \arg\Big(\sum_{\theta \in I_q} h_A(e^{i\theta} q) e^{i\theta} \cdot \Big|\sum_{\theta \in I_q} h_A(e^{i\theta} q) e^{i\theta}\Big|^{-1}\Big) \quad (q \in pz_0\langle A\rangle),$$

$$t_q = \Big|\sum_{\theta \in I_q} h_A(e^{i\theta} q) e^{i\theta}\Big| \cdot \Big(\sum_{q \in pz_0\langle A\rangle} \Big|\sum_{\theta \in I_q} h_A(e^{i\theta} q) e^{i\theta}\Big|\Big)^{-1}.$$

Очевидно, $t_q > 0$ $(q \in pz_0\langle A\rangle)$, $\sum_{q \in pz_0\langle A\rangle} t_q = 1$. Кроме того, ясно, что

$$\inf_{p\in P}\max_{q\in pr_Q\langle A\rangle} \mathrm{Re}\,(e^{i\theta_q} q(p)) \leq \max_{q\in pr_Q\langle A\rangle} \mathrm{Re}\,(e^{i\theta_q} q(0)) = 0.$$

С другой стороны, для любого $p\in P$

$$0 = \mathrm{Re}\,\Big(\sum_{q\in pr_Q\langle A\rangle} t_q\cdot e^{i\theta_q} q(p)\Big) = \sum_{q\in pr_Q\langle A\rangle} t_q\cdot \mathrm{Re}\,(e^{i\theta} q(p)) \leq \max_{q\in pr_Q\langle A\rangle} \mathrm{Re}\,(e^{i\theta_q}\cdot q(p)).$$

Остальное ясно.

ЛЕММА 2. Пусть $A\in\mathcal{X}_0$ и P_A – аннулятор проекции на Q множества $\langle A\rangle$. Тогда существует функция $f_A\in\mathcal{B}^0_{\mathcal{X}}(T;\mathbb{C})$, для которой $r(f_A)\geq \dim P_A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m=\dim P_A$ и $p_0, p_1, \dots, p_m$ – какие-нибудь $m+1$ аффинно-независимых обобщенных полиномов из P_A, а положительное число λ удовлетворяет неравенству

$$\lambda \max_{q\in Q}\sum_{j=0}^{m} |q(p_j)| \leq 1.$$

Допустим, далее, для каждого $q\in pr_Q\langle A\rangle$ θ_q – число, определенное в лемме I, а функция $\psi\in C(Q)$ удовлетворяет условиям

$$|\psi(q)|\leq 1\ (q\in Q),\quad \psi(q) = -e^{-i\theta_q}\ (q\in pr_Q\langle A\rangle).$$

Тогда функция $\psi_A: Q\to\mathbb{C}$, $\psi_A(q)=\psi(q)\,(1-\lambda\sum_{j=0}^{m}|q(p_j)|)$, очевидно, удовлетворяет тем же же условиям. Согласно предложению 5 имеется функция $f_A\in C_{\mathcal{X}}(T;\mathbb{C})$ такая, что $\psi_A=[f_A]$. На основании леммы I

$$v^*(f_A) = \inf_{p\in P}\max_{q\in Q}|q(p)-[f_A](q)| \geq$$

$$\geq \inf_{p\in P}\max_{q\in pr_Q\langle A\rangle} \mathrm{Re}\,(e^{i\theta_q}(q(p)-[f_A](q))) =$$

$$= \inf_{p\in P}\max_{q\in pr_Q\langle A\rangle} (\mathrm{Re}\,(e^{i\theta_q} q(p))+1) = 1.$$

С другой стороны, при любом $k=0,1,\ldots,m$ и при всех $q\in Q$

$$|q(\lambda p_k)-[f_A](q)|\leqslant\lambda|q(p_k)|+|[f_A](q)|\leqslant$$

$$\leqslant\lambda|q(p_k)|+1-\lambda\sum_{j=0}^{m}|q(p_j)|=1-\lambda\sum_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{m}|q(p_j)|\leqslant 1,$$

так что

$$\nu(f_A,\lambda p_k)\leqslant 1\quad (k=0,1,\ldots,m).$$

Следовательно, $\lambda p_k\in P(f_A)$ $(k=0,1,\ldots,m)$. Поскольку обобщенные полиномы $\lambda p_0,\lambda p_1,\ldots,\lambda p_m$ аффинно-независимы, то $z(f_A)\geqslant m$. То, что $f_A\in\mathcal{B}^0_{\mathcal{H}}(T;\mathbb{C})$, очевидно.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Пусть $\mathbb{0}\in Q$ и $\{p_0,p_1,\ldots,p_n\}$ – какой-нибудь аффинный базис подпространства P. Повторяя с необходимыми видоизменениями доказательство леммы 2, легко убедиться в существовании функции $f_0\in\mathcal{B}^0_{\mathcal{H}}(T;\mathbb{C})$, для которой $z(f_0)=n$.

