Численные методы

УДК 519.85.6

ЗАДАЧА О ТАБЛИЦЕ

А.Б.Грибов

Задача предложена И.В.Романовским в связи с автоматизацией полиграфического набора таблиц. Для таблицы, которую надо расположить на странице известного формата, следует выбрать ширину колонок и высоту полос так, чтобы площадь каждой ячейки таблицы была не меньше указанной для нее границы, а таблица в целом имела минимально возможную высоту.

Формально заданн матрица $|s_{ij}|$ ($i\in 1:m$, $j\in 1:n$), состоящая из положительных элементов, и положительное число a.

ЗАДАЧА А: найти $x_i\geq 0$ и $y_j\geq 0$, минимизирующие Σx_i при условиях $x_i\cdot y_j\geq s_{ij}$ и $\Sigma y_j=a$.

По существу, требуется минимизировать площадь таблицы; значение параметра a не влияет на структуру решения.

ЗАДАЧА Б: найти $x_i\geq 0$ и $y_j\geq 0$, минимизирующие $S=(\Sigma x_i)(\Sigma y_j)$ при условиях $x_i\cdot y_j\geq s_{ij}$.

Понятно, что допустимый план $\{x_i,y_j\}$ задачи Б преобразуется при $\bar{x}_i=c\cdot x_i$ и $\bar{y}_j=y_j/c$, где $c=\Sigma y_j/a$, в допустимый план задачи А и $S=a\cdot\Sigma\bar{x}_i$.

Приведем эквивалентную постановку, не зависящую от a.

ЗАДАЧА В: найти $x_i\geq 0$ и $y_j\geq 0$, минимизирующие $f=\Sigma x_i$ при условиях $x_i\cdot y_j\geq s_{ij}$ и $\Sigma x_i=\Sigma y_j$.

Понятно, что допустимый план $\{x_i,y_j\}$ задачи Б преобразуется при $\bar{x}_i=c\cdot x_i$ и $\bar{y}_j=y_j/c$, где $c=\sqrt{(\Sigma y_j)/(\Sigma x_i)}$, в допустимый план задачи В и $f=\sqrt{S}$.

Следующая задача двойственна задаче В.

ЗАДАЧА Г: найти $\omega_{ij} \geq 0$, максимизирующие $g=\sum_i\sqrt{\sum_j s_{ij}\cdot\omega_{ij}}$ при условиях $\sum_i \omega_{ij} = 1$.

Если $\{x_i, y_j\}$ - допустимый план задачи В и $\{\omega_{ij}\}$ - допустимый план задачи Г, то $g \leq f$.

Действительно, полагая $u_i=\sum_j \omega_{ij}\cdot y_j$, получим $\sum_i u_i = \sum_j y_j = \sum_i x_i = f$ и $g \leq \sum_i \sqrt{x_i \sum_j \omega_{ij} y_j} = \sum_i \sqrt{x_i u_i} \leq \|x\|\cdot\|u\|$. Здесь $x=(\sqrt{x_1},\ldots,\sqrt{x_m})$ и $u=(\sqrt{u_1},\ldots,\sqrt{u_m})$. Так как $\|x\| = \|u\| = \sqrt{f}$, то получаем требуемое $g \leq f$.

Следовательно, если $g=f$, то оба плана оптимальны в своих задачах. Имея в виду допустимый план $\{x_i, y_j\}$ задачи Б, заключим, что он оптимален, если $g=\sqrt{S}$.

Переформулируем критерий оптимальности в других терминах. Назовем клетку ij, для которой $x_i\cdot y_j = s_{ij}$, лимитной. Будем считать, что каждая строка и каждый столбец содержат лимитные клетки. Если их нет, например, в строке i, то, уменьшив x_i до $max\{s_{ij}/y_j\}$, получим лимитную клетку и одновременно улучшим план: уменьшим площадь таблицы.

Пусть $X=\sum x_i$, $Y=\sum y_j$, $a_i = x_i/X$, $b_j = y_j/Y$.