Совокупность всех общих корней обобщенных полиномов p_0, $p_1,\ldots,p_m$ далее обозначается символом $Q[p_0,p_1,\ldots,p_m]$.

ТЕОРЕМА 3 (о чебышевском ранге). Пусть $\mathcal{B}^0_{\mathcal{H}}(T;\mathbb{C})\neq\emptyset$, z – целое число, принадлежащее $[0,n-1]$. Следующие условия равносильны:

1) $\rho(P)>z$;

2) в Q имеется линейно-зависимое множество, состоящее из $n-z$ элементов;

3) существует $z+1$ линейно-независимых обобщенных полиномов p_0, $p_1,\ldots,p_z$ таких, что

$$\operatorname{card} Q[p_0,p_1,\ldots,p_z]\geqslant n-z;$$

4) $\mathbb{0}\in Q$ или существует $z+1$ линейно-независимых обобщенных полиномов $p_0,p_1,\ldots,p_z$ и $A\in\mathcal{A}_0$ таких, что $q\in Q[p_0,p_1,\ldots,p_z]$ при $e^{i\theta}q\in A$;

5) $\mathbb{0}\in Q$ или существует $z+1$ линейно-независимых обобщенных полиномов $p_0,p_1,\ldots,p_z$ и замкнутое

множество $A \subset K(Q)$ такие, что выполняются условия:

а) $q \in Q[\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_z]$ при $e^{i\theta}q \in A$;

б) для каждого $\rho \in P$ имеется функционал $e^{i\theta}q \in A$ такой, что $\mathcal{Re}(e^{i\theta}q(\rho)) \le 0$;

в) $2^A \cap (\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_0) = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) $\Rightarrow$ 2). Если $0 \in Q$, то выполнение 2) очевидно. Предположим $0 \notin Q$, а функция $f \in \mathcal{B}_n^0(T;\mathbb{C})$ такова, что $m = \dim P(f) > z$. Пусть, далее, $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_m$ – какие-нибудь $m+1$ аффинно-независимых обобщенных полиномов из $P(f)$. Гиперплоскости $H(\rho_0), \dots, H(\rho_m)$ опорны к $W(f)$, а точка $(0, \nu^*(f))$ лежит внутри некоторого симплекса S с вершинами из $W(f)$, которому отвечает некоторое минимальное множество A такое, что при некоторых $z(\theta,q) \in [f](q)$ будет

$$S = conv\{e^{i\theta}(q, -z(\theta,q)) / (\theta,q) \in \langle A \rangle\}.$$

Отметим, что $A \in \mathcal{A}_0$. Действительно, в противном случае, в силу предположения $0 \notin Q$, найдется $q \in Q \setminus \{0\}$ такое, что

$$0 = \sum_{(\theta,q) \in \langle A \rangle} h_A(e^{i\theta}q)e^{i\theta}q,$$

или, что то же,

$$0 = \sum_{(\theta,q) \in \langle A \rangle} h_A(e^{i\theta}q)e^{i\theta}.$$

Отсюда и из включения $S \subset H(\rho_0)$ следует, что

$$\nu^*(f) = \sum_{(\theta,q) \in \langle A \rangle} h_A(e^{i\theta}q)e^{i\theta}(q(\rho_0) - z(\theta,q)) =$$

$$= \sum_{(\theta,q) \in \langle A \rangle} h_A(e^{i\theta}q)e^{i\theta}(z' - z(\theta,q)) \le$$

$$\le \max_{(\theta,q) \in \langle A \rangle} |z' - z(\theta,q)| \le \max_{z \in [f](q)} |z' - z|$$

при всех $z' \in \mathbb{C}$.

Следовательно, $v^*(f) \le \min_{z' \in C} \max_{z \in \{\Omega(q)\}} |z'-z| \le \delta(f)$, что противоречит условию $f \in \mathcal{B}^{\circ}_{n}(T;C)$.

Далее, так как $S \subset M(f)$, то при всех $j=0,1,\ldots,m$

$$e^{i\theta}(q(p_j)-z(\theta,q))=v^*(f) \quad ((\theta,q)\in \langle A\rangle).$$

Отсюда вытекает, что при всех $q \in pr_Q\langle A\rangle$

$$q(p_0)=q(p_1)=\cdots=q(p_m)$$

или, что то же,

$$q(\bar p_1)=q(\bar p_2)=\cdots=q(\bar p_m)=0,$$

где обобщенные полиномы $\bar p_j = p_j - p_0$ $(j=1,\ldots,m)$ линейно-независимы. Таким образом, $P_A \supset \{\bar p_1, \bar p_2, \ldots, \bar p_m\}$ и, согласно условию I, $r < m \le \dim P_A = n - \dim \mathcal{L}_A$, где $\mathcal{L}_A$ – подпространство в P^*, порожденное множеством $pr_Q\langle A\rangle$, а P_A – аннулятор этого множества. Так как $A \in \mathcal{A}_0$, то $pr_Q\langle A\rangle$ линейно-зависимо. Следовательно, $\dim \mathcal{L}_A < \operatorname{card} pr_Q\langle A\rangle$, и каждые $\dim \mathcal{L}_A+1$ элементов множества $pr_Q\langle A\rangle$ линейно-зависимы. Выполнение условия 2) следует тогда из неравенства $\dim \mathcal{L}_A + 1 \le n - r$.

2) $\Longrightarrow$ 3). Пусть $q_0, q_1, \ldots, q_{n-r-1}$ – какие-нибудь $n-r$ линейно-зависимых функционалов из Q. Рассмотрим множество

$$P' = \{p \in P \mid q_j(p)=0 \quad (j=0,1,\ldots,n-r-1)\},$$

совпадающее с аннулятором подпространства $\mathcal{L}$ в P^*, порожденного функционалами $q_0, q_1, \ldots, q_{n-r-1}$. Так как

$$\dim P' = n - \dim \mathcal{L} > n-(n-r) = r,$$

то в P' имеется подмножество, состоящее из $r+1$ линейно-независимых обобщенных полиномов $p_0, p_1, \ldots, p_r$. Из определения P' следует, что

$$Q[p_0, p_1, \ldots, p_r] \supset \{q_0, q_1, \ldots, q_{n-r-1}\},$$

т.е.

$$\operatorname{card} Q[p_0, p_1, \ldots, p_r] \ge n-r .$$

3) $\Longrightarrow$ 4). Пусть $0 \notin Q$, $\mathcal{M}$ – подпространство в P, порожденное обобщенными полиномами $p_0, p_1, \ldots, p_r$, а $\mathcal{M}^{\perp}$ – аннулятор подпространства $\mathcal{M}$. Так как

$$\dim \mathcal{M}^{\perp} = n - \dim \mathcal{M} = n-(r+1) = n-r-1,$$

то во всем P^* у обобщенных полиномов $p_0, p_1, \ldots, p_r$ существует не более $n-r-1$ линейно-независимых общих нулей. Пусть $q_0, q_1, \ldots, q_{n-r-1}$ – какие-нибудь $n-r$ общих нулей в Q обобщенных полиномов $p_0, p_1, \ldots, p_r$ (заметим, что согласно 3) $\operatorname{card} Q[p_0, p_1, \ldots, p_r] \geqslant n-r$). Поскольку $n-r > \dim \mathcal{M}^{\perp}$, то функционалы $q_0, q_1, \ldots, q_{n-r-1}$ линейно-зависимы, так что существуют комплексные числа $\lambda_j\ (j=0,\ldots,n-r-1)$, $\sum_{j=0}^{n-r-1} |\lambda_j| > 0$, такие, что

$$\sum_{j=0}^{n-r-1} \lambda_j q_j = \mathbb{O}.$$

Перепишем это равенство в виде (считая все $\lambda_j \neq 0$)

$$\sum_{j=0}^{n-r-1} t_j (e^{i\theta_j} q_j) = \mathbb{O},$$

где используются обозначения

$$\theta_j = \arg \lambda_j, \quad t_j = |\lambda_j| \Big(\sum_{j=0}^{n-r-1} |\lambda_j| \Big)^{-1} \quad (j=0,\ldots, n-r-1).$$

Так как очевидно

$$\sum_{j=0}^{n-r-1} t_j = 1, \quad t_j \geqslant 0 \ (j=0,\ldots,n-r-1),$$

то

$$\mathbb{O} \in \operatorname{conv}\{e^{i\theta_0} q_0, \ldots, e^{i\theta_{n-r-1}} q_{n-r-1}\}.$$