ЗАДАЧА Д: определить на лимитных клетках переменные $w_{ij} \geq 0$, связанные условиями $\sum_j w_{ij} = a_i$ и $\sum_i w_{ij} = b_j$.

Докажем, что если существует набор $\{w_{ij}\}$, удовлетворяющий условиям задачи Д, то допустимый план $\{x_i, y_j\}$ задачи Б оптимален. Задавая значения w_{ij} на клетках, которые не являются лимитными, нулевыми, положим $\omega_{ij} = w_{ij}/b_j$. Тогда $\omega_{ij} \geq 0$ и $\sum_i \omega_{ij} = 1$, т.е. $\{\omega_{ij}\}$ - допустимый план задачи Г и

$$g=\sum_i\sqrt{\sum_j s_{ij}\cdot w_{ij}/b_j}=\sum_i\sqrt{x_i Y\sum_j w_{ij}}=\sqrt{Y/X}\cdot\sum_i x_i=\sqrt{X\cdot Y}=\sqrt{S}.$$

Отсюда следует оптимальность.

Произвольному множеству J столбцов сопоставим множество I всех строк, каждая из которых имеет общую лимитную клетку хотя бы с одним столбцом из J; будем говорить, что I ассоциировано с J. Если $\sum_J b_j > \sum_I a_i$, то множество J назовем неудовлетворяемым.

Если задача Д имеет допустимый план, то неудовлетворяемых множеств нет. Верно и обратное: если задача Д не имеет допус-

тимого плана, то неудовлетворяемое множество найдется. Это утверждение есть обобщение теоремы Ф.Холла для системы различных представителей. Из сказанного следует, что если при допустимом плане $\{x_i, y_j\}$ задачи Б не существует неудовлетворяемого множества, то план оптимален.

Если неудовлетворяемое множество J обнаружено, то план можно улучшить, например, следующим образом:

1. Найдем $\varkappa = max\{s_{ij}/(x_i \cdot y_j) | i \in \bar{I}, j \in J\}$. Множество (дополнение к I) не пусто, поскольку $\sum\limits_I a_i < \sum\limits_J b_j \leq 1$, а $\sum a_i = 1$, т.е. $\varkappa$ определено и, так как в $\bar{I} \times J$ нет лимитных клеток, $\varkappa < 1$.

2. Определим $\mu = max\{\varkappa \sqrt{(X_I \cdot Y_{\bar{J}})(X_{\bar{I}} \cdot Y_J)}\}$. Через X_I обозначена сумма $\sum\limits_I x_i$. Остальные обозначения аналогичны. Так как $X_I/X = \sum\limits_I a_i < \sum\limits_J b_j = Y_J/Y$, то $X_I Y_J + X_I Y_{\bar{J}} < X_I Y_J + X_{\bar{I}} Y_J$ и $X_I Y_{\bar{J}} < X_{\bar{I}} Y_J$, т.е. $\mu < 1$.

3. Скорректируем план: умножим y_j для $j \in J$ на μ и x_i для $i \in I$ на $1/\mu$. Новый план допустим. При нем таблица имеет меньшую площадь. В самом деле, $(X_I + X_{\bar{I}}) \cdot (Y_J + Y_{\bar{J}}) -$
$$-(\frac{1}{\mu} X_I + X_{\bar{I}}) \cdot (\mu Y_J + Y_{\bar{J}}) = X_I Y_{\bar{J}}(1 - \frac{1}{\mu}) + X_{\bar{I}} Y_J (1-\mu) \geq X_I Y_{\bar{J}} (\frac{1}{\mu} - 1)^2 > 0.$$

Найти неудовлетворяемое множество или убедиться в его отсутствии несложно. Решим транспортную задачу линейного программирования: найдем переменные $w_{ij} \geq 0$, связанные условиями $\sum\limits_j w_{ij} = a_i$ и $\sum\limits_i w_{ij} = b_j$, взяв в качестве коэффициентов максимизируемой функции единицы для лимитных клеток и нули для остальных.

Если максимум равен единице, то задача Д имеет допустимый план, т.е. неудовлетворяемых множеств нет.

Если максимум меньше единицы, то имеется $w_{ij} > 0$ при том, что клетка ij не лимитна. Переопределим все такие переменные, положив их равными нулю. Тогда найдется столбец j такой, что $\sum\limits_i w_{ij} < b_j$. Будем строить множество J, постепенно пополняя его. Вначале включим найденный столбец. Чтобы сделать очередное пополнение, рассмотрим множество I, ассоциированное с текущим J, и включим в J всякий столбец j, для которого в $\bar{I}$ есть такая строка i, что $w_{ij} > 0$ (клетка

ij обязательно лимитна). Процесс остановится, когда очередное пополнение будет пустым. При этом получим неудовлетворяемое множество. Чтобы доказать это, убедимся, что для каждого $i \in I$ имеет место равенство $\sum_J w_{ij} = a_i$. Предположим обратное: при некотором пополнении обнаружилась строка i_1, для которой $\sum_J w_{i_1 j} < a_{i_1}$. Восстановим с конца цепочку строк и столбцов $i_1, j_1 = j(i_1), \ldots, i_r = i(j_{r-1}), \; j_r = j(i_r)$, дойдя до исходного столбца j_r, с которого началось построение множества J. Здесь $j(i)$ – столбец, который индуцировал включение i в I. Аналогично обозначение $i(j)$. Если $w_{i_\nu j_\nu}$ при каждом $\nu \in 1:r$ увеличить на $\varepsilon = min\{a_{i_1} - w_{i_1 j_1};\ b_{j_r} - w_{i_r j_r};\ min\{w_{i_{\nu+1} j_\nu} \mid \nu \in 1:r-1\}\}$, а $w_{i_{\nu+1} j_\nu}$ при каждом $\nu \in 1:r-1$ уменьшить на ε, то получим новый допустимый план транспортной задачи, при котором значение целевой функции больше (на ε), чем оптимальное, что невозможно.

Следовательно, $\sum_I a_i = \sum_{I \times J} w_{ij}$. А так как w_{ij} положительны только на лимитных клетках, а все лимитные клетки столбцов из J расположены в строках из I, то $\sum_{I \times J} w_{ij} < \sum_J b_j$. Значит, $\sum_I a_i < \sum_J b_j$, т.е. множество J неудовлетворяемое.

Сказанное позволяет переходить с улучшением от одного допустимого плана к другому.

Чтобы гарантировать конечность процесса, выделим в множестве допустимых планов такие, которые назовем сбалансированными. С допустимым планом $\{x_i, y_j\}$ свяжем граф, в котором вершинами являются строки и столбцы таблицы, и каждой лимитной клетке сопоставлено ребро, связывающее соответствующие строку и столбец. Компоненту связности графа назовем сбалансированной, если $Y_J = X_I$; здесь J – множество столбцов и I – множество строк данной компоненты. Допустимый план задачи В назовем сбалансированным, если сбалансированы все компоненты.

Оптимальный план задачи В непременно сбалансирован. Если нет, то по крайней мере для одной из компонент имеем $Y_J > X_I$. Для множества J всех столбцов компоненты ассоциированным будет множество I всех строк той же компоненты. Выписанное неравенство означает, что множество J – неудовлетворяемое и что, следовательно, план можно улучшить.

Множество сбалансированных планов конечно, ибо каждый сбалансированный план однозначно определяется сопутствующим ему множеством лимитных клеток, поскольку все относящиеся к одной компоненте переменные x_i и y_j можно выразить через любую из них, которую, в свою очередь, можно определить из условия сбалансированности.