Тогда из условия $\mathbb{O} \notin Q$ следует, что $n-r-1 \geqslant 1$, и потому существует $A \in \mathcal{A}_0$ $(\operatorname{card} A \leqslant n-r)$ такое, что

$$pr_Q \langle A \rangle \subset Q[p_0, p_1, \ldots, p_r].$$

4) $\Longrightarrow$ 5). Пусть $\mathbb{O} \notin Q$, а обобщенные полиномы $p_0, p_1, \ldots, p_r$ и множество $A \subset K(Q)$ выбраны из условия 4). Выполнение условий а) и в) очевидно. Чтобы убедиться в справедливости б), достаточно заметить, что

$$\sum_{(\theta,q)\in\langle A \rangle} h_A(e^{i\theta} q) \operatorname{Re}(e^{i\theta} q(p)) = \operatorname{Re}\Big(\sum_{(\theta,q)\in\langle A\rangle} h_A(e^{i\theta} q) e^{i\theta} q(p)\Big) = 0$$

5) $\Longrightarrow$ I). Пусть сначала $\mathcal{O} \in Q$. Согласно замечанию 4, найдется функция $f_0 \in \mathcal{B}^0_{\mathcal{N}}(T;\mathbb{C})$ такая, что $r(f_0)=n>r$.

Предположим теперь $\mathcal{O} \notin Q$. Тогда существует $r+1$ линейно-независимых обобщенных полиномов $p_0, p_1, \dots, p_r$ и замкнутое множество $A \subset K(Q)$ такие, что выполняются условия а), б) и в) из 5). Докажем, что $\mathcal{O} \in conv A$. В самом деле, иначе найдется гиперплоскость в P^*, задаваемая уравнением $u(p)=c$, строго отделяющая $conv A$ и $\mathcal{O}$. Можно, не умаляя общности, считать, что $\mathcal{R}e\, c > 0$. Поэтому для любого функционала $e^{i\theta}q \in A$ будет

$$\mathcal{R}e\,(e^{i\theta}q(p)) > \mathcal{R}e\, c > 0,$$

что противоречит б). Таким образом, $\mathcal{O} \in conv A$, и потому найдется $A_0 \in \mathcal{A}$ такое, что $A_0 \subset A$. Тогда из условий $\mathcal{O} \notin Q$ и в) следует, что $A_0 \in \mathcal{A}_0$. В силу леммы 2, найдется функция $f_{A_0} \in \mathcal{B}^0_{\mathcal{N}}(T;\mathbb{C})$, для которой $r(f_{A_0}) \geq dim P_{A_0}$. Но $dim P_{A_0} = n - dim \mathcal{L}_{A_0} \geq n - dim \mathcal{L}_A$, где $\mathcal{L}_A$ и $\mathcal{L}_{A_0}$ – подпространства в P^*, порождённые соответственно множествами $pr_Q\langle A\rangle$ и $pr_Q\langle A_0\rangle$, а P_{A_0} – аннулятор подпространства $\mathcal{L}_{A_0}$. Так как обобщенные полиномы $p_0, p_1, \dots, p_r$ линейно-независимы, то в пространстве P^* они имеют не более $n-r-1$ линейно-независимых общих нулей. Поскольку, в силу а), $pr_Q\langle A\rangle \subset Q[p_0,\dots,p_r]$, то $dim \mathcal{L}_A \leq n-r-1$ и $r(f_{A_0}) \geq n-(n-r-1)=r+1$. Следовательно, $\rho(P)>r$.

СЛЕДСТВИЕ I. Следующие условия равносильны:

I) для каждой функции $f \in \mathcal{B}^0_{\mathcal{N}}(T;\mathbb{C})$ элемент наилучшего $\mathcal{N}$-приближения единствен;

2) каждые n функционалов из Q линейно-независимы;

3) каждый нетривиальный обобщенный полином из P имеет в Q не более $n-1$ корней;

4) для любых нетривиального обобщенного полинома p и минимального множества $A \in \mathcal{A}_0$ существует $q \in pr_Q\langle A\rangle$ такой, что $q(p) \neq 0$;

5) не существует нетривиально-

го обобщенного полинома p и $A \in \mathcal{A}_0$ таких, что выполняются условия а), б) и в) теоремы 3.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $0 < r < n$. Следующие условия равносильны:

I) $\rho(P) = r$;