Чтобы идти по сбалансированным планам, процедуру улучшения надо немного модифицировать. Пусть $\{x_i, y_j\}$ – допустимый (может, и несбалансированный) план задачи В и найдено неудовлетворяемое множество J_1 с ассоциированным множеством I_1. Пусть J_2 – множество всех столбцов всех сбалансированных компонент, не пересекающихся с J_1 (может быть, и пусто), и I_2 ассоциировано с J_2, а I_3 и J_3 включают остальные строки и столбцы (I_3 не обязательно ассоциировано с J_3).

Найдем $\varkappa = \max\{s_{ij}/(x_i \cdot y_j) | ij \in (I_2 \times J_1) \cup (I_3 \times (J_1 \cup J_2))\}$.

Определим $\mu = \max\{\varkappa, \sqrt{(X_1 \cdot Y_3)/(X_3 \cdot Y_1)}\}$ и $\lambda = \sqrt{(\frac{1}{\mu}X_1 + X_3)/(\mu Y_1 + Y_3)}$. Через X_1 обозначена сумма $\sum_{I_1} x_i$. Остальные обозначения аналогичны. Имеем $X_1 < Y_1$, $X_2 = Y_2$, $X_1 + X_3 = Y_1 + Y_3$. Поэтому $\mu < 1$, $\lambda > 1$ и $\lambda \cdot \mu < 1$. Домножим y_j при $j \in J_1$ на $\lambda\mu$, а при $j \in J_3$ на λ; x_i при $i \in I_1$ домножаем на $1/(\lambda\mu)$, а при $i \in I_3$ – на $1/\lambda$. Нетрудно убедиться, что новый план допустим в задаче В.

При этом плане таблица имеет меньшую площадь. В самом деле,

$$\Delta S = (X_1 + X_3)(Y_1 + Y_3) - (\frac{1}{\mu}X_1 + X_3)(\mu Y_1 + Y_3) + X_2(Y_1 + Y_3) - \lambda X_2(\mu Y_1 + Y_3) +$$
$$+ (X_1 + X_3)Y_2 - \frac{1}{\lambda}(\frac{1}{\mu}X_1 + X_3)Y_2 .$$

Но $(X_1 + X_3)(Y_1 + Y_3) > (\frac{1}{\mu}X_1 + X_3)(\mu Y_1 + Y_3)$; это, по существу, показано в п.3 при описании простой процедуры улучшения. Так как $Y_1 + Y_3 = X_1 + X_3$ и $\lambda(\mu Y_1 + Y_3) = \frac{1}{\lambda}(\frac{1}{\mu}X_1 + X_3)$, то $Y_1 + Y_3 > \lambda(\mu Y_1 + Y_3)$ и $X_1 + X_3 > \frac{1}{\lambda}(\frac{1}{\mu}X_1 + X_3)$. Следовательно, $\Delta S > 0$.

Возможны две ситуации.

1. План не сбалансирован. В качестве J_1 выберем множество всех столбцов одной из подходящих компонент. Тогда при $\mu > \varkappa$ выбранная компонента станет сбалансированной

и число несбалансированных компонент уменьшится, а в противном случае образуется новая лимитная клетка, которая объединит две компоненты в одну: уменьшится общее число компонент.

2. План сбалансирован. В качестве J_1 выберем неудовлетворяемое подмножество столбцов одной из компонент. Если вообще есть неудовлетворяемое множество, то это возможно. После применения процедуры в множестве $I_1 \times J_3$ не будет лимитных клеток: соответствующая компонента разделится на две. При $\mu > \varkappa$ обе новые компоненты сбалансируются: получится новый сбалансированный план, а в противном случае одна из новых компонент объединится с какой-нибудь другой: возникнет первая ситуация. Возможно, что обе новые компоненты объединятся друг с другом (но уже другим образом): получится новый улучшенный сбалансированный план.

Итак, ситуация второго типа может возникнуть только конечное число раз, и между двумя соседними такими событиями ситуация первого типа тоже возникает только конечное число раз. Из этого следует конечность работы метода.

Поступила в ред.-изд. отдел
5.02.1987 г.