2) минимальное число линейно-зависимых функционалов в Q равно $n-r+1$;

3) каждые $r+1$ линейно-независимых обобщенных полиномов имеют не более $n-r-1$ общих корней в Q, и существует r линейно-независимых обобщенных полиномов, имеющих не менее $n-r+1$ общих корней в Q;

4) существует r линейно-независимых обобщенных полиномов $p_1, \dots, p_r$ и $A \in \mathcal{A}_0$ таких, что $\rho r_Q \langle A \rangle \subset Q[p_1, \dots, p_r]$, и не существует $r+1$ линейно-независимых обобщенных полиномов $p'_0, \dots, p'_r$ и $A' \in \mathcal{A}_0$ таких, что $\rho r_Q \langle A \rangle \subset Q[p'_0, \dots, p'_r]$;

5) существует r линейно-независимых обобщенных полиномов $p_1, \dots, p_r$ и замкнутое множество $A \subset K(Q)$, для которых выполняются условия а), б) и в) теоремы, и не существует $r+1$ линейно-независимых обобщенных полиномов $p'_0, \dots, p'_r$ и замкнутого множества $A' \subset K(Q)$, удовлетворяющего условиям а), б) и в) теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для того чтобы $\rho(P) = n$, необходимо и достаточно, чтобы $0 \in Q$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Устойчивой размерностью задачи (f), $f \in \mathcal{B}^0_n(T; \mathbb{C})$, называется число

$$r'(f)=\min_{\varepsilon>0}\max\{r(f')\,|\,f'\in\mathcal{B}^{o}_{\mathcal{N}}(T;\mathbb{C}),\ \|f'-f\|_{\mathcal{N}}<\varepsilon,\ \nu^*(f')=\nu^*(f)\}.$$

Очевидно, $r(f)\leqslant r'(f)$ для всех $f\in\mathcal{B}^{o}_{\mathcal{N}}(T;\mathbb{C})$. Легко видеть, что чебышевский ранг подпространства P совпадает с величиной

$$\rho'(P)=\max\{r'(f)\,|\,f\in\mathcal{B}^{o}_{\mathcal{N}}(T;\mathbb{C})\}$$

– максимальной устойчивой размерностью задач (f), отвечающих функциям $f\in\mathcal{B}^{o}_{\mathcal{N}}(T;\mathbb{C})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рубинштейн Г.Ш. О чебышевском ранге для задач равномерного приближения в пространстве $\mathcal{N}$-ограниченных функций// Докл. АН СССР. - 1981. - Т.258, № 4. - С.796-800.
2. Ярахмедов Г.Я. О наилучшем равномерном приближении почти везде ограниченных комплекснозначных функций // Докл. АН СССР. - 1985. - Т.286, № 1. - С.62-65.
3. Ремез Е.Я. Некоторые вопросы чебышевского приближения в комплексной области // Укр. мат. журн. - 1953. - Т.5, № 1.- С.3-49.
4. Рубинштейн Г.Ш. Об одном методе исследования выпуклых множеств// Докл. АН СССР. - 1955. - Т.102, № 3. - С.451-454.
5. Рубинштейн Г.Ш. Задача о крайней точке пересечения оси с многогранником и некоторые ее приложения // Усп. мат. наук. - 1955. - Т.10, вып.4. - С.206-207.
6. Колмогоров А.Н. Замечание по поводу многочленов П.Л.Чебышева, наименее уклоняющихся от заданной функции // Усп. мат. наук. - 1948. - Т.3, вып.1. - С.216-221.
7. Зуховицкий С.И. О приближении действительных функций в смысле П.Л.Чебышева // Усп. мат. наук. - Т.11, вып.2. - С.125-159.
8. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. - М.:Наука, 1965.
9. Singer I. Cea mai buna aproximare in spatii vectiriale normate prin elemente din subspatii vectoriale. - Bucuresti: Ed. Acad. , 1967.

10. Ярахмедов Г.Я. К основной теореме П.Л.Чебышева // Усп. мат. наук. - 1965. - Т.20, вып. 5. - С.251-256.
11. Ярахмедов Г.Я. К вопросу о единственности многочлена наилучшего приближения в метрике M // Изв. вузов. Математика. - 1966. - № 6(55). - С.177-186.
12. Ярахмедов Г.Я. Об одном обобщении теоремы А.Н. Колмогорова // Сиб. мат. журн. - 1972. - № 5. - С.958.

Поступила в ред.-изд. отдел
9.07.1987 г.